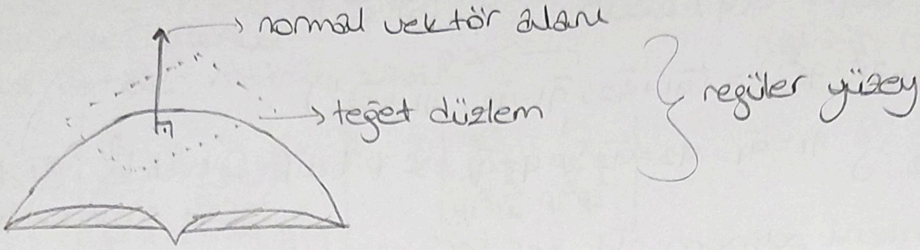
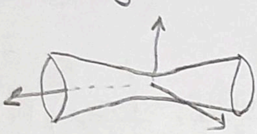
Diferansiyel Geometri II

I. Bölüm: Yüzeyler

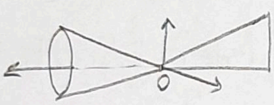
Yüzey kavramı: $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ $\alpha'(t) \neq 0$ (α regüler) yüzeyin her noktasında teğet düzlemi tanımlıysa regüler yüzey denir. Yani bir yüzeyin regüler olabilmesi için her noktasında normal vektör alanının tanımlı olması gerekir. Buna göre;



Yüzeyin parametrik ya da kapalı denklemi ile verilmesi durumunda yüzeyin herhangi bir noktadaki normal vektör alanının hangi koşullar altında tanımlanacağını inceleyeceğiz.



$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ tek kanatlı hiperbolid yüzeyinin her noktasında teğet düzlem tanımlı old. regüler yüzeydir.



$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ koni

$(0,0,0)$ regüler yüzey değildir. Bu noktalara singüler nokta denir.

Jacobien matrisinin rankı tanım kümesinin boyutuna eşit olmalı

Tanım: $U \subset \mathbb{R}^2$ bağlantılı açık bir küme o.ü. $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ C^∞-sınıfından regüler bir dönüşüm olsun. $\varphi : U \to \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise (kendi ve tersi sürekli dönüşüm) $\varphi(U)$ ya $\mathbb{R}^3$ uzayında regüler basit yüzey (lamda lokal yüzey) denir. M, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. $\forall p \in M$ için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subseteq M$ o.ş. bir $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyi varsa (bulunabiliyorsa) M kümesine $\mathbb{R}^3$ de regüler yüzey denir.

Tanım: $\forall p \in M$ için $U \subset \mathbb{R}^2$ açık, bağlantılı kümesini $\mathcal{U} \cap M \subset \mathbb{R}^3$ kümesine götüren ve aş. 3 koşulu sağlayan $\varphi : U \to \mathcal{U} \cap M$ dönüşümü ve $\mathbb{R}^3$ ün $\mathcal{U}$ açık komşuluğu varsa $M \subset \mathbb{R}^3$ alt kümesine regüler yüzey denir.

i-) C^∞-sınıfından

ii-) φ homeomorfizm (yüzeyin kendisini kesmemesini garantiler) (φ, φ^{-1} sürekli)

iii-) Regülerlik koşulu yani $\forall q \in U$ için $d\varphi : \varphi_{*q} ; T_q(\mathbb{R}^2) \to T_{\varphi(q)}(\mathbb{R}^3)$ türev dönüşümü 1-1 dir. ($\text{rank}(J\varphi) = 2$)

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $\varphi = (x_1+x_2, x_1-x_2, x_1^2+x_2^2)$ olarak verilen $\varphi(\mathbb{R}^2)=M$ kümesi bir regüler yüzey midir? İnceleyiniz.

$\varphi = (\underbrace{x_1+x_2}_{f_1}, \underbrace{x_1-x_2}_{f_2}, \underbrace{x_1^2+x_2^2}_{f_3})$ $\forall i, (i=1,2,3)$ f_i C^∞ sınıfından old. φ C^∞ sınıfındandır.

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \varphi(\mathbb{R}^2)=M$ örtendir. $q=(q_1,q_2)$

$q, \bar{q} \in \mathbb{R}^2$ için $\varphi(q)=\varphi(\bar{q})$ olsun. $\bar{q}=(\bar{q_1}, \bar{q_2})$

$(q_1+q_2, q_1-q_2, q_1^2+q_2^2) = (\bar{q_1}+\bar{q_2}, \bar{q_1}-\bar{q_2}, \bar{q_1}^2+\bar{q_2}^2)$

$\left.\begin{array}{l} q_1+q_2=\bar{q_1}+\bar{q_2} \\ q_1-q_2=\bar{q_1}-\bar{q_2} \end{array}\right\}$ $q_1=\bar{q_1}$ $q_2=\bar{q_2}$ $q=\bar{q} \Rightarrow$ 1-1 dir. O halde φ dön. tersi mevcuttur.

φ nin bileşenleri polinom old. her biri süreklidir dolayısıyla φ sürekli. φ^{-1} in sürekli old. görelim.

$\left.\begin{array}{l} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_1-x_2 \\ y_3=x_1^2+x_2^2 \end{array}\right\}$ $x_1=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ $x_2=\dfrac{y_1-y_2}{2}$ olup buradan

$y_1^2+y_2^2=2y_3$ bulunur. Buna göre

$V=\{(y_1,y_2,y_3): 2y_3=y_1^2+y_2^2\}$ o.ü $\varphi^{-1}: V \to \mathbb{R}^2$; $\varphi^{-1}=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{x_1-x_2}{2}\right)$ bulunur.

φ^{-1} sürekli old. φ bir homeomorfizmdir.

Regülerlik koşulunu göstermek için Jacobien matristen yararlanalım.

$\varphi=(f_1,f_2,f_3)$

$$J\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

eşolon forma getir
0 satırı olmayan satır sayısı rank

$\text{rank}(J\varphi)=2=\text{boy}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \varphi$ regülerdir.

$\varphi(\mathbb{R}^2)=M$ regüler bi yüzeydir.

Teorem: $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme ve $f: U \to \mathbb{R}$ C^∞-sınıfından bir fonksiyon olsun. Bu durumda $M=\{(q_1,q_2,f(q_1,q_2)) : (q_1,q_2) \in U\}$ olarak tanımlanan M kümesi regüler bir yüzey belirtir.

Tanım: $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$, $\varphi: (x_1,x_2,f)$ olarak verilen yüzeylere Monge gösterimi ile verilmiş bir yüzey ya da kısaca Monge yüzeyi denir. (Gaspard Monge) (regüler)

Örn $M = \{(q_1, q_2, \overset{f(q_1,q_2)}{q_1^2+q_2^2}) : (q_1,q_2) \in U\}$ olarak verilen M kümesinin $\mathbb{R}^3$ uzayında regüler bir yüzey old. gösteriniz.

$f(q_1,q_2) = q_1^2+q_2^2 \quad f: x_1^2+x_2^2 \quad f: U \to \mathbb{R}$ f polinom old. f C^∞ sınıfındandır.

$\varphi: (x_1, x_2, f)$ önceki teorem gereğince M kümesi regüler bir yüzeydir.

Örn $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $\varphi: (x_1^3+3x_2, x_2^3+3x_1, x_1^3x_2^3)$ $\varphi(\mathbb{R}^2) = M$ olarak verilen M yüzeyinin singüler nok. bulunuz.

φ nin Jacobien matrisi $\forall q \in \mathbb{R}^2$ — Matrisin rankının 2 olmadığı noktaları araştıralım.

$$(J\varphi)_q = \begin{bmatrix} (3x_1^2)_q & 3 \\ 3 & (3x_2^2)_q \\ (3x_1^2x_2^3)_q & (3x_1^3x_2^2)_q \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} q_1^2 & 1 \\ 1 & q_2^2 \\ q_1^2q_2^3 & q_1^3q_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} q_1^2 & 1 \\ 1 & q_2^2 \end{vmatrix} = q_1^2q_2^2 - 1 \qquad \begin{vmatrix} q_1^2 & 1 \\ q_1^2q_2^3 & q_1^3q_2^2 \end{vmatrix} = q_1^5q_2^2 - q_1^2q_2^3 = q_1^2q_2^2(q_1^3 - q_2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & q_2^2 \\ q_1^2q_2^3 & q_1^3q_2^2 \end{vmatrix} = q_1^2q_2^2(q_1 - q_2^3)$$

determinantlarının hepsini 0 yapan q noktaları verilen yüzeyin singüler noktalarıdır o halde;

$(q_1q_2)^2 = 1 \Rightarrow q_1q_2 = \mp 1$, $q_1^3 = q_2$, $q_2^3 = q_1$ eşitliklerinden $q = (q_1, q_2)$ noktasının $(1,1)$ veya $(-1,-1)$ olarak bulunur. $\{(1,1), (-1,-1)\}$ verilen yüzeyin singüler noktalarıdır. Bu noktalarda Jacobien matrisinin rankı 1 olur. Verilen yüzeyin regüler yüzey olması için tanım kümesinden bu iki nokta çıkartılmalıdır.

Örn $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ o.ü $\varphi: (x_1^2, x_2^2, (x_1x_2)^2)$ olarak verilen $M = \varphi(\mathbb{R}^2)$ yüzeyi regüler midir? Hangi nokta ya da noktalar çıkartılırsa regüler olur?

$\forall q \in \mathbb{R}^2$ için

$$(J\varphi)_q = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ 2x_1x_2^2 & 2x_1^2x_2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \\ q_1q_2^2 & q_1^2q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2q_1 & 0 \\ 0 & 2q_2 \end{vmatrix} = 4q_1q_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2q_1 & 0 \\ 2q_1q_2^2 & 2q_1^2q_2 \end{vmatrix} = 4q_1^3q_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & q_2 \\ 2q_1q_2^2 & 2q_1^2q_2 \end{vmatrix} = -4q_1q_2^3 = 0 \text{ bulunur}$$

$q \in \mathbb{R}^2$ old $q_1 = 0$ veya $q_2 = 0$ alınırsa

$\{(0, q_2), q_2 \in \mathbb{R}\} \cup \{(q_1, 0), q_1 \in \mathbb{R}\} = W$

singüler nok. kümesi

$$\begin{bmatrix} 2X_1 & 0 \\ 0 & 2X_2 \\ 2X_1X_2 & 2X_1X_2 \end{bmatrix}$$

1·2: $4X_1X_2 = 0$

1·3: $4X_1^2X_2 = 0$

2·3: $4X_1X_2^2 = 0$

$\Rightarrow$ $X_1 \cdot X_2 = 0$ olacak şekildeki (X_1, X_2) noktaları rankı sıfır yapar. singüler noktalardır.

$\boxed{(1,0), (0,1), (0,0)}$

Ör (Monge ile de çözülür)
$U=\{q\in\mathbb{R}^2 : \|q\|<1\}$ olsun. $\mathbb{R}^2$ de (x_1,x_2) koor. ss. o.ü $\varphi: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$
$\varphi=(x_1,x_2,\sqrt{1-x_1^2-x_2^2})$ dönüşümü veriliyor. $\varphi(U)$ nun regüler yama (koor. komşuluğu) old. gösteriniz.

$f_1=x_1 \quad f_2=x_2 \quad f_3=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ fonk. U açık küm. üz. C^∞-sınıfından old. φ C^∞-sınıfındandır. Uzayda merkezi başlangıç noktası olan 1 yarıçaplı küreyi M ile göst.

$(f_1(q))^2+(f_2(q))^2+(f_3(q))^2=q_1^2+q_2^2+1-q_1^2-q_2^2=1 \quad f_3(q)>0 \quad \varphi(U)\subseteq M$

$\varphi(q)$ noktasının y_1oy_2 düzlemine izdüşümü $\varphi(U)$, M kümesinin üst yarısıdır. $\varphi(q)$ noktasının y_1oy_2 düzlemiyle çakışacak şekilde yerleştirildiğinde h olsun. x_1ox_2 düzlemi, y_1oy_2 düzlemiyle $\varphi: U\to\varphi(U)$ 1-1 örten old. gösterir. q noktası h noktası M ile çakışır. $\varphi: U\to\varphi(U)$ $\varphi^{-1}: \varphi(U)\to U$ homeomorfizm
$\varphi(U)=\{(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{R}^3 : p_1^2+p_2^2+p_3^2>1\}$ o.ü $\varphi^{-1}: \varphi(U)\to U$ homeomorfizm

$$J\varphi=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{-x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} & \dfrac{-x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \end{bmatrix}$$

$\forall q\in U$ $\text{rank}(J\varphi)=2=\text{boy}(\mathbb{R}^2)$ φ regüler

Merkezcil birim küre için yukarıda gösterdiğimiz regüler basit yüzeyin (koor. komşuluğunun) yanı sıra $U=\{q\in\mathbb{R}^2 : \|q\|<1\}$ için $\varphi_2: (x_1,x_2,-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2})$; $\varphi_4=(x_1,-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2},x_2)$; $\varphi_3: (x_1,\sqrt{1-x_1^2-x_2^2},x_2)$; $\varphi_5: (\sqrt{1-x_1^2-x_2^2},x_1,x_2)$; $\varphi_6=(-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2},x_1,x_2)$ şeklinde kürenin tamamını örtecek regüler basit yüzeylerden yararlanarak küre yüzeyinin regüler yüzey old. söylenebilir.

Kapalı denklemi verilen bir kümenin regüler bir yüzey olup olmadığını herhangi bir parametrizasyona veya yamaya ihtiyaç duymadan nasıl anlayabiliriz?
Bunun için regüler değer tanımını verelim.

Tanım: H, $\mathbb{R}^n$ uzayının açık altkümesi o.ü $f: H\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonk. olsun. $c\in f(H)$ o.ü $f^{-1}\{c\}$ kümesinin her bir p elemanı için $f_{*p}: T_p(\mathbb{R}^n)\to T_c(\mathbb{R})$ dönüşümü örten ise yani $\text{rank}(Jf)_p=1$ ise c değerine f dönüşümünün regüler değeri denir.

H, $\mathbb{R}^n$ nin açık altkümesi ve $f: H\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dif.bilir. fonk. olsun. $c\in f(H)$
Sonuç: o.ü c elemanı f nin regüler değeridir $\Leftrightarrow$ $f(p)=c$ o.s. $\forall p$ noktasında f_{*p} dönüşümünün rankı 1 dir.

Tanım: $F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ($U$ açık) C^∞ dönüşümünü göz önüne alalım. Bir $p \in U$ için $F_{*p}: T_p(\mathbb{R}^n) \to T_{F(p)}(\mathbb{R}^m)$ türev dönüşümü örten değilse yani $\text{rank}(JF)_p \neq m$ ise p noktasına kritik nokta denir. $F(p)$ değerine de kritik değer denir.

Ö: $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F = (y_1^2, y_2^2 + y_3^2)$ dönüşümünün kritik değerlerini bulunuz.

$$(JF) = \begin{bmatrix} 2y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2y_2 & 2y_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & 2y_2 \end{vmatrix} = 4y_1y_2 \qquad \begin{vmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & 2y_3 \end{vmatrix} = 4y_1y_3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2y_2 & 2y_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad 4y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0 \vee y_2 = 0$$

$$4y_1y_3 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0 \vee y_3 = 0$$

Böylece:
$y_1 = 0$ veya $y_2 = y_3 = 0$ iken
rank 2 den küçüktür.
$(0, p_2, p_3)$ kritik nokta $F(0, p_2, p_3) = (0, p_2^2 + p_3^2)$ kritik değer
$(p_1, 0, 0)$ kritik nokta $F(p_1, 0, 0) = (p_1^2, 0)$ kritik değer

Teorem: H, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir açık alt kümesi ve $f: H \to \mathbb{R}$ dif.bilir fonk. olsun. c noktası f'nin regüler değeri ise $f^{-1}\{c\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ uzayında regüler bir yüzeydir.

$f^{-1}\{c\} = \{(p_1, p_2, p_3) \in H : f(p_1, p_2, p_3) = c\}$ kümesine seviye yüzeyleri denir. c regüler değeri değiştikçe yüzey de değişecektir. $M\{c\}$ ile göst.

Ö: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = c$ şeklini o.ü seviye yüzeyinin (grafiğini) $c = -1$, $c = 0$, $c = 1$ için çiziniz. Hangi c değeri için yüzey regüler ya da değerleri için yüzey regüler değildir?

$M\{-1\} = f^{-1}\{-1\}$ $\quad y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = -1$ $\quad$ 2 (çift) kanatlı hiperboloid

$M\{0\} = f^{-1}\{0\}$ $\quad y_1^2 + y_2^2 = y_3^2$ $\quad$ koni

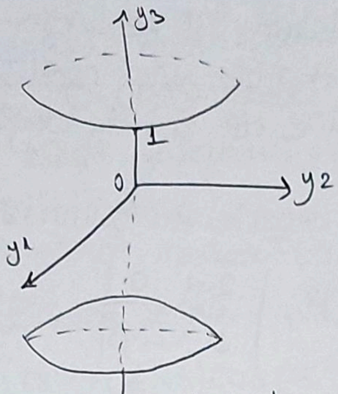
$M\{1\} = f^{-1}\{1\}$ $\quad y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$ $\quad$ tek kanatlı hiperboloid

$$(Jf) = \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} \;\; \frac{\partial f}{\partial y_2} \;\; \frac{\partial f}{\partial y_3}\right] = \left[2y_1 \;\; 2y_2 \;\; -2y_3\right]$$

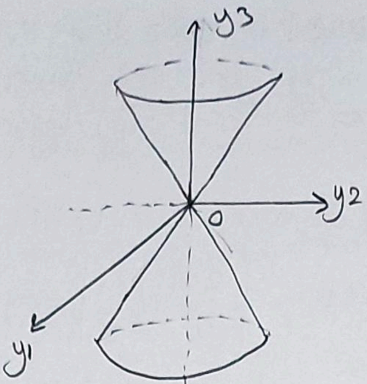
$f(p) = -1$ o.s. p noktası için $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = -1$ $[2p_1 \;\; 2p_2 \;\; -2p_3]$ değerlerinin hepsi 0 olamayacağından $\text{rank}(Jf) = 1$ old. $c = -1$ regülerdir. $M\{-1\}$ regüler yüzeydir.

$f(p) = 0$ o.s. $p_1^2 + p_2^2 = p_3^2 \Rightarrow p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = 0$ $\quad p_1 = p_2 = p_3 = 0$ buradan $f^{-1}\{0\}$ regüler yüzey değildir.

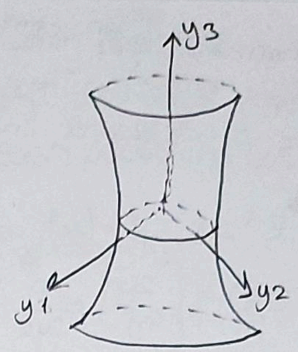
$f(p) = 1$ o.s. $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = 1$ yine 3 değer de aynı anda 0 olam. $\text{rank}(Jf) = 1$ old. $f^{-1}\{1\}$ regüler yüzeydir. $c = 1$ regüler değerdir.



2 kanatlı hiperboloid
regüler yüzey $f^{-1}\{-1\}$



koni yüzeyi
$f^{-1}\{0\}$ regüler yüzey değil



tek kanatlı hiperboloid
$f^{-1}\{1\}$ regüler yüzey

Tanım: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(y_1,y_2,y_3)=0$ kapalı denklemi ile verilen dif.bilir bir fonk. olsun. $\forall p\in\mathbb{R}^3$ için $(\nabla f)_p\neq 0$ oluyorsa $M=f^{-1}\{0\}$ yüzeyine regüler yüzey denir.

Ör: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f=y_1y_2y_3^2$ fonk. kritik noktalarını ve değerlerini bulunuz. Hangi $c\in\mathbb{R}$ değerleri için $f(y_1,y_2,y_3)=c$ kümesi regüler bir yüzey belirtir.

$(Jf)=\begin{bmatrix} y_2y_3^2 & y_1y_3^2 & 2y_1y_2y_3\end{bmatrix}$ olup matrisin rankı $p_3=0$ ya da $p_1=p_2=0$ olan noktalarda rank$(Jf)=0$ olur. Buradan kritik nok. kümesi

$\{(0,0,p_3): p_3\in\mathbb{R}\}\cup\{(p_1,p_2,0): p_1,p_2\in\mathbb{R}\}$ dir.

$f(0,0,p_3)=0$, $f(p_1,p_2,0)=0$ old. dolayı 0 kritik değerdir. $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için $f(y_1,y_2,y_3)=c$ regüler yüzey belirtir.

Ör: $\mathbb{R}^3$ uzayında $\frac{y_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{y_3^2}{c^2}=1$ denklemiyle verilen elipsoid regüler bir yüzey midir?

$f: \frac{y_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{y_3^2}{c^2}$ C^∞-sınıfından $c=1$ $f(p)=1$ $(Jf)=\begin{bmatrix}\frac{2y_1}{a^2} & \frac{2y_2}{b^2} & \frac{2y_3}{c^2}\end{bmatrix}$

$\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}=1$, $f(p)=1$ sağlayan $\forall p$ için rank$(Jf)=1$ dir.
(yani p_1,p_2,p_3 aynı anda 0 değil)

$c=1$ regüler değer $f^{-1}\{1\}$ regüler yüzeydir.

Yüzey Üzerinde Parametre Eğrileri

M $\mathbb{R}^3$ de regüler yüzey ve $p\in M$ olsun. p noktasını içeren $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyi vardır. x_1,x_2 $\mathbb{R}^2$ nin; y_1,y_2,y_3 $\mathbb{R}^3$ ün dik koor. fonk. göstermek üzere $q\in U\subset\mathbb{R}^2$, $\varphi(q)=p$ olsun. $q=(q_1,q_2)$ $\alpha(t)=\varphi(q_1+t,q_2)$ eşitliği ile tanımlanan α eğrisine $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyinin p noktasındaki x_1-parametre eğrisi, $\beta(t)=\varphi(q_1,q_2+t)$ ile tanımlanan β eğrisine $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyinin p noktasındaki x_2-parametre eğrisi denir.

$U = \{(q_1, q_2) : q_1, q_2 \in (0,\pi)\}$ olsun. x_1, x_2 $\mathbb{R}^2$'nin dik koor. fonk. o.ü. $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$; $\varphi = (\underbrace{r\sin x_1 \cos x_2}_{y_1}, \underbrace{r\sin x_1 \sin x_2}_{y_2}, \underbrace{r\cos x_1}_{y_3})$ dönüşümü veriliyor. $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyinin $p_0 = \varphi(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ noktasından geçen parametre eğrilerini belirtiniz.

$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = r^2$ merkezi baş. nok. olan r yarıçaplı küre yüzeyidir.

x_1-parametre eğrisi $q_1 = (\pi/6, \pi/3)$ $\alpha(t) = \varphi(q_1 + t, q_2) = \varphi(\pi/6 + t, \pi/3)$

$\alpha(t) = (r\sin(\frac{\pi}{6}+t)\cos(\frac{\pi}{3}), r\sin(\frac{\pi}{6}+t)\sin(\frac{\pi}{3}), r\cos(\frac{\pi}{6}+t))$

x_2-parametre eğrisi $\beta(t) = \varphi(q_1, q_2 + t) = \varphi(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + t)$

$\beta(t) = (r\sin(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{3}+t), r\sin(\frac{\pi}{6})\sin(\frac{\pi}{3}+t), r\cos(\frac{\pi}{6}))$

$\alpha = \varphi \circ \gamma$, $\gamma : I \to U$, $\gamma(t) = q + t(1,0)$ $\gamma(0) = q$ old. hatırlanırsa:

$\gamma'(0) = (1,0)_{\gamma(0)} = (1,0)_q = \frac{\partial}{\partial x_1}\big|_q$

$\beta = \varphi \circ \sim$, $\sim : J \to U$, $\sim(t) = q + t(0,1)$, $\sim(0) = q$ $\sim'(0) = (0,1)_{\sim(0)} = (0,1)_q = \frac{\partial}{\partial x_2}\big|_q$

$\varphi_{*q} : T_q(\mathbb{R}^2) \to T_p(\mathbb{R}^3)$ $(i = 1,2)$, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_q\right) \to \varphi_{*q}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_q\right) \in T_p(\mathbb{R}^3)$ olup $\varphi_{*q}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_q\right)$ teğet vektörü kısaca $\varphi_i(q)$ ile göst. Yani $\varphi_i(q) = \varphi_{*q}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_q\right)$ ile göst. $\partial_i(p) = \varphi_i(q)$ olarak tanımlayacağız. $\varphi_i(q) \in T_p(\mathbb{R}^3)$ ve $\partial_i(p) \in T_p(\mathbb{R}^3)$ old. açıktır. $\partial_i(p) = \varphi_i(q) \Rightarrow \partial_i(\varphi(q)) = \varphi_i(q)$

$\Rightarrow (\partial_i \circ \varphi)(q) = \varphi_i(q) \overset{\forall q}{\Rightarrow} \partial_i \circ \varphi = \varphi_i$ dir.

$U = \{(q_1, q_2) : q_1, q_2 \in (0,\pi)\}$, $q_0 = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$, $\varphi(q_0) = p_0$ $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$; $\varphi = (r\sin x_1 \cos x_2, r\sin x_1 \sin x_2, r\cos x_1)$ o.ü. $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyi için $\varphi_i(q_0)$ vektörlerini belirtiniz. $\partial_i(p_0)$ vektörleri ne olur?

$$(J\varphi)_{q_0} = \begin{bmatrix} r\cos x_1 \cos x_2 & -r\sin x_1 \sin x_2 \\ r\cos x_1 \sin x_2 & r\sin x_1 \cos x_2 \\ -r\sin x_1 & 0 \end{bmatrix}_{q_0 \to (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} r & -\frac{\sqrt{3}}{4} r \\ \frac{3r}{4} & \frac{r}{4} \\ -\frac{r}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$e = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_{q_0}, \frac{\partial}{\partial x_2}\big|_{q_0}\right\}$, $e' = \left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\big|_{p_0}, \frac{\partial}{\partial y_2}\big|_{p_0}, \frac{\partial}{\partial y_3}\big|_{p_0}\right\}$ o.ü.

$[\varphi_*(v_q)]_{e'} = (J\varphi)_{q_0} \cdot [v_q]_e$ old. hatırlanırsa

$$\left[\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_{q_0}\right)\right]_{e'} = (J\varphi)_{q_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_{q_0}\right]_e = \frac{r}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{r}{4}(\sqrt{3}, 3, -2)$$

$\varphi_1(q_0) = \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_{q_0}\right) = \frac{r}{4}(\sqrt{3}, 3, -2) = \frac{r}{4}\Big(\underbrace{\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial y_1}\big|_{p_0} + 3\frac{\partial}{\partial y_2}\big|_{p_0} - 2\frac{\partial}{\partial y_3}\big|_{p_0}}_{\text{uzayın bazının lineer birleşimi yazılımı}}\Big)$

$\left[\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\big|_{q_0}\right)\right]_{e'} = \frac{r}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{r}{4}(-\sqrt{3}, 1, 0) = \varphi_2(q_0)$

$\partial_i(p) = \varphi_i(q)$ $i \in \{1,2\}$ ol. tanımlandığından $\partial_i(p_0) = \varphi_i(q_0)$ dır.

Teorem: $\varphi_i(q)$ vektörü p noktasından geçen x_i. parametre eğrisinin hız vektörü

$\varphi = (f_1, f_2, f_3)$ ve $\varphi(q) = p$ ise

$$\varphi_i(q) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\Big|_q , \frac{\partial f_2}{\partial x_i}\Big|_q , \frac{\partial f_3}{\partial x_i}\Big|_q \right) \text{ dir.}$$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \circ \varphi \right)$$ olarak yazılabilir.

Teorem: $\varphi(U)$, M yüzeyi içinde regüler basit yüzey ise $\forall q \in U$ için $(\varphi_1 \times \varphi_2)(q) \neq 0$

Ör: $U = \{(q_1, q_2) : q_1, q_2 \in (0,\pi)\}$ olsun. $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$; $\varphi : (r\sin x_1 \cos x_2, r\sin x_1 \sin x_2, r\cos x_1)$ dönüşümü ile verilen $\varphi(U)$ regüler yüzeyi için $q_0 = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$, $\varphi(q_0) = p_0$ o.ü $(\varphi_1 \times \varphi_2)(q_0)$ vektörünü hesaplayınız. $p \in \varphi(U)$ için $(\varphi_1 \times \varphi_2)(q)$ vektörünü hesaplayınız.

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \circ \varphi \right), \quad \varphi(q_0) = p_0$$

$$\varphi_i(q_0) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big|_{q_0} \frac{\partial}{\partial y_j} \varphi(q_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\Big|_{q_0} \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{p_0} + \frac{\partial f_2}{\partial x_i}\Big|_{q_0} \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{p_0} + \frac{\partial f_3}{\partial x_i}\Big|_{q_0} \frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_{p_0}$$

$i=1$ $$\varphi_1(q_0) = (r\cos x_1 \cos x_2)\big|_{q_0} \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{p_0} + (r\cos x_1 \sin x_2)\big|_{q_0} \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{p_0} + (-r\sin x_1)\big|_{q_0} \frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_{p_0}$$

$$\varphi_1(q_0) = \frac{r}{4}\left(\sqrt{3} \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{p_0} + 3 \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{p_0} - 2 \frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_{p_0} \right)$$

$$\varphi_2(q_0) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big|_{q_0} \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{p_0} = \frac{r}{4}\left(-\sqrt{3} \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{p_0} + \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{p_0} \right)$$

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)(q_0) = \varphi_1(q_0) \times \varphi_2(q_0) = \frac{r^2}{16} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{p_0} & \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{p_0} & \frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_{p_0} \\ \sqrt{3} & 3 & -2 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{r^2}{8}(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$$

$$\varphi(q_0) = \varphi\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{r}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) = p_0 \Rightarrow (\varphi_1 \times \varphi_2)(q_0) = \frac{r}{2} p_0$$

$$\varphi_1(q) = \partial_1(p) = (r\cos q_1 \cos q_2, r\cos q_1 \sin q_2, -r\sin q_1)_p$$

$$\varphi_2(q) = \partial_2(p) = (-r\sin q_1 \sin q_2, r\sin q_1 \cos q_2, 0)_p$$

$$\varphi_1(q) \times \varphi_2(q) = \partial_1(p) \times \partial_2(p)$$

$$= r^2 \sin q_1 (\sin q_1 \cos q_2, \sin q_1 \sin q_2, \cos q_1)$$

$$= r^2 \sin q_1 . p$$

Sonuç: M bir yüzey $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$, C^∞ dönüşüm, $\varphi(U) \subseteq M$, $\varphi: U \to \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizma o.ü $\forall q \in U$ için $(\varphi_1 \times \varphi_2)(q) \neq 0$ ise φ dönüşümü U üstünde regülerdir. Sonuç olarak $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$, C^∞-dönüşümü regülerdir $\Leftrightarrow \forall q \in U$ için $(\varphi_1 \times \varphi_2)(q) \neq 0$ dır.

Sonuç: $\varphi(U)$, M yüzeyi içinde regüler basit yüzey ise $\forall q \in U$ için $\{\varphi_1(u), \varphi_2(u)\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

Sonuç: $\varphi(u)$, M yüzeyi içinde regüler basit yüzey olsun.
$E = \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle$, $F = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, $G = \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle$ olarak gösterelim. Böylece $U \overset{\text{açık}}{\subset} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olan E, F, G fonksiyonları tanımlanır ve bu fonksiyonlar $EG - F^2 > 0$ ve $\|\varphi_1 \times \varphi_2\| = \sqrt{EG - F^2}$ önermelerini sağlar.

Ör:
$U = \{(q_1, q_2) : q_1, q_2 \in (0, \pi)\}$ $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = (r\sin x_1 \cos x_2, r\sin x_1 \sin x_2, r\cos x_1)$ o.ü $\varphi(u)$ regüler basit yüzeyini göz önüne alalım. $EG - F^2$ fonk bulunuz. $\varphi(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}) = P_0$ o.göre $(EG - F^2)(q_0)$ sayısını hesaplayınız.

$\varphi_1 = (r\cos x_1 \cos x_2, r\cos x_1 \sin x_2, -r\sin x_1)$
$\varphi_2 = (-r\sin x_1 \sin x_2, r\sin x_1 \cos x_2, 0)$
$E = \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = r^2(\cos^2 x_1 \cos^2 x_2 + \cos^2 x_1 \sin^2 x_2 + \sin^2 x_1) = r^2$
$F = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = -r^2 \cos x_1 \cos x_2 \sin x_1 \sin x_2 + r^2 \cos x_1 \cos x_2 \sin x_1 \sin x_2 = 0$
$G = \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = r^2 \sin^2 x_1$ $\qquad EG - F^2 = r^4 \sin^2 x_1$
$q_0 = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ $\quad (EG - F^2)(q_0) = r^4 (\sin \frac{\pi}{6})^2 = \frac{r^4}{4}$

Ör:
$\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri ve h, $\mathbb{R}^3$ uzayında sıfırdan farklı bir vektör olsun. $\varphi: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$: $\varphi(t, \lambda) = \underline{\alpha(t) + \lambda h}$ dönüşümünün regüler olması için gyk. $\forall q_1 \in I$ için $\alpha'(q_1) \times h \neq 0$ old. göst. Silindir yüzeyinin bir noktasından geçen parametre eğrilerini bulunuz.

$\varphi(t, \lambda) = \alpha(t) + \lambda h$ $\qquad \varphi_t = \alpha'(t) \neq 0$; α regüler $\qquad \varphi_\lambda = h \neq 0$
$(\varphi_t \times \varphi_\lambda)(q_1) = \varphi_t(q_1) \times \varphi_\lambda(q_1) = \alpha'(q_1) \times h$ bulunur. φ regüler $\Leftrightarrow \alpha'(q_1) \times h \neq 0$
$q_0 = (a, b)$ noktası için
$h(s) = \varphi(a+s, b) = \alpha(a+s) + bh$ $\quad x_1$ parametre eğrisi
$\delta(s) = \varphi(a, b+s) = \alpha(a) + (b+s)h$ $\quad x_2$ parametre eğrisi

Yüzeyin Teğet Uzayı

M bir regüler uzay o.ü $p \in M$, $v_p \in T_p(\mathbb{R}^3)$ olsun. v_p vektörü M üzerinde bulunan en az bir eğrinin hız vektörü ise v_p vektörüne p noktasında Mye teğet vektör denir. Yüzeyin p noktasındaki teğet vektörlerinin kümesi $T_p(M)$ ile gösterilir.

Yüzeyin parametre eğrilerini göz önüne alırsak, x_1 parametre eğrisinin hız vektörü $q \in U$, $\varphi(q) = p$ noktası için $\varphi_1(q)$ old. biliyoruz. Benzer şekilde hız vektörü $\varphi_2(q)$ olup, $\varphi_1(q), \varphi_2(q) \in T_p(M)$.

! $v_p \in T_p(M)$ ise yukarıdaki tanım gereğince $\beta'(t_0) = v_p$ o.s. en az bir $\beta: J \to M$ eğrisi vardır. Ayrıca $(\beta o h)'(0) = v_p$ o.s. bir $h: I \to J$ parametre dönüşümü vardır. $\alpha: \beta o h: I \to M$ buna göre $v_p \in T_p(M)$ ise $\alpha'(0) = v_p$ o.s. en az bir $\alpha: I \to M$ eğrisi vardır. Tersine M de v_p ye yapışık en az bir eğri varsa, $v_p \in T_p(M)$ dir. Yani M, $\mathbb{R}^3$ de regüler bir yüzey $p \in M$, $v_p \in T_p(\mathbb{R}^3)$ olsun. $v_p \in T_p(M)$ dir $\Leftrightarrow$ $\alpha'(0) = v_p$, $\alpha(0) = p$ o.s. en az bir $\alpha: I \to M$ eğrisi vardır.

Teorem: M, $\mathbb{R}^3$ de regüler bir yüzey olsun. $p \in \varphi(U)$ o.s M de $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyi vardır $q \in U$, $\varphi(q) = p$ ve $v_p \in T_p(\mathbb{R}^3)$ olsun.
$v_p \in T_p(M) \Leftrightarrow v_p \in Sp\{\varphi_1(q), \varphi_2(q)\}$ dur.

Tanım: M, $\mathbb{R}^3$ de regüler bir yüzey, $U \subset \mathbb{R}^2$, $q \in U$ o.ü $\varphi(q) = p$, p noktasını içeren $\varphi(U)$ regüler basit bir yüzey olsun. $T_p(\mathbb{R}^3)$ ün $Sp\{\varphi_1(q), \varphi_2(q)\} = T_p(M)$ 2 boyutlu alt vektör uzayına M regüler yüzeyinin p noktasındaki Teğet uzayı denir.

$Sp\{\varphi_1(q), \varphi_2(q)\}$ alt uzayı geometrik olarak $\varphi_1(q)$ ve $\varphi_2(q)$ nun gerdiği bir düzlem olup M yüzeyinin p noktasındaki $T_p(M)$ teğet uzayı $\varphi_1(q)$ ve $\varphi_2(q)$ vektörlerinin gerdiği bir düzlemdir.

Sonuç: $T_p(M) = Sp\{\varphi_1(q), \varphi_2(q)\}$ ve $\varphi_1(q) \times \varphi_2(q)$ vektörü hem $\varphi_1(q)$ ya hem de $\varphi_2(q)$ ya dik vektör old. teğet düzlemin dik vektörüdür.

Sonuç: φ_{*q} türev dönüşümü, U nun q noktasındaki $T_q(\mathbb{R}^2)$ teğet uzayından $T_p(M)$ uzayına giden bir izomorfizmdir.

Yüzey üzerinde C^∞-sınıfından fonksiyonlar

$f: M \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $p \in M$ olsun. $p \in \varphi(U)$ o.s. M içinde en az bir $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyi için $f o \varphi: U \to \mathbb{R}$ fonk. $\varphi^{-1}(p)$ noktasında C^∞-sınıfından (düzgün, smooth) ise f fonk. p noktasında C^∞-sınıfındandır denir. f fonk. $\forall p \in M$ için C^∞-sınıfından ise, f fonk. M üzerinde C^∞-sınıfındandır denir. Bu fonk. kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$; $(f: M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R})$ ile gösterilir.

Teorem: $f: M \to \mathbb{R}$, $p \in M$ olsun. f fonksiyonu M nin bir p noktasında C^∞-sınıfından ise, $p \in \Upsilon(H)$ o.s. M içinde her $\Upsilon(H)$ regüler basit yüzeyi için $f o \Upsilon: H \to \mathbb{R}$ fonk. $\Upsilon(p)$ noktasında C^∞-sınıfındandır.

Tanım: $\varphi(U)$, M regüler yüzeyi içinde regüler basit yüzey ve $\mathbb{R}^2$ uzayındaki dik koor. fonk. x_1, x_2 o.ü $u_j = x_j \circ \varphi^{-1}$ eşitliği ile tanımlı $u_j : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarına $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyinin koordinat fonksiyonları denir.

$\varphi(q) = p$ ise

$u_1(p) = u_1(\varphi(q)) = (u_1 \circ \varphi)(q) = x_1(q) = q_1$

$u_2(p) = u_2(\varphi(q)) = (u_2 \circ \varphi)(q) = x_2(q) = q_2$ bulunur.

Örn

M merkezi baş. nok. olan r yarıçaplı bir küre yüzeyi olsun.

$U = \{(q_1, q_2) : q_1, q_2 \in (0, \pi)\}$, $\varphi : U \to M$

$\varphi = (r\cos x_1, r\sin x_1 \cos x_2, r\sin x_1 \sin x_2)$

$\varphi(U)$ regüler basit yüzeyi o.ü $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ $f = 3u_1 + u_1u_2$ fonk. $\varphi(U)$ üzerinde C^∞-sınıfından mıdır?

$u_i = x_i \circ \varphi^{-1}$ old. $f = 3(x_1 \circ \varphi^{-1}) + (x_1 \circ \varphi^{-1})(x_2 \circ \varphi^{-1}) = (3x_1 + x_1x_2) \circ \varphi^{-1}$

$\Rightarrow f \circ \varphi = 3x_1 + x_1x_2$ olarak bulunur. $f \circ \varphi$ C^∞-sınıfından old. f fonk. da C^∞-sınıfındandır.

$(f \circ \varphi)(q) = f(p) = 3u_1(p) + u_1(p)u_2(p) = 3q_1 + q_1q_2$ $\quad u_1(p) = q_1 \quad u_2(p) = q_2$

Teorem: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^∞-sınıfından fonksiyon, M, $\mathbb{R}^3$de regüler bir yüzey ise, f fonk. Mye kısıtlanmışı da M de C^∞-sınıfından bir fonk.dur.

Örn

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi : (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$ o.ü $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f = y_1^2 y_3 + y_2$ fonk. $\varphi(\mathbb{R}^2) = M$ ye kısıtlanmışının M üstünde düzgün (C^∞-sınıfından) old. gösteriniz.

$\forall p \in M$ için $(f|M)(p) = f(p)$ old. biliyoruz. $\forall q \in \mathbb{R}^2$ için

$(f|M \circ \varphi)(q) = f|M(\varphi(q)) = f(\varphi(q)) = (f \circ \varphi)(q)$ old. $(f|M \circ \varphi) = f \circ \varphi$ dir.

$\varphi(q) = (q_1, q_2, q_1^2 + q_2^2)$ $\quad (f \circ \varphi)(q) = f(\varphi(q)) = f(q_1, q_2, q_1^2 + q_2^2)$

$= q_1^2(q_1^2 + q_2^2) + q_2 \overset{\text{dkf}}{\Rightarrow} x_1^2(x_1^2 + x_2^2) + x_2$

$= f \circ \varphi$ C^∞-sınıfındandır.

$f|M \circ \varphi$ $C^\infty \Rightarrow f|M$ C^∞-sınıfındandır.

Yüzey Üstünde Yöne Göre Türev

M regüler bir yüzey ise $p \in M$ için $p \in \varphi(W)$ o.ş. bir regüler basit yüzey vardır. $\varphi_{*q} : T_q(\mathbb{R}^2) \to T_p(M)$ lineer izomorfizm old. $u_p \in T_p(M)$ verildiğinde $\varphi_*(h_q) = u_p$ o.ş. bir ve yalnız bir $h_q \in T_q(\mathbb{R}^2)$ vektörü vardır.

Tanım: M, $\mathbb{R}^3$de regüler yüzey, $p \in M$, $u_p \in T_p(M)$ olsun. Mde $p \in \varphi(U)$ regüler basit yüzeyi için $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonk. u_p yönündeki türevi $u_p[f] = h_q[f \circ \varphi]$ olarak tanımlanır. Burada $h_q = \varphi^{-1}_{*q}(u_p)$ dir.

Teorem: M, $\mathbb{R}^3$de regüler bir yüzey $v_p \in T_p(M)$, $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ olsun. $\alpha: I \to M$ eğrisi, $\alpha'(0) = v_p$ o.s. bir eğri ise $v_p[f] = (f \circ \alpha)'(0)$ dır.

Sonuç: $v_p \in T_p(M)$, $\bar{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ ise $v_p[\bar{f}|_M] = v_p[\bar{f}]$ dir.

Teorem: $a,b \in \mathbb{R}$, $v_p, w_p \in T_p(M)$, $C^\infty(p)$; Mnin p noktasını içeren bir açık komşuluğundan $\mathbb{R}$ye giden C^∞-sınıfından fonk. kümesini göstermek üzere $f,g \in C^\infty(p)$ için aş. önermeler doğrudur.

$v_p: C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ fonk

a-) $(av_p + bw_p)[f] = av_p[f] + bw_p[f]$

b-) $v_p[af+bg] = av_p[f] + bv_p[g]$ lineerlik

c-) $v_p[f.g] = v_p[f]g(p) + f(p)v_p[g]$ Leibniz

Tanım: $\varphi(U)$, M içinde p noktasını içeren regüler basit yüzey ve u_1, u_2 $\varphi(U)$nun lokal koor. fonk. olsun. $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için $\frac{\partial f}{\partial u_i}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}(q)$ ile tanımlanan $\frac{\partial f}{\partial u_i}(p)$ sayısına f fonk. p noktasındaki i. değişkenine göre kısmi türevi denir. Burada $x_i$ler $\mathbb{R}^3$ uzayındaki i. dik koor. fonksiyonlarıdır.

Sonuç: $p \in M$, $v_p \in T_p(M)$, $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ olsun. $(\partial_j(p))[f] = \frac{\partial f}{\partial u_j}(p)$ dir.

- $\varphi(U)$, Mde p noktasını içeren regüler basit bir yüzey, $v_p \in T_p(M)$ olsun.
$v_p = \sum_{i=1}^{2} \lambda_j \partial_j(p)$ ise $v_p[f] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f}{\partial u_j}(p)$ dir.

Ör: $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = (x_1, x_2^2, x_1^2 + x_2^3)$, $\varphi(\mathbb{R}^2) = M$ yüzeyi verilsin. $q = (2,1)$ ve $h_q = (3,4) \in T_p(\mathbb{R}^2)$ olsun. $f: M \to \mathbb{R}$, $f = y_1^2 y_2 (y_3 - y_1^2)$ fonk.nun $p = \varphi(q)$ noktasındaki $v_p = \varphi_*(h_q) \in T_p(M)$ teğet vektörü yönündeki türevi?

$v_p[f] = h_q[f \circ \varphi]$ kullanarak bulalım.

$(f \circ \varphi)(q) = (f \circ \varphi)(q_1, q_2) = f(\varphi(q_1,q_2)) = f(q_1, q_2^2, q_1^2 + q_2^3)$

$= q_1^2 q_2^2 (q_1^2 + q_2^3 - q_1^2) = q_1^2 q_2^5$

dik koor. fonk.

$\Rightarrow (f \circ \varphi) = x_1^2 x_2^5$ bulunur. $v_p[f] = h_q(f \circ \varphi) = 3 . \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_1}\Big|_q + 4 \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_2}\Big|_q$

$= 3.(2x_1x_2)_q + 4.(5x_1^2x_2^4)_q = 3.(2.2.1) + 4.(5.2^2.1) = 92$

Ör:
M merkezi başlangıç noktasında bulunan r yarıçaplı bir küre $U: \{(q_1,q_2): q_1,q_2 \in (0,\pi)\}$
$\varphi: U \to M$ $\varphi = (r\sin x_1 \cos x_2, r\sin x_1 \sin x_2, r\cos x_1)$ o.ü $\varphi(U)$ regüler basit bir yüzey.
$P = \varphi(\pi/6, \pi/3)$ $v_p = 2\partial_1(p) + \partial_2(p)$ ve $f = 3u_1 + u_1u_2$ o.g. $v_p[f] = ?$

$v_p[f] = (2\partial_1(p) + \partial_2(p))[f] = 2\partial_1(p)[f] + \partial_2(p)[f] = 2\frac{\partial f}{\partial u_1}\Big|_p + \frac{\partial f}{\partial u_2}\Big|_p = 2(3+u_2)_p + (u_1)_p$

$u_1(p) = x_1(\varphi^{-1}(p)) = \frac{\pi}{6}$ $\quad u_2(p) = x_2(\varphi^{-1}(p)) = x_2(p) = \frac{\pi}{3}$ $\quad = 6 + \frac{5\pi}{6}$

Yüzey Üstünde Vektör Alanı

Yüzeyin her bir p noktasına $T_p(\mathbb{R}^3)$ uzayının bir vektörünü karşılık getiren fonksiyona yüzeyin vektör alanı denir. Yani M, $\mathbb{R}^3$de bir yüzey o.ü $V: M \to \bigcup_{p\in M} T_p(\mathbb{R}^3)$. $V(p) \in T_p(\mathbb{R}^3)$ olarak tanımlanan V fonk. M de vektör alanı denir. $V(p)$ ya da V_p ile göst. $\forall p \in M$ için $V_p \in T_p(M)$ ise Vye M üstünde teğet vektör alanı. $\forall p \in M$ için V_p vektörü $T_p(M)$ uzayına dikse Vye M üstünde dik (normal) vektör alanı denir. V, M üstünde bir vektör alanı ise, $p \in M$ için $V(p) = V_p = \sum_{i=1}^{3} V_i(p) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p$ olarak yazılır. Burada $V_i: M \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarıdır. $i \in \{1,2,3\}$ için $V_i \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ise Vye M üzerinde C^∞-sınıfından vektör alanı (düzgün vektör alanı) denir. M üzerinde bütün C^∞-sınıfından vektör alanlarının kümesi $X_M(\mathbb{R}^3)$ ile gösterilir. $V \in X_M(\mathbb{R}^3)$ ise $V_p \in T_p(\mathbb{R}^3)$ demektir. M üzerinde bütün C^∞-sınıfından teğet vektör alanlarının kümesi $X(M)$ ile gösterilir. $V \in X(M)$ ise $V_p \in T_p(M)$ dir. Yüzeyin normal (dik) vektör alanlarının kümesi $X(M)^\perp$ olarak göst. $V \in X(M)^\perp$.

M, $\mathbb{R}^3$ uzayında regüler bir yüzey, $\varphi(U)$ M de regüler basit bir yüzey olsun. $\forall p \in \varphi(U)$ için $\partial_j(p) \in T_p(M)$, $(1 \le j \le 2)$ old. ∂_j $\varphi(U)$ üstünde teğet vektör alanı olup, M yüzeyinin lokal koor. vektör alanı adını alır.

Sonuç: V, $\mathbb{R}^3$ üstünde diferansiyellenebilir bir vektör alanı ise, V vektör alanının Mye kısıtlanmışı da M üstünde diferansiyellenebilir vektör alanıdır. Yani, $V \in X(\mathbb{R}^3)$ ise $V|_M \in X_M(\mathbb{R}^3)$ dür.

Örn

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$ olsun. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki dik koor. fonk. y_1, y_2, y_3 o.ü $\bar{V} = y_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_1 y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ vektör alanının $\varphi(\mathbb{R}^2)$ye kısıtlanmışı olan V vektör alanını $\varphi(\mathbb{R}^2)$ deki koor. fonk. bağlı olarak ifade ediniz.

$q \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(q) = p$ o.ü $\varphi: (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$ $q = (q_1, q_2)$

$\varphi(q) = (q_1, q_2, q_1^2 + q_2^2) = p$ $p_1 = q_1$ $p_2 = q_2$ $p_3 = q_1^2 + q_2^2 = p_1^2 + p_2^2$ dir.

$\bar{V} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \bar{V}|_{\varphi(\mathbb{R}^2)} = V$

$V(p) = p_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p + p_3 \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p + p_1 p_2 \frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_p = q_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p + (q_1^2 + q_2^2) \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p + q_1 q_2 \frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_p$

$\varphi(\mathbb{R}^2)$ üstünde lokal koor. fonk. U_1 ve U_2 olup $U_1(p) = q_1$, $U_2(p) = q_2$ old. yerine yazılırsa

$V(p) = U_1^2(p) \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p + (U_1^2 + U_2^2)(p) \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p + U_1(p) U_2(p) \frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_p$

$= \left(U_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1} + (U_1^2 + U_2^2) \frac{\partial}{\partial y_2} + U_1 U_2 \frac{\partial}{\partial y_3} \right)(p)$

$\overset{\forall p}{\Rightarrow} V = U_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1} + (U_1^2 + U_2^2) \frac{\partial}{\partial y_2} + U_1 U_2 \frac{\partial}{\partial y_3}$ C^∞-sınıfından old. V C^∞-sın. bir vektör alanıdır.

Örn

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = (x_1, x_2, x_1^2 x_2)$ o.ü $\varphi(\mathbb{R}^2) = M$ yüzeyi verilsin.

$V = (x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial y_1} + x_1^2 x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + (x_1^4 x_2 + 2x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2) \frac{\partial}{\partial y_3}$ vektör alanının bir teğet vektör alanı old. göst.

$V(p) \in T_p(M)$ $V \in \mathcal{X}(M)$ $p \in M$ $V \in Sp\{e_1, e_2\}$ old. görmeliyiz $\partial_i(p) = \varphi_i(q)$

$e_1 = (1, 0, 2x_1 x_2)$ $e_2 = (0, 1, x_1^2)$ olup $V = a e_1 + b e_2$ o.ş. a ve b fonk. bulmalıyız. $(x_1 + x_2, x_1^2 x_2, x_1^4 x_2 + 2x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2) = a(1, 0, 2x_1 x_2) + b(0, 1, x_1^2)$

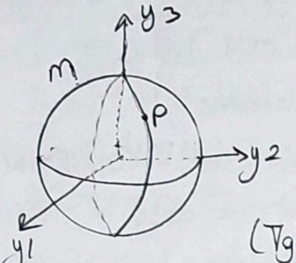
$a = x_1 + x_2$ $b = x_1^2 x_2$ $2x_1 x_2 . a + x_1^2 . b = x_1^4 x_2 + 2x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2$ bulunur.

$V = (x_1 + x_2) e_1 + (x_1^2 x_2) e_2 \Rightarrow V \in \mathcal{X}(M)$ old. gösterir. Yani teğet vektör alanıdır.

Teorem: H, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir açık alt kümesi o.ü c sayısı $g: H \to \mathbb{R}$ fonk.nun regüler değeri olsun. O zaman $\nabla g = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}$ gradiyent vektör alanının $g^{-1}\{c\}$ yüzeyine kısıtlanmışı $g^{-1}\{c\}$ yüzeyinin dik (normal) vektör alanıdır. $g^{-1}\{c\} = M$ ise, ∇g gradiyent vektör alanı M nin her noktasında sıfırdan farklıdır.

Ör:

$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = r^2$ denklemiyle verilen küre yüzeyinin bir p noktasındaki $(\nabla g)_p$ vektörünü bulunuz.



$p \in M$ $g^{-1}\{r^2\} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = r^2$ $(\nabla g)_p = (2y_1)_p \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p + (2y_2)_p \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p + (2y_3)_p \frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_p$

$\Rightarrow (\nabla g)_p = 2\left(p_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p + p_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p + p_3 \frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_p\right)$ olarak bulunur.

$(\nabla g)_p$ vektörü $T_0(\mathbb{R}^3)$ uzayındaki p vektörünün 2 katının küre yüzeyi üzerindeki p noktasına bağlanmış şeklidir.

Tanım: $\forall p \in \mathbb{R}^n$ için, p noktasına p nin belirttiği $\mathcal{U}_p$ teğet vektörünü karşılık getiren vektör alanına $\mathbb{R}^n$ uzayı üstünde yer vektör alanı denir.
Örneğin $\mathbb{R}^2$ de yer vektör alanı $\mathcal{U}$ olsun. $p = (2,1)$ için $\mathcal{U}(p) = (2,1)_p$ dir.

Tanım: $\varphi(U)$, M de regüler basit yüzey olsun X, U üstünde bir vektör alanı o.ü $p \in \varphi(U)$ için, $\varphi(q) = p$, $q \in U$; $(\varphi_*(X))(p) = \varphi_{*q}(X_q)$ ile tanımlı $\varphi_*(X)$ vektör alanına X vektör alanının φ dönüşümündeki görüntüsü denir.

Sonuç: $\varphi(U)$, M de regüler basit yüzey old. göre $\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \partial_j$ dir

Tanım: $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $V \in \mathcal{X}(M)$ o.ü $p \in M$ için $(V[f])(p) = V_p[f]$ eşitliği ile tanımlanan $V[f]: M \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonk.nun V vektör alanı yönünde türevi denir.

Teorem: $V, W \in \mathcal{X}(M)$ olsun. $a, b \in \mathbb{R}$ $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için aş. önermeler doğru.

a-) $(fV + gW)[h] = fV[h] + gW[h]$

b-) $V[af + bg] = aV[f] + bV[g]$

c-) $V[f.g] = V[f]g + fV[g]$

Sonuç: $\varphi(U)$, Mde regüler basit bir yüzey olsun. $J\in\{1,2\}$ için
$\partial_J[f]=\dfrac{\partial f}{\partial u_J}$

Teorem: $\varphi(U)$, M de regüler basit yüzey o.ü $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$, $V\in\chi(M)$ o.ü
$V=\sum_{i=1}^{2}V_i\dfrac{\partial}{\partial u_i}$ ise $V[f]=\sum_{i=1}^{2}V_i\dfrac{\partial f}{\partial u_i}$ dir

Yüzey Üzerinde Kovaryant Türev

M, $\mathbb{R}^3$ uzayında regüler bir yüzey W, M üstünde dif bir vektör alanı olsun. y_1,y_2,y_3 $\mathbb{R}^3$ uzayının dik koor. fonk. o.ü $W=\sum_{i=1}^{3}W_i\dfrac{\partial}{\partial y_i}\in\chi_M(\mathbb{R}^3)$ olarak yazılabilir. $p\in M$, $V_p\in T_p(M)$ $(V\in\chi(M))$ $D_{V_p}W=\sum_{i=1}^{3}V_p[W_i]\dfrac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p=$ $(V_p[W_1],V_p[W_2],V_p[W_3])$ olarak tanımlanan $D_{V_p}W$ vektörüne W vektör alanının V_p teğet vektörü yönündeki kovaryant türevi denir. $D_{V_p}W$ vektörü yüzeye teğet olmak zorunda değil. Yani $D_{V_p}W\in T_p(M)$ yazılımı doğru değildir. $D_{V_p}W\in T_p(\mathbb{R}^3)$ dür.

$D: T_p(M)\times\chi_M(\mathbb{R}^3)\to T_p(\mathbb{R}^3)$
$\quad (V_p,W)\to D(V_p,W)=D_{V_p}W\in T_p\mathbb{R}^3$ olarak tanımlanır.

Teorem: M, $\mathbb{R}^3$ uzayında regüler bir yüzey, $p\in M$ ve $V_p\in T_p(M)$ o.ü Mde $\alpha'(0)=V_p$ o.s. her $\alpha: I\to M$ eğrisi için $W\in\chi_M(\mathbb{R}^3)$, $D_{V_p}W=(W\circ\alpha)'(0)$ eşitliği sağlanır.

Teorem: M, $\mathbb{R}^3$de bir yüzey $a,b\in\mathbb{R}$, $V_p,X_p\in T_p(M)$ $W,Z\in\chi_M(\mathbb{R}^3)$ o.ü aş. önermeler doğrudur.

a-) $D_{aV_p+bX_p}W=aD_{V_p}W+bD_{X_p}W$ b-) $D_{V_p}(aW+bZ)=aD_{V_p}W+bD_{V_p}Z$

c-) $f\in C(\mathbb{R}_p)$ için $D_{V_p}fW=V_p[f]W(p)+f(p)D_{V_p}W$

d-) $V_p[\langle W,Z\rangle]=\langle D_{V_p}W,Z(p)\rangle+\langle W(p),D_{V_p}Z(p)\rangle$

Tanım: W, M regüler yüzeyi üstünde bir vektör alanı V, M üstünde bir teğet vektör alanı olsun. $\forall p\in M$ için $(D_VW)(p)=D_{V(p)}W$ olarak tanımlanan D_VW vektör alanına W vektör alanının V vektör alanı yönündeki kovaryant türevi denir.

Sonuç: $W\in\chi_M(\mathbb{R}^3)$ ise, $D_VW=\sum_{i=1}^{3}V[W_i]\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ $V\in\chi_M$ dir.

Teorem: $a,b\in\mathbb{R}$, $V,X\in\mathcal{X}(M)$, $W,Z\in\mathcal{X}_M(\mathbb{R}^3)$, $f\in C^\infty(p)$ o.ü aş. önermeler doğrudur.

a-) $D_{aV+bX}W = aD_VW + bD_XW$

b-) $D_V(aW+bZ) = aD_VW + bD_VZ$

c-) $D_V(fW) = V[f]W + f.D_VW$

d-) $V[\langle W,Z\rangle] = \langle D_VW, Z\rangle + \langle W, D_VZ\rangle$

Sonuç: 1-) $W\in\mathcal{X}_M(\mathbb{R}^3)$, $W=\sum_{i=1}^{3} w_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ ise $D_{\partial_j}W = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial w_i}{\partial u_j}\frac{\partial}{\partial y_i}$ dır

2-) $D_{\partial_j(p)}W = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(w_i\circ e)}{\partial x_i}\Big|_q \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p$ dır

Tanım: $e(U)$, Mde regüler basit yüzey olsun. $\forall q\in U$ noktasına $e(q)$ noktasında $T_P(\mathbb{R}^3)$ uzayının bir elemanını karşılık getiren V fonksiyonuna e dönüşümü üstünde bir vektör alanı ise $q\in U$ için $V(q)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(q)\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p$, $\lambda_i: U\to\mathbb{R}$ olup λ_i ler C^∞ sınıfındansa, V vektör alanına $e(U)$ üstünde C^∞-sınıfındandır denir. $p=e(q)$. Böylece W, M üstünde bir vektör alanı dır. Buradan $e_i = e_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ $(1\le i\le 2)$ olarak tanımlanan e_i fonksiyonu e dönüşümü üstünde bir vektör alanıdır.

Tanım: W, $e(U)$ üstünde bir vektör alanı $W=\sum_{i=1}^{3} w_i\frac{\partial}{\partial y_i}$ o.ü;
$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(w_i\circ e)}{\partial x_j}(q)\frac{\partial}{\partial y_i}(p)$ vektörüne $W\circ e$ vektör alanının, e boyunca j değişkenine göre q noktasındaki kısmi türevi denir. $(W\circ e)_j(q)$ veya $\frac{\partial(W\circ e)}{\partial x_j}(q)$ olarak gösterilir. Yani;

$$(W\circ e)_j(q) = \frac{\partial(W\circ e)}{\partial x_j}(q) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(w_i\circ e)}{\partial x_j}(q)\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p \text{ dır.}$$

Sonuç: $W=\sum_{i=1}^{3} w_i\frac{\partial}{\partial y_i}\in\mathcal{X}_M(\mathbb{R}^3)$ için $D_{\partial_j(p)}W = (W\circ e)_j(q)$ dur.

Sonuç: $(W\circ e)_j(q)$ vektörü, W vektör alanının x_j parametre eğrisi boyunca $e(q)$ noktasındaki türevidir.

Ö: $e:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $e:(x_1,x_2,x_1^2+x_2^2)$ olsun. $\overline{W}=(y_1-y_2)\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2y_3\frac{\partial}{\partial y_2}-y_1^2\frac{\partial}{\partial y_3}$ vektör alanının $e(\mathbb{R}^2)$ regüler basit yüzeyine kısıtlanmışı W ve $p=e(1,2)$ o.ü
a-) $D_{\partial_1(p)}W$ ve $D_{\partial_2(p)}W$ vektörlerini bulunuz.

$e(q)=p \Rightarrow (p_1,p_2,p_3)=(q_1,q_2,q_1^2+q_2^2)$ $\overline{W}\big|_{e(\mathbb{R}^2)}=W$; $p_1=q_1$; $p_2=q_2$, $p_3=q_1^2+q_2^2$

$$W(p) = \underbrace{(y_1(p)-y_2(p))}_{p_1-p_2}\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p + \underbrace{(y_2(p)y_3(p))}_{p_2p_3}\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p - \underbrace{y_1(p)^2}_{p_1^2}\frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_p$$

$$=(q_1-q_2)\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p + q_2(q_1^2+q_2^2)\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p - q_1^2\frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_p$$

$e(\mathbb{R}^2)$ üzerinde koor. fonkları U_1,U_2 olup $U_1(p)=q_1$ $U_2(p)=q_2$ old. hatırlanırsa;

$$= (u_1-u_2)(p)\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p + [u_2(u_1^2+u_2^2)](p)\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p - u_1^2(p)\frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_p$$

$$\Rightarrow W = \underbrace{(u_1-u_2)}_{w_1}\frac{\partial}{\partial y_1} + \underbrace{u_2(u_1^2+u_2^2)}_{w_2}\frac{\partial}{\partial y_2} - \underbrace{u_1^2}_{w_3}\frac{\partial}{\partial y_3} = (u_1-u_2,\ u_2(u_1^2+u_2^2),\ -u_1^2)$$

$$D_{\partial_1(p)}W = \sum_{i=1}^{3}\partial_1(p)[w_i]\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p = \frac{\partial w_1}{\partial u_1}\Big|_p\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p + \frac{\partial w_2}{\partial u_1}\Big|_p\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p + \frac{\partial w_3}{\partial u_1}\Big|_p\frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_p$$

$$D_{\partial_1(p)}W = (1,\ (2u_1u_2)_p,\ (-2u_1)_p) = (1,4,-2)$$

$$D_{\partial_2(p)}W = \sum_{i=1}^{3}\partial_2(p)[w_i]\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p = (-1,\ \underbrace{u_1^2+3u_2^2}_{q_1^2+3q_2^2},\ 0)_p = (-1,13,0)$$

b-) $v_p = 3\partial_1(p) + \partial_2(p)$ $\quad D_{v_p}W = ?$

$$D_{v_p}W = D_{3\partial_1(p)+\partial_2(p)}W = 3D_{\partial_1(p)}W + D_{\partial_2(p)}W \qquad D_{av_p+bu_p}W = aD_{v_p}W + bD_{u_p}W$$

$$= 3(1,4,-2) + (-1,13,0) = (2,25,-6)$$

a-) 2. yol

$$W = \bar{W}|_M = \overbrace{(y_1-y_2)}^{w_1}|_M\frac{\partial}{\partial y_1} + \overbrace{(y_2y_3)}^{w_2}|_M\frac{\partial}{\partial y_2} + \overbrace{(-y_1^2)}^{w_3}|_M\frac{\partial}{\partial y_3}$$

$$W = \sum_{i=1}^{3} w_i\frac{\partial}{\partial y_i} \Rightarrow D_{\partial_j}W = \sum_{i=1}^{3}\partial_j[w_i]\frac{\partial}{\partial y_i} \qquad D_{\partial_j(p)}W = \sum_{i=1}^{3}\partial_j(p)[w_i]\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p$$

$\frac{\partial w_i}{\partial u_j}(p) = \frac{\partial(w_i\circ\varphi)}{\partial x_j}(q)$ old. hatırlanırsa,

$w_1\circ\varphi = (y_1-y_2)|_M \circ (x_1, x_2, x_1^2+x_2^2) = x_1 - x_2$

$w_2\circ\varphi = (y_2y_3)|_M \circ (x_1, x_2, x_1^2+x_2^2) = x_2(x_1^2+x_2^2)$

$w_3\circ\varphi = (-y_1^2)|_M \circ (x_1, x_2, x_1^2+x_2^2) = -x_1^2$ old.

$\frac{\partial w_1}{\partial u_1}(p) = 1 \quad \frac{\partial w_2}{\partial u_1}(p) = (2x_1x_2)_q = 4 \quad \frac{\partial w_3}{\partial u_1}(p) = (-2x_1)_q = -2$

$D_{\partial_1(p)}W = (1,4,-2)$ elde edilir. Benzer şekilde;

$\frac{\partial w_1}{\partial u_2}(p) = -1 \quad \frac{\partial w_2}{\partial u_2}(p) = [(x_1^2+x_2^2) + 2x_2^2]_q = 13 \quad \frac{\partial w_3}{\partial u_2}(p) = 0$

$D_{\partial_2(p)}W = (-1,13,0)$ bulunur.

b-) 2. yol | $D_{v_p}W$ tanımından $\alpha(t)=\varphi(\overset{(1,2)}{q}+t(3,1))$ eğrisi yüzey içinde bir eğridir. $\alpha(0)=P$, $\alpha'(0)=v_p$ $D_{v_p}W=(W\circ\alpha)'(0)$ dır.

$\alpha(t)=\varphi(1+3t,2+t)=(1+3t,2+t,(1+3t)^2+(2+t)^2) \Rightarrow \alpha(t)=(1+3t,2+t,5+10t+10t^2)$

$(W\circ\alpha)(t)=(\overline{W}\circ\alpha)(t)=\overline{W}(\alpha(t))$

$$=(2t-1)\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{\alpha(t)}+(10+25t+30t^2+10t^3)\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{\alpha(t)}-(1+6t+9t^2)\frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_{\alpha(t)}$$

$$(W\circ\alpha)'(t)=2\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{\alpha(t)}+(25+60t+30t^2)\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{\alpha(t)}-(6+18t)\frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_{\alpha(t)}$$

$$(W\circ\alpha)'(0)=2\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{\alpha(0)=P}+25\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{P}-6\frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_{P}=(2,25,-6)$$

II. Bölüm: Yüzeyin Eğrilikleri

Yüzeyin Yönlendirilmesi

n boyutlu bir V vektör uzayının iki bazı $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ ve $T=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ o.ü. $u_j=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}v_i$ ile tanımlı $P=[P_{ij}]_{n\times n}$ matrisi T bazından S bazına geçiş matrisi ve $v_j=\sum_{i=1}^{n}q_{ij}u_i$ ile tanımlı S bazından T bazına geçiş matrisi $Q=[q_{ij}]_{n\times n}$ o.ü. $P.Q=I_n$ old. biliyoruz. Ayrıca $\det(u_1,u_2,\dots,u_n)=\det(P).\det(v_1,v_2,\dots,v_n)$ dir.

Tanım: $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının iki bazı $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ ve $T=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ o.ü. $P: T\to S$ geçiş matrisinin determinantı sıfırdan büyükse $\det P>0$, T bazının yönü S bazının yönüne eşittir. T ve S bazlarının yönü aynı olması durumunda $T\simeq S$ ile gösterilirse bu bağıntı $\mathbb{R}^n$de bir denklik bağıntısı tanımlar.

T bazında iki vektör yer değiştirdiğinde P matrisinde iki sütun yer değiştirir ve bu işlem $\det(P)$ nin işaret değiştirmesine neden olur. Bu nedenle "$\simeq$" bağıntısının 2 denklik sınıfı vardır. Bu denklik sınıflarından birini seçip o denklik sınıfına "pozitif yön" bu denklik sınıfındaki her baza "pozitif yönlü baz" diyebiliriz. Diğer denklik sınıfına "negatif yön" adını verip her bir elemanına da "negatif yönlü bir baz" adını vereceğiz.

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayında doğal bazın denklik sınıfı pozitif yön olarak seçildiğinde $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ bazından $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ bazına geçiş matrisi P ise $\det(u_1,u_2,\dots,u_n)=\det(P).\underbrace{\det(e_1,e_2,\dots,e_n)}_{1}$

$\det(u_1,u_2,\dots,u_n)=\det(P)$ bulunur.

Buradan $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ bazının pozitif yönlü bir baz olması için $\det(u_1,u_2,\dots,u_n)>0$ olması gerek ve yeterlidir.

$\mathbb{R}^2$'de $S=\{(2,1),(-1,0)\}$ olarak verilen S bazının yönünü belirtiniz.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$ doğal bazla (poz. yön) aynı yönde old. pozitif yönlüdür.

$T_q(\mathbb{R}^2)$ uzayı $\mathbb{R}^2$ uzayına izomorf old. $T_q(\mathbb{R}^2)$ uzayının pozitif yönü de $\mathbb{R}^2$ uzayındaki gibi tanımlanır. Böylece $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_q , \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_q \right\}$ bazının denklik sınıfının yönü $T_q(\mathbb{R}^2)$ uzayının pozitif yönüdür. $\varphi(U)$, M yüzeyinde bir regüler basit yüzey ve $q\in U$, $\varphi(q)=p$ o.ü $\partial_j(p)=\varphi_j(q)=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_q\right)$ $(1\le j\le 2)$ ve $\{\partial_1(p),\partial_2(p)\}$ $T_p(M)$'nin bir bazı old. $\{\partial_1(p),\partial_2(p)\}$ bazının denklik sınıfını $T_p(M)$ uzayının pozitif yönü olarak alacağız. Böylece $\forall p\in\varphi(U)$ için p noktasındaki teğet düzlem yönlendirilmiş olur. Buradan da $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyinin her bir noktasında $\{\partial_1(p),\partial_2(p),Z(p)\}$ kümesi $T_p(\mathbb{R}^3)$ uzayının pozitif yönlü bir bazı o.ş. $\varphi(U)$ üzerinde birim dik vektör alanı tek olarak belirlidir. $Z=\frac{\partial_1\times\partial_2}{\|\partial_1\times\partial_2\|}$ olup $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyinin pozitif yönlü birim dik vektör alanı adını alır. Z, pozitif yönlü birim dik vektör alanı ise, $\{\partial_1(p),\partial_2(p),-Z(p)\}$ $T_p(\mathbb{R}^3)$ uzayının negatif yönlü bir bazı olur ve $-Z$, $\varphi(U)$'nun negatif yönlü birim dik vektör alanıdır.

$\varphi(q)=p$ $p\in\varphi(U)$ ise

$$Z(\varphi(q)) = \frac{\partial_1(\varphi(q))\times\partial_2(\varphi(q))}{\|\partial_1(\varphi(q))\times\partial_2(\varphi(q))\|} = \frac{\varphi_1(q)\times\varphi_2(q)}{\|\varphi_1(q)\times\varphi_2(q)\|} = \frac{\varphi_1\times\varphi_2}{\|\varphi_1\times\varphi_2\|}(q)$$

$$\Rightarrow (Z\circ\varphi)(q)=\frac{\varphi_1\times\varphi_2}{\|\varphi_1\times\varphi_2\|}(q) \overset{\forall q}{\Rightarrow} (Z\circ\varphi)=\frac{\varphi_1\times\varphi_2}{\|\varphi_1\times\varphi_2\|} \text{ dir.}$$

$p\in M$ noktasını içeren $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyinden elde edilen pozitif yönlü bir $Z(p)$ birim dik vektörü vardır. p noktasını içeren başka bir $\psi(H)$ regüler basit yüzeyine göre de bir $\psi(p)$ birim dik vektörü vardır. Bu vektörler birbirleri ile ilişkilidir. $Z(p)=\psi(p)$ $-Z(p)=\psi(p)$ şeklinde

(10.04.2025 2. Ders)

Tanım: M regüler yüzeyinin regüler basit yüzeylerden oluşan örtüsü, bu regüler basit yüzeylerin pozitif yönlü birim dik vektör alanları, regüler basit yüzeylerin ortak noktalarında çakışacak şekilde bulunabiliyorsa M'ye yönlendirilebilir yüzey denir.

M regüler yüzeyinin regüler basit yüzeylerden oluşan örtüsünden $\varphi(U)\cap\psi(W)\neq\emptyset$ o.s. iki regüler basit yüzeyin pozitif yönlü birim dik vektör alanları ortak noktalarında çakışır $\Leftrightarrow$ $\varphi(U)$ nun $\{\partial_1,\partial_2\}$ çatı alanı ile $\psi(H)$ nin $\{\bar{\partial}_1,\bar{\partial}_2\}$ çatı alanı ortak noktalarında aynı yönlüdür.

M yönbilir bir yüzey ise M yüzeyinin regüler basit yüzeylerden oluşan ve aynı yönlü bazlara sahip olan bir örtüsü bulunabilir. Bu örtü, M yüzeyinin tamamında tanımlı olan C^∞ sınıfından Z birim dik vektör alanını belirler. Bu Z birim dik vektör alanına örtünün pozitif yönlü birim dik vektör alanı denir.

$M=g^{-1}\{c\}$ olsun. Bu durumda g fonk. gradiyent vektör alanının M yüzeyine kısıtlanmışı M yüzeyine dik old. ispatlamıştık. $\nabla g|_M$, M yüzeyine dik old. $\left(\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}\right)\Big|_M$ vektör alanı da M yüzeyine dik olup birim uzunluktadır. $M=g^{-1}\{c\}$ ise, $\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$ vektör alanının M'ye kısıtlanmışını M yüzeyinin pozitif yönlü birim dik vektör alanı olarak seçeceğiz. $Z=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$, $u_p,w_p\in T_p(M)$ için $\{u_p,w_p,Z(p)\}$ kümesi $T_p(\mathbb{R}^3)$ uzayının bir pozitif yönlü bazı ise $\{u_p,w_p\}$ $T_p(M)$ in pozitif yönlü bir bazıdır.

Ör: $\mathbb{R}^3$ uzayında $M: y_1^2+y_2^2+y_3^2=r^2$ denklemiyle küre yüzeyi ile verilsin. $\varphi: U\to\mathbb{R}^3$; $\varphi=(r\sin x_1\cos x_2, r\sin x_1\sin x_2, r\cos x_1)$ o.ü. $U=\{(q_1,q_2): q_1,q_2\in(0,\pi)\}$
M regüler yüzeyinin $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyi olsun.

a-) $\varphi(U)$ nun Z pozitif yönlü birim dik vektör alanını bulunuz.
b-) $M=g^{-1}\{r^2\}$ alınarak M nin ∇g gradiyent vektör alanından elde edilen birim dik vektör alanı $\tilde{Z}$ yı bulunuz. Z ve $\tilde{Z}$ yı karşılaştırınız.

a-) $\partial_1=\varphi_1\circ\varphi^{-1}=(r\cos x_1\cos x_2, r\cos x_1\sin x_2, -r\sin x_1)\circ\varphi^{-1}$

$=(r\underbrace{\cos x_1\circ\varphi^{-1}}_{u_1}\cdot\underbrace{\cos x_2\circ\varphi^{-1}}_{u_2}, r\cos\underbrace{x_1\circ\varphi^{-1}}_{u_1}\cdot\sin\underbrace{x_2\circ\varphi^{-1}}_{u_2}, -r\sin\underbrace{x_1\circ\varphi^{-1}}_{u_1})$

$\partial_1=(r\cos u_1\cos u_2, r\cos u_1\sin u_2, -r\sin u_1)$

$\partial_2=\varphi_2\circ\varphi^{-1}=(-r\sin u_1\sin u_2, r\sin u_1\cos u_2, 0)$

$\partial_1\times\partial_2=r^2\sin u_1(\sin u_1\cos u_2, \sin u_1\sin u_2, \cos u_1)$ $\|\partial_1\times\partial_2\|=r^2\sin u_1$

$Z=\frac{\partial_1\times\partial_2}{\|\partial_1\times\partial_2\|}=(\sin u_1\cos u_2, \sin u_1\sin u_2, \cos u_1)$

b-) $g^{-1}\{r^2\}=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ $\nabla g=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial}{\partial y_i}$ $\nabla g=(2y_1,2y_2,2y_3)$

$\|\nabla g\|=2\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$

$\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}(y_1,y_2,y_3)$ $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ açık kümesi üzerinde her noktada birim uzunlukta olan bir vektör alanıdır.

$\left(\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}\right)\Big|_M$ M yüzeyi üzerinde birim dik vektör alanıdır.

$\tilde{Z}=\left(\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}\right)\Big|_M \Rightarrow \sqrt{\underbrace{y_1^2+y_2^2+y_3^2}_{r^2}}=r$

Arkada $\Rightarrow$

$\tilde{Z}=\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{(y_i)}{r}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\Big|_M$ olup $\tilde{Z}$ M yüzeyinin birim dik vektör alanıdır.

$p\in \varphi(U)$ $\varphi(q)=p$ o.ş. yalnız bir q noktası vardır. $q\in U$ $\tilde{Z}(p)=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} y_i(p)\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p$

$\tilde{Z}(p)=\frac{1}{r}(r\sin q_1\cos q_2, r\sin q_1\sin q_2, r\cos q_1)=(\sin q_1\cos q_2,\sin q_1\sin q_2,\cos q_1)$

$Z(p)=(\sin u_1\cos u_2,\sin u_1\sin u_2,\cos u_1)(p)$; $u_i(p)=q_i \Rightarrow (\sin q_1\cos q_2,\sin q_1\sin q_2,\cos q_1)$

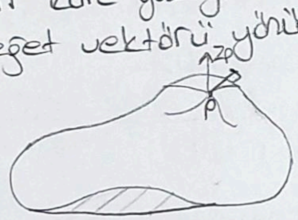
$\Rightarrow Z(p)=\tilde{Z}(p) \overset{\forall p}{\Rightarrow} Z=\tilde{Z}$

Şekil Operatörü

Bu bölümde yüzeyin birim dik vektör alanının bir teğet vektör yönündeki yöne göre türevini ve yüzeyin dik vektör alanının bir vektör yönündeki türevinin yani dik vektör alanının herhangi bir doğrultudaki değişimini yüzeyin şekli ile ilgisini açıklayacağız. Eğrilik bir eğrinin teğetinin eğri boyunca değişiminin ölçüsü old. hatırlanırsa bu kısımda yüzeyin birim dik vektör alanının eğri boyunca değişiminin ölçüsünün neyi ifade ettiği? gibi sorulara cevap vereceğiz.

Öncelikle yüzeyin birim dik vektör alanının yüzey üzerindeki bir teğet vektör yönündeki türevini inceleyelim;

$v_p\in T_p(M)$, Z yüzeyin birim dik vektör alanı için $D_{v_p}Z$ yüzeyin birim dik vektör alanının v_p vektörü yönündeki değişimidir. Bu değişim düzlemde sıfırdır. Düzlemde birim dik vektör alanının Bir küre yüzeyinde ise daima sabittir. teğet vektörü yönündeki değişimi sıfırdır.



P noktasında farklı yönlerde birim vektör alanının değişimi de farklıdır.

Teorem: Z, M yüzeyi üstünde birim dik vektör alanı o.ü $\forall v_p\in T_p(M)$ için $D_{v_p}Z\in T_p(M)$ dir.

Tanım: Z, M yüzeyinin birim dik vektör alanı o.ü. $p\in M$ $S_p: T_p(M)\to T_p(M)$, $v_p\to S_p(v_p)=-D_{v_p}Z$ olarak tanımlı fonksiyona M yüzeyinin p noktasındaki şekil operatörü ya da Weingarten dönüşümü denir. M nin her bir p noktasına S_p fonk. karşılık getiren S dönüşümüne de M yüzeyinin şekil operatörü denir.

Teorem: S_p lineer dönüşümdür. $S_p: T_p(M)\to T_p(M)$
$v_p\to S_p(v_p)=-D_{v_p}Z$

Şekil Operatörünün Geometrik Anlamı

$v_p \in T_p(M)$, $\alpha(0)=p$, $\alpha'(0)=v_p$. $\alpha: I \to M$ eğrisini göz önüne alalım.

$$D_{v_p}Z = (Z\circ\alpha)'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[(Z\circ\alpha)(h)-(Z\circ\alpha)(0)\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[Z(\alpha(h))-Z(p)\right] \text{ dir.}$$

h değeri küçüldükçe, $\alpha(h)$ noktası p noktasına yakınlaşır. v_p yönünde α eğrisi boyunca hareket edilirse α eğrisinin eğilmesine bağlı olarak $Z(\alpha(h))-Z(p)$ vektörü büyüyüp küçülecektir. Dolayısıyla $S(v_p)$ vektörünün büyüklüğü kabaca, yüzeyin p noktasından başlayarak v_p vektörü yönünde gidildiğinde yüzeyin az ya da çok eğildiğinin bir ölçüsü olarak düşünülebilir.

$e(U)$, M yüzeyinin regüler basit yüzeyi o.ü. $e(U)$ nun pozitif yönlü birim dik vektör alanı M yüzeyinin pozitif yönlü birim dik vektör alanı ile çakışacak şekilde seçilebilir.

$q\in U$, $e(q)=p$, $\partial_j(p)=e_j(q)$, $\{\partial_1(p),\partial_2(p)\}$ $T_p(M)$ nin pozitif yönlü bir bazıdır.

$e(U)$ üstünde $Z=\dfrac{\partial_1\times\partial_2}{\|\partial_1\times\partial_2\|}$ $\quad (Z\circ e)(q)=Z(e(q))=Z(p)=\dfrac{\partial_1(p)\times\partial_2(p)}{\|\partial_1(p)\times\partial_2(p)\|}=\dfrac{e_1\times e_2}{\|e_1\times e_2\|}(q)$

$\forall q$ $\Rightarrow$ $Z\circ e=\dfrac{e_1\times e_2}{\|e_1\times e_2\|}$ olur. Ayrıca $S(\partial_j(p))=-D_{\partial_j(p)}Z=-(Z\circ e)_j(q)$ olur.

$v_p\in T_p(M)$ için $v_p=\lambda_1\partial_1(p)+\lambda_2\partial_2(p)$ yazılabilir. $v_p=(\lambda_1,\lambda_2)$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

$S(v_p)=S(\lambda_1\partial_1(p)+\lambda_2\partial_2(p))$; S lineer old. $=\lambda_1 S(\partial_1(p))+\lambda_2 S(\partial_2(p))$

$S(v_p)=\lambda_1(Z\circ e_1)(q)-\lambda_2(Z\circ e_2)(q)$ dir.

Sonuç: $e(U)$ regüler basit yüzeyinin birim dik vektör alanı Z o.ü. $Z=\sum_{i=1}^{3} z_i\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ ve $v_p=\lambda_1\partial_1(p)+\lambda_2\partial_2(p)$ ise $S(v_p)=-\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda_1\dfrac{\partial(z_i\circ e)}{\partial x_1}\Big|_q+\lambda_2\dfrac{\partial(z_i\circ e)}{\partial x_2}\Big|_q\right)\dfrac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{(q)}$

Ör: $e=(x_1,x_2,x_1x_2)$ eşitliği ile verilen $e(\mathbb{R}^2)$ regüler basit yüzeyini göz önüne alalım.

a-) $p=e(1,-1)$ için $S(\partial_1(p))$ ve $S(\partial_2(p))$ vektörlerini bulun.

b-) $p=e(1,-1)$ ve $v_p=3\partial_1(p)-\partial_2(p)$ old. göre $S(v_p)=?$

a-) $e_1=(1,0,x_2)$ $\quad e_2=(0,1,x_1)$ $\quad \partial_1\circ e=e_1 \Rightarrow \partial_1(1,0,x_2\circ e^{-1})=(1,0,u_2)$

$\partial_2\circ e=e_2 \Rightarrow \partial_2(0,1,x_1\circ e^{-1})=(0,1,u_1)$

$\partial_1\times\partial_2=(-u_2,-u_1,1)$

$\|\partial_1\times\partial_2\|=\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}$ $\qquad Z=\dfrac{(-u_2,-u_1,1)}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}}$

$z_1=\dfrac{-u_2}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}}$, $\quad z_1\circ e=\dfrac{-x_2}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}$, $\quad u_i\circ e=x_i$

$z_2=\dfrac{-u_1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}}$, $\quad z_2\circ e=\dfrac{-x_1}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}$

$z_3=\dfrac{1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}}$, $\quad z_3\circ e=\dfrac{1}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}$

$S(\partial_1(p))=-D_{\partial_1(p)}Z=-\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial z_i}{\partial u_1}(p)\dfrac{\partial}{\partial y_i}(p)$

$=-\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial(z_i\circ e)}{\partial x_1}(q)\left(\dfrac{\partial}{\partial y_i}\circ e\right)(q)$

$S(\partial_1(p))=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p+\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\dfrac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{\partial}{\partial y_3}\Big|_p$

$S(\partial_2(p))=-D_{\partial_2(p)}Z=-\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial z_i}{\partial u_2}(p)\dfrac{\partial}{\partial y_i}(p)=\dots=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\dfrac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{\partial}{\partial y_3}\Big|_p$

b-) $\vartheta_p = 3\partial_1(p) - \partial_2(p)$ $p = \varphi(1,-1)$ $S(\vartheta_p) = ?$

$S(\vartheta_p) = S(3\partial_1(p) - \partial_2(p))$ S Lineer

$= 3S(\partial_1(p)) - S(\partial_2(p)) = 3\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

$= \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}}, \frac{4}{3\sqrt{3}}\right)$

Sonuç: $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyindeki ∂_j vektör alanları için $\left(D_{\partial_h}\partial_j\right)(p) = \varphi_{jh}(q)$ dır.

Teorem: $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyi üzerindeki ∂_j vek. al. için $D_{\partial_h}\partial_j = D_{\partial_j}\partial_h$ dır.

$\partial_j h \quad \partial h_j$

Sonuç: Z, $\varphi(U)$ r.b.y.ü pozitif yönlü birim dik vek. al. ise;

$\langle S(\partial_h), \partial_j \rangle = \langle Z, D_{\partial_h}\partial_j \rangle$ dır.

Teorem: S şekil operatörü self-adjointtir (kendine eşlenik). Yani $\forall \vartheta_p, w_p \in T_p(M)$ için $\langle S(\vartheta_p), w_p \rangle = \langle \vartheta_p, S(w_p) \rangle$ dır.

Temel formlar (Fundamental forms)

Tanım: $\mathbb{R}^3$ uzayında bir M yüzeyi verilsin. $\forall p \in M$ noktasına $I_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ $(\vartheta_p, w_p) \to I_p(\vartheta_p, w_p) = \langle \vartheta_p, w_p \rangle$ fonksiyonunu karşılık getiren I_p fonksiyonuna M yüzeyinin Birinci Temel Formu denir. $I_p(\vartheta_p, w_p)$ yerine genelde $I(\vartheta_p, w_p)$ yazılır. $\forall p \in M$ noktasına $II_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$

$(\vartheta_p, w_p) \to II_p(\vartheta_p, w_p) = \langle S(\vartheta_p), w_p \rangle$ fonk.nunu

karşılık getiren II_p fonksiyonuna, M yüzeyinin ikinci temel formu denir. Genelde $II(\vartheta_p, w_p)$ ile gösterilir. $\forall p \in M$ noktasına $III_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$

$(\vartheta_p \times w_p) \to III(\vartheta_p, w_p)$

$= \langle S^2(\vartheta_p), w_p \rangle$

fonksiyonunu karşılık getiren III_p fonksiyonuna, M yüzeyinin üçüncü temel formu denir.

! 1. temel form yüzeyin üzerinde bir metrik tanımlar. Bu nedenle yüzey üzerinde ölçüme bağlı işler yapmamıza olanak sağlar. Örneğin, eğri uzunluğu yüzeyin iki vektörü arasındaki açı, yüzeyin herhangi bir bölgesinin alanı 1. temel form yardımıyla hesaplanabilir. Yüzeyin metrik özelliklerini açıklar. Bu nedenle metrik tensor olarak da adlandırılır.

Yüzeyin şekliyle ilgili yorum yapabilmek ve yüzeyin noktalarını karakterize etmek için 2. temel formdan yararlanılır.

$T_p(\mathbb{R}^3)$ uzayında iç çarpım simetrik old. $\forall p \in M$ için I_p simetriktir. S_p self adjoint old. II_p ve III_p simetriktir.

Tanım: M yüzeyinin bir p noktasında $S_p: T_p(M) \to T_p(M)$ lineer dönüşümünün özdeğerleri, p noktasındaki Asal (Asli) eğrilikler denir. Yani S_p şekil operatörü matrisi 2×2 tipinde bir matris olup bu matrisin öz değerleri $|\lambda I_2 - S_p| = 0$ denkleminin kökleridir ve bu kökler asal eğrilikler adını alır. Bu özdeğerlere karşılık gelen sıfırdan farklı özvektörlere de p noktasındaki Asal vektörler ya da eğrilik vektörleri denir.

Bir eğrilik vektörünün gerdiği alt vektör uzayına p noktasındaki eğrilik doğrultusu denir.

Tanıma göre λ sayısı, p noktasında bir asal eğrilik ise, $S_p(u_p) = \lambda u_p$ o.ş. $u_p \neq 0$, $u_p \in T_p(M)$ vardır.

u_p vektörü p noktasında bir eğrilik ise $u_p \neq 0$ dır ve en az bir λ sayısı için $S_p(u_p) = \lambda u_p$ olup bu λ sayısı tektir.

$S_p: T_p(M) \to T_p(M)$ lineer dönüşümü self-adjoint old. $S_p(e_{1p}) = k_1(p) e_1(p)$ ve $S_p(e_{2p}) = k_2(p) e_2(p)$ o.ş. e_{1p}, e_{2p} lineer bağımsız vektörleri vardır. $k_1(p)$ ve $k_2(p)$ e_{1p}, e_{2p} özvektörlerine karşılık gelen özdeğerler olup asal eğriliklerdir. Bu asal eğrilikleri $k_1(p) \leq k_2(p)$ o.ş. adlandıracağız. e_{1p}, e_{2p} vektörlerini birim uzunlukta o.ş. seçilebileceğinden birim uzunlukta old. varsayacağız.

$k_1(p) < k_2(p)$ olsun. $\langle S(e_{1p}), e_{2p} \rangle = \langle e_{1p}, S(e_{2p}) \rangle$ old. $S(e_{1p}) = k_1(p) e_{1p}$, $S(e_{2p}) = k_2(p) e_{2p}$ eşitlikleri kullanılırsa;

$$\underbrace{(k_1(p) - k_2(p))}_{\neq 0} \langle e_{1p}, e_{2p} \rangle = 0 \Rightarrow \langle e_{1p}, e_{2p} \rangle = 0 \Rightarrow e_{1p} \perp e_{2p} \text{ bulunur.}$$

$k_1(p) = k_2(p)$ olsun. e_{1p} ve e_{2p} lineer bağımsız old. $T_p(M)$ bir bazdır. $u_p \in T_p(M) \Rightarrow u_p = a e_{1p} + b e_{2p}$ olarak yazılabilir.

$S(u_p) = a S(e_{1p}) = b S(e_{2p}) = k_1(p)(a e_{1p} + b e_{2p}) = k_1(p) u_p$ old. $T_p(M)$ uzayının her u_p vektörü bir özvektör olur. Böylece $S(e_{1p}) = k_1(p) e_{1p}$, $S(e_{2p}) = k_2(p) e_{2p}$ eşitliklerini sağlayan e_{1p}, e_{2p} vektörlerini birbirine dik o.ş. seçebiliriz. Sonuç olarak $\{e_{1p}, e_{2p}\}$ kümesi $T_p(M)$ nin pozitif yönlü ortonormal bir bazı o.ş. seçilebilir.

Ör.
$\mathbb{R}^3$ uzayında $M: y_3 = y_1 y_2$ yüzeyi verilsin. $p=(0,0,0)\in M$ o.ü
asal eğriliklerini bulunuz.
a.) M nin p noktasındaki asal eğriliklerini bulunuz.
b.) $\{e_{1p}, e_{2p}\}$ pozitif yönlü ortonormal bazını bulunuz.

a.) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\varphi: (x_1, x_2, x_1x_2)$ olarak parametrelendirilebilir. Buradan $\varphi(\mathbb{R}^2) = M$, $\mathbb{R}^3$ uzayında regüler basit
$\varphi(\mathbb{R}^2) = M$ ve $\varphi(0,0) = p$ dur. $S(u_p) = \lambda u_p$ o.s. λ sayısını ve u_p teğet vektörünü
bir yüzeydir.
araştıracağız.

$u_p = a\partial_1(p) + b\partial_2(p)$ $\quad aS(\partial_1(p)) + bS(\partial_2(p)) = \lambda(a\partial_1(p) + b\partial_2(p))$ (*)

$e_1 = (1, 0, x_2)$
$e_2 = (0, 1, x_1)$ $\Rightarrow$ $\partial_1(p) = \varphi_1(q) = (1,0,0)$
$\partial_2(p) = \varphi_2(q) = (0,1,0)$

$e_1 \times e_2 = (-x_2, -x_2, 1)$ $\quad \|e_1 \times e_2\| = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$

yüzeyin pozitif yönlü birim dik vektör alanı $Z\circ\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}(-x_2, -x_1, 1)$

$$S(\partial_1(p)) = -D_{\partial_1(p)} Z = -\sum_{i=1}^{3} \partial_1(p)[z_i] \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial z_i}{\partial u_1}\Big|_p \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(z_i\circ\varphi)}{\partial x_1}\Big|_q \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p = (0,1,0) = \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p = 0.\partial_1(p) + 1.\partial_2(p)$$

$$S(\partial_2(p)) = -D_{\partial_2(p)} Z = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(z_i\circ\varphi)}{\partial x_2}\Big|_q \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p = (1,0,0) = \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p = 1.\partial_1(p) + 0\partial_2(p)$$

(*)'dan $a(0,1,0) + b(1,0,0) = \lambda a(0,1,0) + \lambda b(1,0,0)$

$\lambda a - b = 0$
$-a + \lambda b = 0$ $\quad \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$ olmalıdır. $\lambda = \mp 1$ özdeğerler
$k_1(p) = -1$, $k_2(p) = 1$ yüzeyin asal eğrilikleridir.

b.) $\lambda_1 = k_1(p) = -1$ için $\quad$ $-a-b=0$
$-a-b=0$ $\}$ $b=-a$ bulunur. $a = t\in\mathbb{R}$ için $b=-t$

$u_p = t\partial_1(p) - t\partial_2(p)$ şeklindedir.
$= t(1,0,0) - t(0,1,0) = (t, -t, 0)$ t sayısını $\|u_p\| = 1$ o.s. alalım. $k_1(p)$ asal
eğriliğine karşılık gelen asal vektör $e_{1p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ olarak bulunur.

$\lambda_2 = k_2(p) = 1$ için
$a - b = 0$
$-a + b = 0$ $\}$ $a = b$ bulunur $b = t\in\mathbb{R}$
$u_p = t\partial_1(p) + t\partial_2(p) = (t, t, 0)$, $\|u_p\| = |t|\sqrt{2}$
$k_2(p) = 1$ asal eğriliğine karşılık gelen asal
vektör $e_{2p} = \frac{1}{|t|\sqrt{2}}(t, t, 0)$ dır.

ortonormal olması için
boyu 1 olmalı ve e_{1p}
ile çarpıldığında 0
olmalı
pozitif yönlü baz olması için
e_{1p} ve e_{2p} nin det > 0
olmalı

devamı var

$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & t/|t|\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & t/|t|\sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{t}{|t|}$ $t>0$ olması yeterli

$t=1$ için $e_{2p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1(p)+\partial_2(p))$

$\left\{ e_{1p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\ e_{2p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \right\}$ $T_p(M)$ pozitif yönlü ortonormal baz

Tanım: S_p lineer dönüşümünün determinantına M yüzeyinin p noktasındaki Gauss Eğriliği denir. $K(p)$ ile gösterilir. $K(p) = \det(S_p)$ olarak tanımlanan ve $\forall p \in M$ noktasına $K(p)$ sayısını karşılık getiren K fonksiyonuna M yüzeyinin Gauss eğrilik fonk. denir. $K = \det(S)$ dir.

S_p lineer dönüşümünün izinin yarısına M yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği denir. $H(p)$ ile gösterilir. $H(p) = \frac{1}{2}\,iz(S_p)$ olarak tanımlanan $\forall p \in M$ noktasına $H(p)$ sayısını karşılık getiren H fonk. M yüzeyinin ortalama eğrilik fonk. denir. $H = \frac{1}{2}\,iz(S)$ dir.

Ör:

$\mathbb{R}^3$de $M: y_3 = y_1 y_2$ yüzeyinin $p=(0,0,0)$ noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz.

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = (x_1, x_2, x_1 x_2)$ $\quad$ $\partial_1(p) = (1,0,0)$, $S(\partial_1(p)) = (0,1,0)$

$\partial_2(p) = (0,1,0)$, $S(\partial_2(p)) = (1,0,0)$

$S_p: T_p(M) \to T_p(M)$

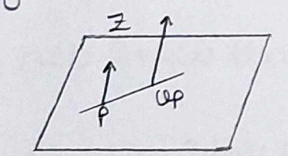
$\partial_1(p) \to S(\partial_1(p)) = (0,1,0) = 0.\partial_1(p) + 1.\partial_2(p)$

$\partial_2(p) \to S(\partial_2(p)) = (1,0,0) = 1\,\partial_1(p) + 0.\partial_2(p)$

$S_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow K(p) = \det(S_p) = -1$ gauss eğ.

$H(p) = \frac{1}{2}\,iz(S_p) = 0$ ortalama eğrilik

Tanım: M yüzeyin her p noktasında, $S_p = 0$ ise M yüzeyi bir düzlem tarafından içerilir. Eğer bir $p \in M$ noktası için $S_p = 0$ ise p noktasına düzlemsel nokta denir (flat). M yüzeyinin bir $p \in M$ noktasında $\lambda \in \mathbb{R}$ o.ü. $S_p = \lambda I_p$ ise p noktasına yüzeyin Göbek (umbilik) noktası denir.



Düzlemin her noktası flattır.

$\mathbb{R}^3$ uzayında r yarıçaplı merkezil kürenin her bir noktası için $S_p = -\frac{1}{r} I_p$ old. kürenin her bir noktası umbilik noktadır.

Ör:

$\mathbb{R}^3$ uzayında $y_3 = y_1^2 + y_2^2$ denklemiyle verilen M yüzeyi için $p=(0,0,0) \in M$ noktasının umbilik noktası old. göster.

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $\varphi = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$ $\varphi(\mathbb{R}^2) = M$ $\varphi(0,0) = p$ regüler basit yüzeydir. $S_p = \lambda I_p$ o.s. λ sayısının old. gösterirsek p noktası bir umbilik nokta olur.

$\varphi_1 = (1,0,2x_1) \Rightarrow \varphi_1(q) = \partial_1(p) = (1,0,0)$ $\quad$ $\varphi_1 \times \varphi_2 = (-2x_1, -2x_2, 1)$

$\varphi_2 = (0,1,2x_2) \Rightarrow \varphi_2(q) = \partial_2(p) = (0,1,0)$ $\quad$ $\|\varphi_1 \times \varphi_2\| = \sqrt{1+4x_1^2+4x_2^2}$

devamı

$$z_0 e = \frac{1}{\sqrt{1+4x_1^2+4x_2^2}}(\underbrace{-2x_1}_{z_1 o e}, \underbrace{-2x_2}_{z_2 o e}, \underbrace{1}_{z_3 o e})$$

$$S(\partial_1(p)) = -D_{\partial_1(p)} Z = -\sum_{i=1}^{3} \partial_1(p)[z_i] \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(z_i o e)}{\partial x_1}\Big|_q \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p$$

$$= (2,0,0) = 2\partial_1(p) + 0 \cdot \partial_2(p)$$

$$S(\partial_2(p)) = (0,2,0) = 0 \cdot \partial_1(p) + 2\partial_2(p)$$

$S_p: T_p(M) \to T_p(M)$

$\partial_1(p) \to S(\partial_1(p)) = 2 \cdot \partial_1(p) + 0\,\partial_2(p)$

$\partial_2(p) \to S(\partial_2(p)) = 0 \cdot \partial_1(p) + 2 \cdot \partial_2(p)$

$S_p = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 I_p$

$p = (0,0,0)$ noktası umbilik noktadır.

eğer $S_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsaydı p flattır.

Tanım: $u_p \neq 0$, $w_p \neq 0$ a.ü. u_p ve w_p teğet vektörleri için $\langle S(u_p), w_p \rangle = 0$ ise u_p vektörü w_p vektörüne eşleniktir denir. $u_p \neq 0$ ve $\langle S(u_p), u_p \rangle = 0$ ise u_p vektörü kendisine eşlenik ise u_p vektörüne asimtotik vektör denir.

$\langle S(u_p), w_p \rangle = \langle u_p, S(w_p) \rangle$ old. u_p vektörü w_p vektörüne eşlenik ise w_p vektörü de u_p vektörüne eşleniktir.

Teorem: u_p vektörü hem eğrilik vektörü hem de asimtotik vektör ise $S(u_p) = 0$ dır.

Ör:

M yüzeyinin $u_p \neq 0$ teğet vektörü için $S(u_p) = 0$ ise u_p nin bir eğrilik vektörü old. göst.

$S(u_p) = 0 \Rightarrow S(u_p) = 0 \cdot u_p$ olarak yazılabilir. O halde u_p sıfır asal eğriliğine karşılık gelen eğrilik vektörüdür.

Ör:

u_p hem eğrilik hem asimtotik vektör ise bu vektörün $T_p(M)$ uzayında $w_p \neq 0$ olan bir eşlenik vektörü old. göst.

u_p eğrilik vektörü old. $S(u_p) = \lambda u_p$ olacak şekilde bir λ sayısı vardır. Asimtotik vektör old. $\langle S(u_p), u_p \rangle = 0$ dır. Ayrıca $S(u_p) = 0$ dır. Buradan $u_p \neq 0$, $w_p \in T_p(M)$ $\langle \underbrace{S(u_p)}_{0}, w_p \rangle = 0$ u_p, w_p eşlenik vektörlerdir.

Ör:

M yüzeyinin $u_p \neq 0$ bir teğet vektörü, $\forall w_p \neq 0$, $w_p \in T_p(M)$ vektörüne eşlenik ise u_p nin bir eğrilik vektörü old. göst.

$u_p \neq 0$, $w_p \neq 0$ $\forall w_p \in T_p(M)$ $\langle S(u_p), w_p \rangle = 0 \Rightarrow S(u_p) = 0 = 0 \cdot u_p$ bulunur. u_p eğrilik vektörü ya da asal vektördür.

Teorem: M yüzeyinin 2. temel formu pozitif tanımlı (veya negatif tanımlı) ise, M nin asimtotik vektörü yoktur.

Tanım: $p \in M$, $U_p \in T_p(M)$ ve U_p, M yüzeyinin eğrilik vektörü ise, $S(U_p) = \lambda U_p$ olup. S nin tanımı gereğince $D_{U_p} Z = -\lambda U_p$ dir. $-\lambda = k$ denirse, $D_{U_p} Z = k U_p$ olur ki bu eşitliğe Rodrigues formülü denir.

Diferansiyel Geometri II Vize

çalışma kağıdı

1-) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1,x_2) = (\underbrace{x_1+x_2}_{f_1}, \underbrace{x_1-x_2}_{f_2}, \underbrace{x_1x_2}_{f_3})$ dönüşümü veriliyor. $M=\varphi(\mathbb{R}^2)$ kümesi bir regüler yüzey midir?

1 φ, C^∞ sınıfından mı? f_1, f_2, f_3 polinom old. C^∞ sınıfından

→ Homeomorfizm mi? (kendisi ve tersi sürekli) (1-1 örtense tersi vardır)

2 1-1 mi? $\forall (x_1,x_2), (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\varphi(x_1,x_2)=\varphi(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$ iken $(x_1,x_2)=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$?

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=\tilde{x}_1+\tilde{x}_2 \\ x_1-x_2=\tilde{x}_1-\tilde{x}_2 \\ x_1x_2=\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=\tilde{x}_1 \\ x_2=\tilde{x}_2 \end{array}$$ bulunur. 1-1 dir.

- örten mi? örten
- φ sürekli mi? φ'nin bileşenleri polinom old. φ süreklidir.
- φ^{-1} sürekli mi?

$$\left.\begin{array}{l} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_1-x_2 \\ y_3=x_1x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1=\frac{y_1+y_2}{2} \quad x_2=\frac{y_1-y_2}{2} \quad x_3=\frac{y_1^2-y_2^2}{4}$$

$$V=\left\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3 : y_3=\frac{y_1^2-y_2^2}{4}\right\}$$

$\varphi^{-1}: V \to \mathbb{R}^2$, $\varphi^{-1}(y_1,y_2,y_3)=\left(\underbrace{\frac{y_1+y_2}{2}}_{\varphi_1^{-1}}, \underbrace{\frac{y_1-y_2}{2}}_{\varphi_2^{-1}}\right)$ φ_1^{-1} ve φ_2^{-1} fonk. koordinat fonk. toplamı ve farkından oluştuğundan süreklidir. φ^{-1} süreklidir.

3 → φ regüler midir? $\operatorname{rank} J(\varphi) = \operatorname{rank}[\varphi J] = \text{boy}\,\mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow \varphi$ regüler

$$J(\varphi) = \begin{bmatrix} \text{1. bileşenin } x_1\text{'e göre türevi} & x_2\text{'ye göre türevi} \\ 2. \quad '' & '' \\ 3. \quad '' & '' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$ olup $\forall q \in \mathbb{R}^2$ için $\operatorname{rank} J(\varphi)=2$ dir.

Sonuç olarak 3 şart da sağlandığından $\varphi(\mathbb{R}^2)$ regüler yüzeydir.

2-) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2+y_3^3-y_3$ fonk. kritik noktalarını ve değerlerini bul. Hangi $c\in\mathbb{R}$ değerleri için $f(y_1,y_2,y_3)=c$ kümesi $\mathbb{R}^3$ uzayında bir regüler yüzey belirtir?

$Jf = [2y_1 \;\; -2y_2 \;\; 3y_3^2 \;\; -1]$ olup $\operatorname{rank}(Jf)_p = [2p_1 \;\; -2p_2 \;\; 3p_3^2-1]$ $p_1=p_2=0$ ve $p_3=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$ olan noktalarda rank sıfır olur. Bu noktalar kritik noktalardır. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gittiği için rankı 1 yapmayan değerler olur. Rankı 1 yapmayan değerler kritik nokta örneğin $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ olsaydı rankı 2 yapmayan değerler olur.

Kritik noktalar kümesi $\left\{\left(0,0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ olur. Kritik değerler ise

$f\left(0,0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ $\quad f\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{-2}{3\sqrt{3}}$ bulunur. O halde

$c\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right\}$ için $f(y_1,y_2,y_3)=c$ regüler bir yüzeydir.

3-) $\mathbb{R}^3$ uzayında $M=\{(y_1,y_2,y_3): y_1^2+y_2^2=9\}$ olsun. $p_0=(3,0,0)\in M$ noktası ve $U=\{(q_1,q_2): -\frac{\pi}{2}<q_1<\frac{\pi}{2}, q_2\in\mathbb{R}\}$, $\varphi: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1,x_2)=(3\cos x_1, 3\sin x_1, x_2)$ o.ü $\varphi(U)$, p noktasını içeren regüler bir yüzey verilsin.

a-) $T_{p_0}(M)$ uzayının $\{\partial_1(p_0),\partial_2(p_0)\}$ bazını bulunuz.

b-) $T_{p_0}(M)$ teğet uzayının denklemini bulun.

c-) $\varphi(\frac{\pi}{3},2)=u$ olsun. u noktasındaki $\{\partial_1(u),\partial_2(u)\}$ bazını ve $T_u(M)$ uzayının denklemini bulun.

a-) $\partial_i(p_0)=\varphi_i(q_0)$ $\varphi_1=(-3\sin x_1, 3\cos x_1, 0)$ $\varphi_2=(0,0,1)$ $q_0=(q_1,q_2)$

$\varphi(q_0)=p_0$ old. $(3\cos q_1, 3\sin q_1, q_2)=(3,0,0) \Rightarrow \begin{cases} q_1=0 \\ q_2=0\end{cases} \Rightarrow q_0=(0,0)$ alınabilir. O halde, $\varphi_1(q_0)=(0,3,0)$, $\varphi_2(q_0)=(0,0,1)$ bulunur.

$\partial_i(p_0)=\varphi_i(q_0)$ old $\partial_1(p_0)=\varphi_1(q_0)=(0,3,0)$ $\partial_2(p_0)=\varphi_2(p_0)=(0,0,1)$

$\{\partial_1(p_0),\partial_2(p_0)\}=\{(0,3,0),(0,0,1)\}$

$$\begin{array}{ccc} X_1 & Y_2 & X_3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \quad 3X_1=0$$

b-) $\partial_1(p_0)\times\partial_2(p_0)=(3,0,0)=3\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{p_0}$

$\langle \partial_1(p_0)\times\partial_2(p_0), \overrightarrow{p_0p}\rangle=0$, $p=(p_1,p_2,p_3)$ $\langle(3,0,0),(p_1-3,p_2,p_3)\rangle=0$

$3p_1-9=0 \Rightarrow p_1-3=0 \overset{\text{d.k.f.}}{\Rightarrow} y_1-3=0$ teğet düzlem denk.

c-) $u=\varphi(\frac{\pi}{3},2)=(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},2)$ dir. $\partial_1(u)=\varphi_1(\frac{\pi}{3},2)=(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$

$\partial_2(u)=(0,0,1)$ $\partial_1(u)\times\partial_2(u)=(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0)=\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_u+\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_u$

$\langle\partial_1(u)\times\partial_2(u),\overrightarrow{up}\rangle=0$ $p=(p_1,p_2,p_3)$ $\frac{3}{2}y_1+\frac{3\sqrt{3}}{2}y_2-9=0$ M yüzeyinin u noktasındaki teğet düzlemi (denklemi).

4-) $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1,x_2)=(x_1,x_2,x_1x_2+2)$ olsun. $\varphi(\mathbb{R}^2)$ regüler yüzeyinin $\varphi(3,1)$ noktasındaki teğet düzleminin denk.?

$\partial_1(p_0)=\varphi_1(q_0)=(1,0,x_2)$ $\partial_2(p_0)=\varphi_2(q_0)=(0,1,x_1)$

$=(1,0,1)$ $=(0,1,3)$

$\partial_1(p_0)\times\partial_2(p_0)=(-1,-3,1)=-\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{p_0}-3\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{p_0}+1\frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_{p_0}$

$\langle\partial_1(p_0)\times\partial_2(p_0),\overrightarrow{p_0p}\rangle=0$ $p=(p_1,p_2,p_3)$

$\langle(-1,-3,1),(p_1-3,p_2-1,p_3-5)\rangle=0$ $p_1+3p_2-p_3-1=0 \overset{\text{d.k.f}}{\Rightarrow} y_1+3y_2-y_3-1=0$

p_0 noktasındaki teğet düzlemin denklemi

5-) $\mathbb{R}^3$ uzayında $\{(t,0,3t) : t\in\mathbb{R}^+\}$ eğrisinin Oy_3- ekseni çevresinde döndürülmesiyle elde edilen regüler yüzey M olsun. $p_0=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},3\right)$ o.g. $p_0\in M$ old. doğrulayınız. $U=\{(q_1,q_2) : q_1\in\mathbb{R}^+, q_2\in(0,\pi)\}$ ve $V=\{(q_1,q_2) \mid q_1\in\mathbb{R}^+, q_2\in\mathbb{R}\}$ o.ü

$\varphi : U\to\mathbb{R}^3$, $\varphi=(x_1\cos x_2, x_1\sin x_2, 3x_1)$ $\psi : V\to\mathbb{R}^3$; $\psi=(x_1,x_2,3\sqrt{x_1^2+x_2^2})$ alınıyor.

$p_0\in M$ noktasındaki $\varphi(U)$ ve $\psi(V)$ regüler basit yüzeyleri için

a-) $p_0\in M$ " teğet düzlem denk φ dön. yararlanarak bulunuz.

b-) $p_0\in M$ " " " " ψ " " "

$\left.\begin{array}{l} p_1=t\cos\lambda \\ p_2=t\sin\lambda \\ p_3=3t\end{array}\right\}$ $p_1^2+p_2^2=t^2$ $y_3=3\sqrt{y_1^2+y_2^2}$ dönel yüzeyin dik k.s. denklemi

$p_0=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},3\right)$ $3-3\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\overset{?}{=}0$ $3-3=0$ ✓ $\Rightarrow p_0\in M$

a-) $\varphi_1=(\cos x_2,\sin x_2,3)$ $\varphi_2=(-x_1\sin x_2, x_1\cos x_2, 0)$

$\varphi(q_0)=(q_1\cos q_2, q_1\sin q_2, 3q_1)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},3\right)$ $q_1=1$, $q_2=\frac{\pi}{3}$ $q_0=\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$

$\partial_1(p_0)=\varphi_1(q_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},3\right)$ $\partial_2(p_0)=\varphi_2(q_0)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$

$\partial_1(p_0)\times\partial_2(p_0)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2},1\right)$ $\langle\partial_1(p_0)\times\partial_2(p_0),\overrightarrow{p_0p}\rangle=0$ $3y_1+3\sqrt{3}y_2-2y_3=0$

b-) $3y_1+3\sqrt{3}y_2-2y_3=0$

6-) $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\varphi=(x_1,x_2,x_1^2+x_2^2)$ olsun. $\mathbb{R}^3$ uzayının dik koordinat fonk. y_1,y_2,y_3 o.ü $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f=y_1^2y_3+y_2$ olsun. $p=\varphi(1,-2)$, $v_p=\partial_1(p)-\partial_2(p)$ ise $v_p[f]=?$

$\varphi(\mathbb{R}^2)$ monge yüzeyi olduğundan regüler. $M=\varphi(\mathbb{R}^2)$ olsun. f, C^∞-sınıfındandır ve $v_p[f]=v_p[f|M]$ dir. Buradan f'nin $\varphi(\mathbb{R}^2)$ kısıtlaması da C^∞-sınıfındandır.

$$v_p[f]=(\partial_1(p)-\partial_2(p))[f]=(\partial_1(p))[f]-(\partial_2(p))[f]=\frac{\partial f}{\partial u_1}(p)-\frac{\partial f}{\partial u_2}(p)$$
$$=\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x_1}(q)-\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x_2}(q)$$

$(f\circ\varphi)(q)=f(\varphi(q))=f(q_1,q_2,q_1^2+q_2^2)=q_1^2(q_1^2+q_2^2)+q_2=q_1^4+(q_1q_2)^2+q_2$

$\overset{\text{d.k.f.}}{\Rightarrow}$ $f\circ\varphi=x_1^4+(x_1x_2)^2+x_2$ $v_p[f]=(4x_1^3+2x_1x_2^2)(q)-(2x_1^2x_2+1)(q)=15$ $q=(1,-2)$

2.yol v_p vektörünü bularak yapalım. $p=\varphi(1,-2)=(1,-2,5)$

$\partial_1(p)=\varphi_1(q)=(1,0,2x_1)_q=(1,0,2)$ $\partial_2(p)=\varphi_2(q)=(0,1,2x_2)_q=(0,1,-4)$

$v_p=\partial_1(p)-\partial_2(p)=(\underset{v_1}{1},\underset{v_2}{-1},\underset{v_3}{6})$ bulunur.

$$v_p[f]=v_1\left.\frac{\partial f}{\partial y_1}\right|_p+v_2\left.\frac{\partial f}{\partial y_2}\right|_p+v_3\left.\frac{\partial f}{\partial y_3}\right|_p=1(2y_1y_3)(p)-1(p)+6(y_1^2)(p)$$
$$=10-1+6=15$$

7-) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$ o.ü ∂_1 ve ∂_2 vektör alanlarını bulunuz.

$X = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$ ise $\varphi_*(X) = ?$

$\partial_1(p) = \varphi_1(q) = (1, 0, 2x_1)(q) = (1, 0, 2q_1) = \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p + 2q_1 \frac{\partial}{\partial y_3}\Big|_p = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + 2u_1 \frac{\partial}{\partial y_3}\right)(p)$

$\overset{\forall p}{\Rightarrow} \partial_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} + 2u_1 \frac{\partial}{\partial y_3} = (1, 0, 2u_1)$ (1)

$\partial_2(p) = \varphi_2(q) = (0, 1, 2x_2)(q) = (0, 1, 2q_2) = (0, 1, 2u_2)$ (2)

$\varphi_*(X) = Y$ olsun. $Y = \varphi_*\left(x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = (x_1^2 \circ \varphi^{-1})\, \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + ((x_1 + x_2) \circ \varphi^{-1})\, \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$

$= \underbrace{(x_1 \circ \varphi^{-1})^2}_{u_1^2} \partial_1 + [\underbrace{(x_1 \circ \varphi^{-1})}_{u_1} + \underbrace{(x_2 \circ \varphi^{-1})}_{u_2}] \partial_2 = u_1^2 \partial_1 + (u_1 + u_2) \partial_2$ (3)

(1) ve (2), (3) te yerine yazılırsa;

$u_1^2 (1, 0, 2u_1) + u_1 (0, 1, 2u_2) + u_2 (0, 1, 2u_2) = (u_1^2, u_1 + u_2, 2u_1^3 + 2u_2(u_1 + u_2))$

8-) $M: y_1^2 + y_2^2 = r^2$, $\mathbb{R}^3$de bir silindir yüzeyi o.ü

a-) M yüzeyinin birim dik (normal) vektör alanını bulunuz. Bu vektör alanının y_1Oy_2 düzlemine paralel old. göst.

b-) $U = \{(q_1, q_2) : q_1, q_2 \in (0, \pi)\}$, $\varphi: U \to M$, $\varphi = (r\cos x_1, r\sin x_1, x_2)$ alınarak elde edilen $\varphi(U)$ regüler basit yüzeyi üz. p noktasından geçen x_2 parametre eğrisi boyunca, teğet düzlemin sbt. kald. göst.

a-) $y_1^2 + y_2^2 = r^2$, $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $g(y_1, y_2, y_3) = r^2$ $\nabla g = (2y_1, 2y_2, 0)$, $\|\nabla g\| = \sqrt{4\underbrace{(y_1^2 + y_2^2)}_{r^2}} = 2r$

$\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{2r}(2y_1, 2y_2, 0) = \frac{1}{r}(y_1, y_2, 0)$ birim dik vek. al.

$\forall p \in M$ için $\left\langle \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right\rangle = 0$ old. bu vektör alanı y_1Oy_2 düz. paraleldir.

b-) $\beta(t) = \varphi(q + t(0,1)) = \varphi(q_1, q_2 + t) = (r\cos q_1, r\sin q_1, q_2 + t)$ p nok. geçen x_2 parametre eğrisidir. $p \in \varphi(U)$ için $\varphi(q) = p$ o.ş. bir tek $q = (q_1, q_2)$ noktası vardır. Buradan $p = (r\cos q_1, r\sin q_1, q_2)$ dir. p noktasındaki dik vektör

$\varphi_1(q) = (-r\sin q_1, r\cos q_1, 0)$ $\varphi_2(q) = (0, 0, 1)$ $\varphi_1(q) \times \varphi_2(q) = (r\cos q_1, r\sin q_1, 0)$ dır.

Ya da $\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{r}(y_1, y_2, 0) \Rightarrow \left(\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}\right)(p) = \frac{1}{r}(r\cos q_1, r\sin q_1, 0) = (\cos q_1, \sin q_1, 0)$

$h = (h_1, h_2, h_3) \in T_p(M)$ düzlemde herhangi bir nokta o.ü $\left\langle \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}(p), \vec{hp} \right\rangle = 0$ teğet düz. denk.

$r = (\cos q_1) y_1 + (\sin q_1) y_2$ p nok. teğet düz. denk.

$\beta(t)$ nok. teğet düzlem denklemi p noktasındaki ile aynı old. görülür. Böylece teğet düzlemi p noktasından geçen x_2-parametre eğrisi boyunca sabittir.

Kutupsal Koordinatlar

Düzlemde ve uzayda eğriler

Küre, silindir, koni yüzeyi —

Dönel yüzeyler —

Doğrusal ״

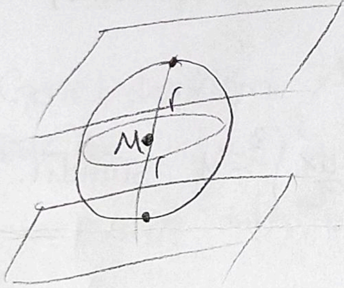
Kuadrik ״

Uzayda silindirik ve küresel koor. sistemleri

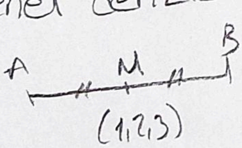
---

* $x+2y+2z-12=0$ ve $x+2y+2z+6=0$ düzlemlere teğet olan kürenin yarıçapı?

$$2r = \frac{|-12-6|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \qquad r=3$$



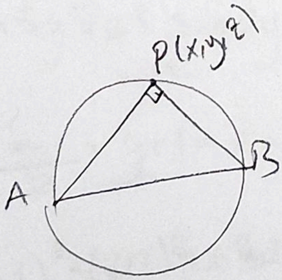
* $A(-2,1,4)$ ve $B(4,3,2)$ noktalarını çap kabul eden kürenin genel denklemi?



$$r = \frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{6^2+2^2+2^2}}{2} = \sqrt{11}$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = (\sqrt{11})^2$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+3=0$$



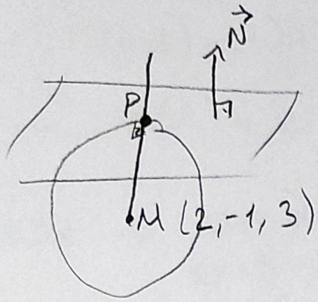
$$\langle \vec{PA}, \vec{PB} \rangle = 0$$

$$\vec{PA} = (x+2,\ y-1,\ z-4)$$
$$\vec{PB} = (x-4,\ y-3,\ z-2)$$

$$(x+2)(x-4)+(y-1)(y-3)+(z-4)(z-2)=0$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+3=0$$

** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=12$ küresine $P(4,1,1)$ noktasında teğet olan düzleme ve dik olan doğrunun denklemi?
normal



$\vec{MP}=(2,2,-2)$ olup $\vec{N}=(1,1,-1)$ alınabilir.

$P(4,1,1)$

$x-4+y-1-(z-1)=0$

$x+y-z-4=0$ teğet düzlem

$\frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$ $\quad x-4=y-1=1-z$

* Dayanak eğrisi $y^2+z^2=1$, $x=0$ ve doğrultmanı $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}$ olan silindirin denk.?

sint

cost

$\vec{U}=(2,3,4)$

$\alpha(t)=(0,\cos t,\sin t)$

$x=2\lambda \quad \to \lambda=x/2$

$y=\cos t+3\lambda \quad y-\frac{3x}{2}=\cos t$

$z=\sin t+4\lambda \quad z-\frac{4x}{2}=\sin t$

$\left(y-\frac{3x}{2}\right)^2+\left(z-\frac{4x}{2}\right)^2=1$ silindir.

* Dayanak eğrisi $x^2 z^2=9$ ve $y=0$ doğrultman vek. $\vec{U}=(1,2,-1)$ silind. denk.

$\sec^2-\tan^2=1$

$\alpha(t)=(3\sec t,0,3\tan t)$

$x=3\sec t+\lambda \quad x-\frac{y}{2}=3\sec t$

$y=2\lambda \quad \lambda=y/2 \quad z+\frac{y}{2}=3\tan t$

$z=3\tan t-\lambda$

$\left(x-\frac{y}{2}\right)^2-\left(z+\frac{y}{2}\right)^2=9$

$(1-\lambda).4\sin t=x \quad \sin t=\frac{x}{4-4\lambda}$

$(1-\lambda).\cos t=y \quad \cos t=\frac{y}{1-\lambda}$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$x^2 + y^2 = r^2$

$(1-\lambda)\alpha(t) + \lambda t l \to$ noktalar

$\to$ koni içi bir

$\alpha(t) + \lambda u \to$ silindir

küre $\to$ $ax+by+cz+d=0$ $\quad 2r = \dfrac{|d-h|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
$ax+by+cz+h=0$

* $A(-1,3,2)$ noktasına 2 br uzaklıkta olan noktaların geometrik yer denklemi?

$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4$ $\quad x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+10=0$ küresi

* Genel denklemi $x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+12=0$ olan kürenin merkezi ve yarıçapı? $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 - 4-1-16+12=0$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=9$ $\quad M(2,-1,4)$ $r=3$ olan küre

* $M(3,1,-2)$ ve $2x+y-2z+16=0$ düzlemine teğet geçen kürenin denk.?

$r = \dfrac{|6+1+4+16|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 9$

* $x^2+y^2+z^2-2x+2y-22=0$ (küre) ile $\dfrac{x-1}{2} = y+1 = z$ (doğru) ortak nok.

$\dfrac{x-1}{2} = y+1 = z = t$ $\quad x-1=2t \quad x=2t+1$
$y+1=t \quad y=t-1$
$z=t \quad z=t$

$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=24$

$(2t)^2+t^2+t^2=24$ $\to$ $t=-2$ $\quad A(-3,-3,-2)$
$t=2$ $\quad B(5,1,2)$

$t=\mp 2$

$M(1,-1,0)$

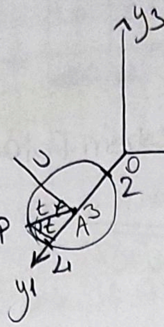
①

* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (3+\sin t, 0, \cos t)$ old. göre bu eğriyi çiziniz.

$y_1 O y_3$ düzleminde bir eğridir.

$y_1 = \alpha_1(t) = 3+\sin t$
$y_2 = \alpha_2(t) = 0$
$y_3 = \alpha_3(t) = \cos t$

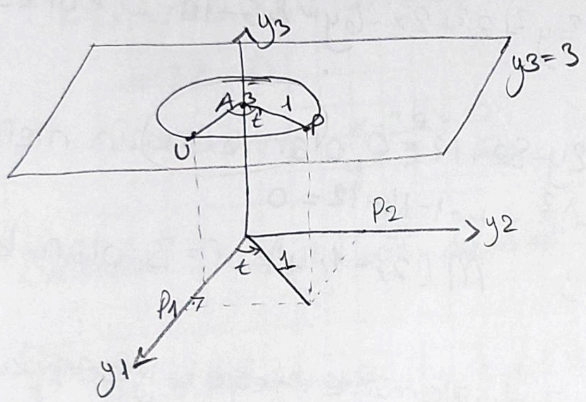
$y_1 - 3 = \sin t$
$y_3 = \cos t$



$(y_1-3)^2 + y_3^2 = 1$
$(3,0,0)$ merkezli
1 yarıçaplı çember.

UAP açısının radyan olarak ölçüsü t'dir.

* $y_3 = 3$ düzleminde merkezi Oy_3 ekseni üstünde bulunan ve yarıçapı 1 olan çember S olsun. $\alpha(I) = S$ o.s. $\alpha : I \to S$ fonk. bulunuz.



$P_1 = \cos t$
$P_2 = \sin t$
$P_3 = 3$

$\alpha : \mathbb{R} \to S \subset \mathbb{R}^3$
$t \to \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 3)$
$I = [0, 2\pi)$
$\alpha : I \to S$
$t \to \alpha(t)$
$\alpha(I) = S$

$\sin 2x = 2s x . c x$
$\cos 2x = c^2x - s^2x = 1 - 2s^2 = 2c^2 - 1$

* a) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\sin t, \sin 2t)$ old. göre bu eğriyi çiziniz.
b) $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$; $\beta(t) = (\sin t, \sin 2t, t)$ olsaydı $\beta(\mathbb{R})$ nasıl olurdu?

$t \in [0, \pi/4]$ $\quad t = 0 \to \alpha(0) = (0,0)$
$\qquad t = \pi/4 \to \alpha(\pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

$t \in [\pi/4, \pi/2]$ $\quad t = \pi/2 \to \alpha(\pi/2) = (1,0)$

$t \in [\pi/2, 3\pi/4]$ $\quad t = 3\pi/4 \to \alpha(3\pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$

⋮