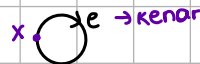


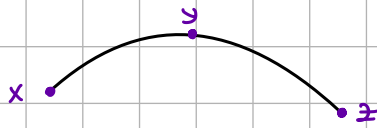
TAKE
NOTE

$$E(6) = \{e_1, e_2, \dots, e_7\}$$

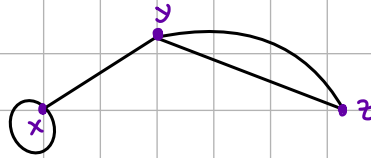
TANIM : (LOOP): DÜĞÜM: Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan kenara **düğüm** denir.



TANIM : (BASİT GRAF) : Düğüm ve göçü kenara sahip olmayan grafa denir

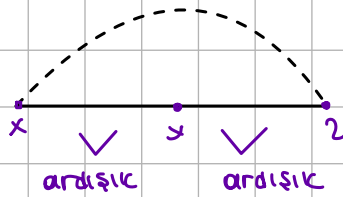


Basit Graf



Basit Graf Değil

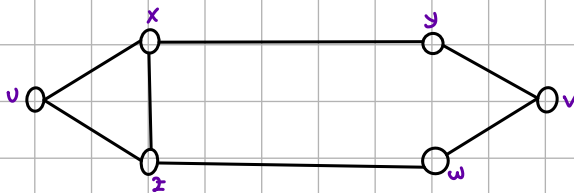
TANIM : (ARDIŞIK KÖŞE) : Bir kenarın bitiş noktaları x ve y köşeleri olmak üzere bu köşelere, **ardışık** ya da **komşu köşeler** denir. Bu durum $x \leftrightarrow y$ şeklinde gösterilir.



GRAFLARLA MODELLEME

ÖRNEK : Tanışıklık ilişkileri ve Alt graflar

6 kişilik bir grupta 3 karşılıklı tanışıklık ya da 3 karşılıklı yabancılık oluşturabilir mi? Her bir köşe ve her bir tanışıklığı da kenar ile ilişkilendirelim :



$\{x, v, z\} \rightarrow$ karşılıklı tanışıklık

$\{v, y, w\} \rightarrow$ yabancılık

TANIM : Bir G grafinin tümleyeni $\bar{G}$ ile gösterilir. $\bar{G}$ tümleyen grafi, köşe grafi $V(\bar{G}) = V(G)$ olan ve kenarları aşağıdaki bağıntı ile tanımlanan graftır.

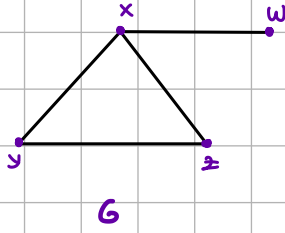
$$uv \in E(\bar{G}) \Leftrightarrow uv \notin E(G)$$

NOT:



$uv \rightarrow$ kenar olarak gösterilir

ÖRNEK:



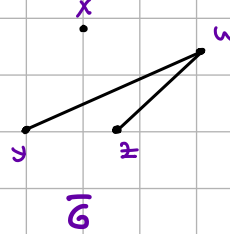
G grafinın tümleyenini çiziniz.

(noktaları rastgele koyduk)

J

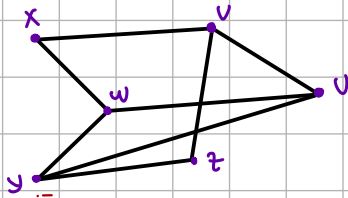
$$V(G) = \{x, y, z, w\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$



$$V(\bar{G}) = \{x, y, z, w\}$$

$$E(\bar{G}) = \{e_1, e_2\}$$



1. örneğin tümleyeni

OLMAYACAK

$$x-z \quad y-v \quad w-v$$

$$x-u \quad z-u$$

$$x-y \quad z-w$$

$$w-v$$

TANIM: Karşılıklı birbirleriyle eşleşen ardışık köşelerin kümesine bir grafin takımı denir.

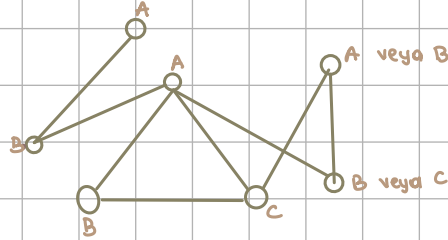
Karşılıklı eşleşmeyen yani ardışık olmayan köşelerin kümesine de bağımsız küme denir.

TANIM: Bir G grafi için, G'nin $V(G)$ köşe kümesi iki ayrık bağımsız kümenin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa bu grafa iki parçalı graf denir.

ÖRNEK (Graf Boyama): Haftalık toplantı planı için ;

iki komitenin ortak bir üyesi varsa bu komitelerin toplantıları aynı zaman diliminde olamaz. Peki en az ne kadar zaman dilimine ihtiyaç var?

Öncelikle 7 komitenin bulunduğu bir meclisin modellemesini aşağıdaki graf ile verelim.



→ en az 3 farklı saat gerekiyor (A,B,C)

→ zaman dilimleri (A,B,C) en az 3 tane lazım

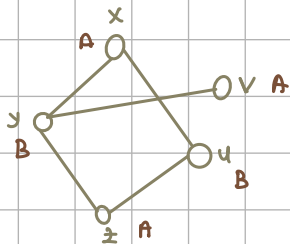
Her bir köşeyi komite ifade etmektedir. Her bir kenar da bitiş noktalarındaki komitelerde ortak bir üyenin olduğunu temsil etmektedir.

TANIM: Bir G grafının **kromatik sayısı** ; ardışık köşeler farklı renklere sahip olacak şekilde köşelerin boyanması için gerekli olan minimum renk sayısıdır. $\chi(G)$ ile gösterilir.

TANIM: Bir G grafı için eğer $V(G)$ köşe kümesi, k -tane bağımsız kümenin birleşimi şeklinde ifade edilebiliyorsa bu G grafına **k -parçalı** denir.

NOT: Aynı renge sahip köşeler bir bağımsız küme oluşturur. Dolayısıyla grafın $\chi(G)$ kromatik sayısı $V(G)$ köşe kümesini parçalamak için gerekli olan min. bağımsız küme sayısını verir.

ÖRNEK: Aşağıdaki grafın kromatik sayısı? Köşe kümelerini yazınız. Bağımsız kümeleri bul.



$\chi(G)$ Kromatik Sayısı : 2

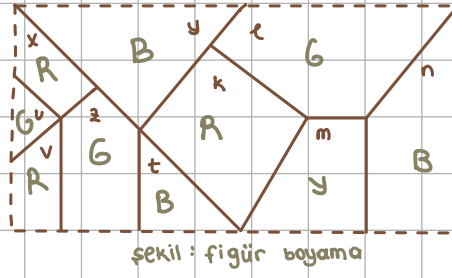
$$V(G) = \{x, y, z, u, v, w\}$$

Aynı renge sahip olanlar bağımsız küme :

$$\{x, z, v\}, \{y, u, w\}$$

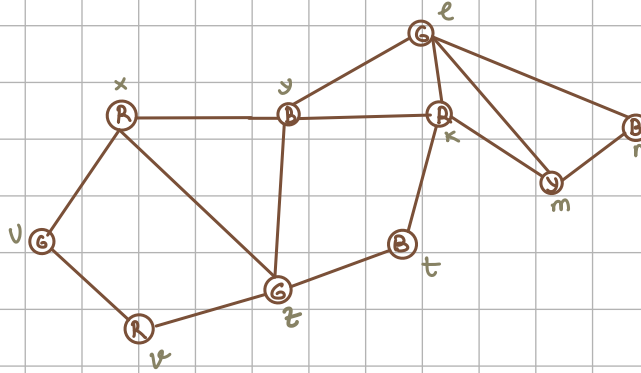
ÖRNEK : (Figürler ve Boyama): Figür (map) , uzayın bir kısmını bağlantılı bölgelere ayırmadır.

Bir figürü , komşu bölgeler farklı renk olacak şekilde en fazla 4 renk olacak şekilde boyayabilir miyiz?



şekil : figür boyama

Figür boyamayı graf boyama ile eşleştirmek için ; her bir bölgeye bir köşe ve sınırlara ise kenar diyeceğiz.

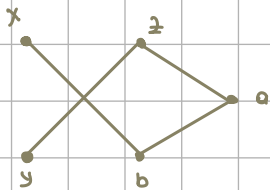


→ figürün grafa dönüştürülmüş hali

şekil : graf

TANIM (PATH) YOL : köşeleri aşağıdaki kurala göre sıralanabilen basit graflara yol denir.

iki köşe ardışıktır $\Leftrightarrow$ bu köşeler listede ard arda gelir

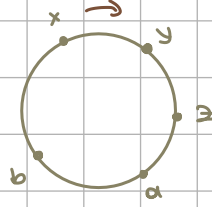
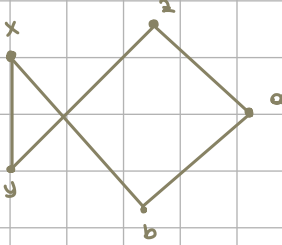


x ile başlarsak ; x, b, a, z, y yolu

y ile başlarsak ; y, z, a, b, x yolu

TANIM : Cycle (Döngü): Köşe ve kenar sayıları eşit olan grafa denir.

bir döngünün iki köşesi aralıktır $\Leftrightarrow$ bu köşeler bir çemberin üzerine
dizildiğinde birbirlerinin ardında gelirler

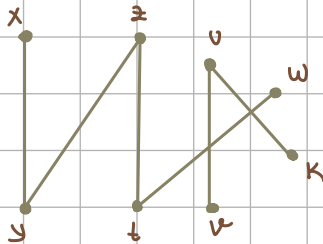


NOT : Döngüde bir kenar silindiğinde bir yol elde edilir.

TANIM : (Alt Graf) : Bir G grafi için $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ ve H daki kenarların
bitiş noktaları G deki ile aynı ise H grafinin G nin bir **alt grafi** denir.

TANIM : BAĞLANTILILIK : Bir G grafi için , eğer G deki her köşe çifti bir yola ait ise G ye
bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantılı değildir.

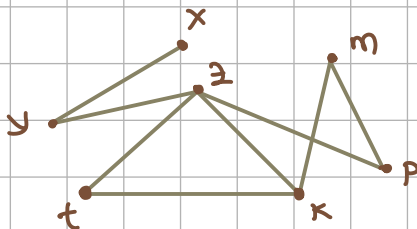
Örneğin ;



$\rightarrow$ u ve w köşelerini içeren bir yol yok
 $\rightarrow$ bağlantılı değil

$\hookrightarrow$ sınavda sadece
değil yazma , neden değil
açıkla

ÖRNEK :

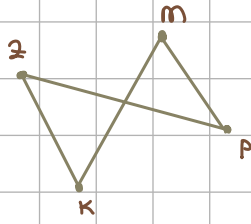


Bağlantılı mı?

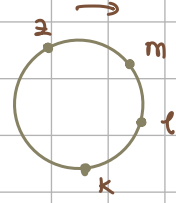
Evet , bağlantılı . yani bir köşeden
herhangi bir başka köşeye gidebilirsiniz .

ÖRNEK:

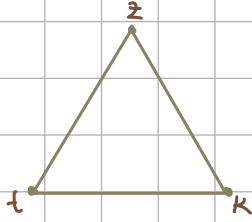
H_1 :



$H_1 \subseteq G$ alt grafidır.
Döngüdür.

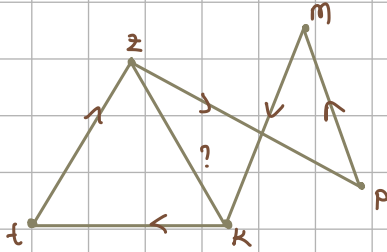


H_2 :



$H_2 \subseteq G$ alt grafidır. Bu da döngüdür.

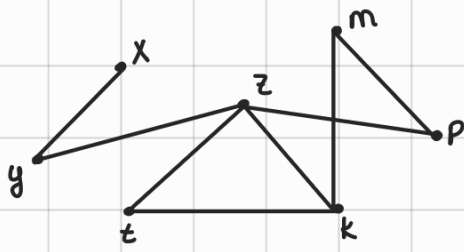
H_3 :



$H_3 \subseteq G$ alt grafidır.

Döngü değil. Bir kenar başta kalıyor.

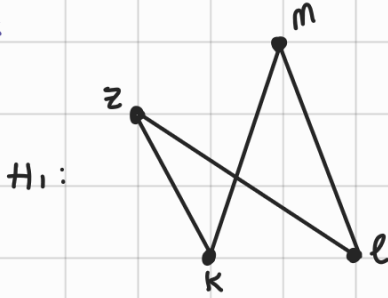
ÖR:



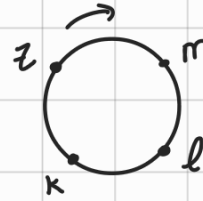
Bağlantılı mı?

Bağlantılı. Yani, bir köşeden herhangi bir başka köşeye gidebilirsiniz.

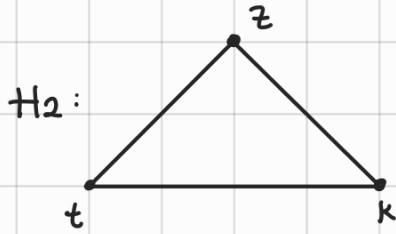
ÖR:

 H_1 : $H_1 \subseteq G$ alt grafi

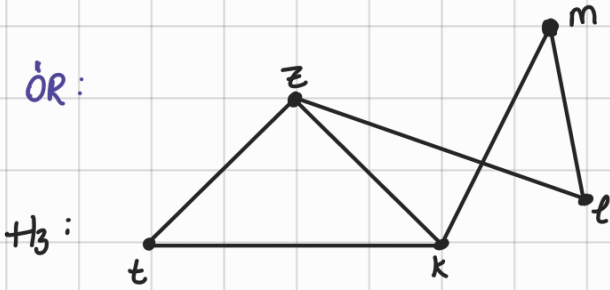
Döngüdür



ÖR:

 H_2 : $H_2 \subseteq G$ 'dir. Bu da doğrudur.

ÖR:

 H_3 :

$H_3 \subseteq G$ 'dir. Döngü değil
(çember atınca bir kenarı
gösteremiyoruz)

09.10.2024

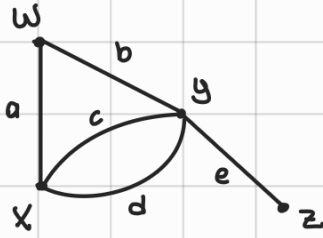
Matrisler ve İzomorfizm

Tanım: G , köşe kümesi $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{e_1, \dots, e_n\}$ olan düğümsüz (çoklu kenar olabilir ancak düğüm içermeyecek) bir graf olsun. G grafının komşuluk matrisi $A(G)$.

a_{ij} girdileri G 'de $\{v_i, v_j\}$ bitiş noktalarına sahip kenarların sayısı olarak tanımlanan $n \times n$ tipinde bir matristir. G 'nin ilişki matrisi $M(G)$ ise: m_{ij} girdileri, v_j, e_j 'nin bir bitiş noktası

ise 1; aksi halde 0 değerini alan $n \times m$ tipinde bir matristir. Eğer u köşesi, e kenarının bir bitiş noktası ise, u ve e 'ye bağlı ya da ilişkili denir. Düzgümsüz bir grafta u köşesinin derecesi ilişkili kenarların sayısı olarak tanımlanır.

ÖR: Aşağı verilen düzgümsüz G grafi için, $\{w, x, y, z\}$ köşe sıralaması ve $\{a, b, c, d, e\}$ kenar sıralamasına göre G 'nin komşuluk ve ilişki matrisini bulun.



$A(G) \rightarrow$ komşuluk matrisi

	w	x	y	z
w	0	1	1	0
x	1	0	2	0
y	1	2	0	1
z	0	0	1	0

(aralarındaki kenar sayısı)

4x4

$M(G)$ (ilişki matrisi)

	a	b	c	d	e	$\rightarrow$ (kenar)
w	1	1	0	0	0	
x	1	0	1	1	0	
y	0	1	1	1	1	
z	0	0	0	0	1	

1 $\rightarrow$ var 0 $\rightarrow$ yok

4x5

$\downarrow$
(köşe)

NOT: Bir komşuluk matrisi, köşe sıralamasına göre belirlenir. Her komşuluk matrisi simetriktir. Yani $\forall i, j$ için $A_{i,j} = A_{j,i}$ dir. Bir G grafinin komşuluk matrisinin girdileri 0 ve 1 sayılarından oluşur. Bir u köşesinin derecesi $A(G)$ veya $M(G)$ 'nin u köşesine karşılık gelen satırdaki girdilerin toplamına eşittir.

y 'nin derecesi 4'tür. Bunu hem $A(G)$ hem de $M(G)$ den bulabiliriz

1) Graf üzerinden : y köşesinden çıkan kenar sayısı 4'tür.

2) $M(G)$ 'den : y 'ye karşılık gelen satırlardaki girdilerin toplamı $(0+1+1+1+1)=4$

3) $A(G)$ 'den : " " " " " " " $(1+2+0+1)=4$

Tanım: G ve H birer basit graf olsun. $f: V(G) \rightarrow V(H)$ dönüşümü

i) 1-1 ve örten,

ii) $uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H)$

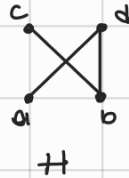
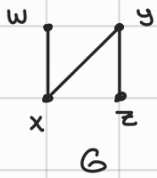
(u,v , G 'de bir kenar) ($f(u)f(v)$, H 'da bir kenar)

sartlarını sağlıyorsa f 'ye G 'den H 'ye bir izomorfizma denir.

Eğer G ve H arasında bir izomorfizma varsa " G grafi H grafinin izomorfudur" denir ve bu durum $G \cong H$ ile gösterilir.

ÖR: G ve H grafları as. çizilen 4 köşeli yollar olsun. $f: V(G) \rightarrow V(H)$ fonk. u

$f(w)=a$, $f(x)=d$, $f(y)=b$, $f(z)=c$ şeklinde tanımlansın



1) $\{w, x, y, z\}$ sıralamasına karşılık gelen

$A(G)$ (komşuluk) bulalım.

$$A(G) = \begin{pmatrix} & w & x & y & z \\ w & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $\{w, x, y, z\}$ sıralamasını, f

altındaki görüntüleri $\{a, b, c, d\}$

olarak değiştir. Yani $\{w, x, y, z\}$

ye göre komşuluk mat. bul.

$$A(H) = \begin{pmatrix} & w & y & z & x \\ w & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y & 0 & 0 & 1 & 1 \\ z & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Belirlenen $\{a, b, c, d\}$ sıralamasına

göre $A(H)$ (komşuluk) bulalım.

$$A(H) = \begin{pmatrix} & f(w) & f(y) & f(z) & f(x) \\ & a & b & c & d \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. ve 3. adımdaki matris aynı ise f , bir izomorfizmdir.

Önerme: İzomorf olma bağıntısı, basit graflar üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

14.10.2024

İspat: G ve H iki basit graf ise $G \sim H \Leftrightarrow G \cong H$

Şimdi bu $\sim$ bağıntısının bir denklik bağıntısı old. gösterelim

Yani yansıma, simetri, geçişme öz sağlanmalı.

$$\left[\begin{array}{l} a \sim a \text{ yansıma} \\ a \sim b \Rightarrow b \sim a \text{ simetri} \\ a \sim b \text{ ve } b \sim c \Rightarrow a \sim c \text{ geçişme} \end{array} \right]$$

Yansıma: $f, V(G)$ üzerinde birim dönüşüm olsun. Yani; $\forall u \in V(G)$ için

$f(u) = u$ olsun. B.t

$f: V(G) \rightarrow V(G)$, 1-1 ve örten olup aynı zamanda $\forall uv \in E(G)$

için $f(u)f(v) = uv \in E(G)$ old. dan f , G 'den G 'ye bir izomorfizmdir.

$G \cong G$ old. dan $G \sim G$ olup, $\sim$ yansıma öz sağlar

Simetri: $G \sim H$ olsun. $G \cong H$ dir. Yani, G 'den H 'ye bir f izomorfizmi vardır.

f^{-1} dönüşümü de H 'den G 'ye bir izomorfizmdir. O halde $H \cong G$ dir. Yani,

$H \sim G$ olup, $\sim$ simetri öz sağlar

Geçişme öz: Kabul edelim ki $G \sim H$ ve $H \sim K$ olsun. Yani $G \cong H$ ve

$H \cong K$ dir. Bunun anlamı, $f: G \rightarrow H$ ve $g: H \rightarrow K$ izomorfizmleri vardır.

$g \circ f: G \rightarrow K$ dönüşümünün bir izomorfizm old. gösterelim

1) f ve g 1-1 ve örten $g \circ f$ de 1-1 ve örtendir.

2) $uv \in E(G)$ alalım

$(g \circ f)(u)(g \circ f)(v) \in E(K)$ old. göstereceğiz

$(g \circ f)(u)(g \circ f)(v) = g(f(u))g(f(v))$ elde edilir ... (i)

ÖNERME : izomorf olma bağıntısı, basit graflar üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İSPAT : G ve H iki basit graf ise $G \sim H \Leftrightarrow G \cong H$. Şimdi bu $\sim$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.

Yani yansımaya, simetri, geçişme özelliklerini sağlanmalı.

$a \sim a$ yansımaya

$a \sim b \Rightarrow b \sim a$ simetri

$a \sim b$ ve $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ geçişme

YANSIMA: $f, V(G)$ üzerinde bir birim dönüşüm olsun. Yani $\forall v \in V(G)$ için $f(v) = v$ olsun. Bu takdirde

$$f: V(G) \rightarrow V(G)$$

1-1 ve örten olup aynı zamanda $\forall uv \in E(G)$ için

$$f(u)f(v) = uv \in E(G)$$

olduğundan f, G den G ye bir izomorfizmdir.

$G \cong G$ olduğundan $G \sim G$ olup, $\sim$ yansımaya özelliği sağlar.

SİMETRİ : $G \sim H$ olsun. $G \cong H$ dir. Yani G den H ye bir f izomorfizmi vardır. f^{-1} dönüşümü de H den G ye bir izomorfizmdir. O halde $H \cong G$ dir. Yani $H \sim G$ olup $\sim$ simetri özelliğini sağlar.

GEÇİŞME ÖZELLİĞİ : Kabul edelim ki $G \sim H$ ve $H \sim K$ olsun. Yani $G \cong H$ ve $H \cong K$ dir. Bunun anlamı $f: G \rightarrow H$ ve $g: H \rightarrow K$ izomorfizmleri vardır.

$g \circ f: G \rightarrow K$ dönüşümünün bir izomorfizm olduğunu gösterelim.

1) f ve g 1-1 ve örten $g \circ f$ de 1-1 ve örtendir.

2) $uv \in E(G)$ alalım.

$(g \circ f)(u) (g \circ f)(v) \in E(K)$ olduğunu göstereceğiz.

$$(g \circ f)(u) (g \circ f)(v) = g(f(u)) g(f(v)) \quad \dots (i)$$

elde edilir.

$f: G \rightarrow H$ izomorfizm olduğundan $u, v \in E(G)$ için $f(u) f(v) \in E(H)$ dir.

$$f(u) = u' \quad f(v) = v'$$

olsun. $u' v' \in E(H)$ dir.

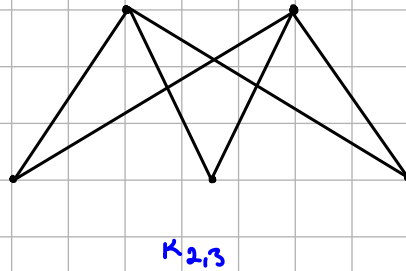
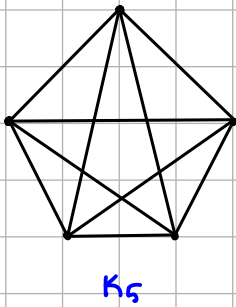
Yine $g: H \rightarrow K$ izomorfizm olduğundan $u' v' \in E(H)$ için $g(u') g(v') \in E(K)$ dir.

$$g(u') g(v') = g(f(u)) g(f(v)) \in E(K) \quad \dots (ii)$$

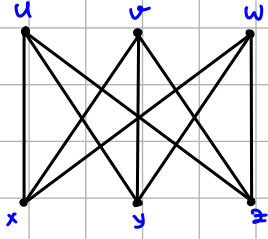
(i) ve (ii) den geçişme özelliği sağlanır.

TANIM:

- i) n köşeye sahip yol P_n ile gösterilir
- ii) n köşeye sahip döngü C_n ile gösterilir.
- iii) Tüm köşeleri ikililer halinde ardışık olan bir basit grafa **tam graf** denir.
- iv) n köşeye sahip tam graf K_n ile gösterilir.
- v) Ardışık köşeleri farklı parçalanışlarda bulunan basit iki parçalı graflara **tam iki parçalı graf** denir.
- vi) Parçalanış kümelerindeki köşe sayıları r ve s olan tam iki parçalı graf $K_{r,s}$ ile gösterilir.

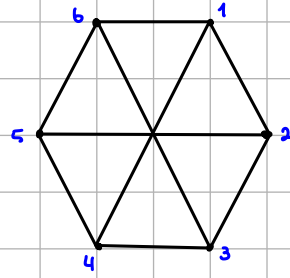


ÖRNEK:



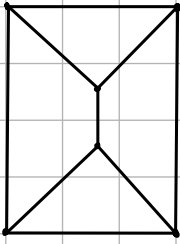
G_1

$\{u, v, w\} \rightarrow 2$ parçalı graf
 $\{x, y, z\}$

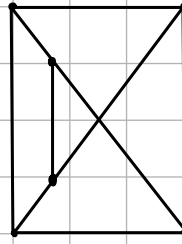


G_2

$\{1,3,5\} \rightarrow 2$ parçalı graf
 $\{2,4,6\}$



G_3



G_4

Hepsi 6 köşe 9 kenara sahip.

* $G_1 \cong G_2$ olduğunu gösterelim.

$f: G_1 \rightarrow G_2$ dönüşümü $f(u)=1$, $f(v)=3$, $f(w)=5$, $f(x)=2$, $f(y)=4$, $f(z)=6$ şeklinde tanımlayalım.

Bu bir izomorfizmdir, gösterin.

sınavda çıkabilir ←

	u	v	w	x	y	z
u	0	0	0	1	1	1
v	0	0	0	1	1	1
w	0	0	0	1	1	1
x	1	1	1	0	0	0
y	1	1	1	0	0	0
z	1	1	1	0	0	0

$= A(G_1)$

	1	3	5	2	4	6
1	0	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	1	1	1
2	1	1	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0

$= A(G_2)$

$G_1 \cong G_2$

ÖDEV : $G_1 \not\cong G_3$ yani izomorf değil, göster.

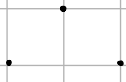
ÖRNEK: (n köşeli grafların sayısı) n elemanlı bir kümeden iki köşe seçilirken, bir köşe seçer sonra da diğeri seçilir fakat sıralama önemsizdir. Bu şekilde yapıldığında $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ seçim yapılır.

(Buna n -nin 2-li kombinasyonu denir ve $\binom{n}{2}$ ile gösterilir.) $\left[\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n-m)!} \right]$

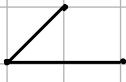
Köşe kümesi n elemanlı X kümesi olan bir basit graptan, her köşe ikilisi bir kenar oluşturabilir ya da oluşturmayabilir. Her ikili için yapılan seçim grafi belirler.

Yani, köşe kümesi X olan basit grafların sayısı $2^{\binom{n}{2}}$ dir.

Örneğin; 3 köşeye sahip 8 basit graf vardır. $2^{\binom{3}{2}} = 8$ tane.

 Hiç kenar olmayan (1 tane $\rightarrow \binom{3}{0} = 1$)

 1 tane kenar olanlar (3 tane $\rightarrow \binom{3}{1} = 3$)

 2 tane kenar olanlar (3 tane $\rightarrow \binom{3}{2} = 3$)

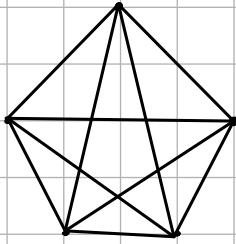
 3 tane kenar olanlar (1 tane $\rightarrow \binom{3}{3} = 1$)

NOT: 3 elemanlı olan bir kümenin alt küme sayısını bulmak gibi.

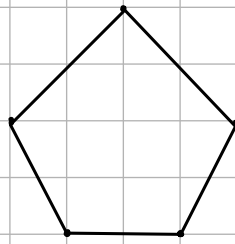
AYRISMA VE ÖZEL GRAFLAR

TANIM: Eğer bir graf tümleyenine izomorf ise bu grafa **kendine tümleyen** denir. Bir grafın **ayrışımı** her kenar listedeki yalnızca bir alt grafa yer alacak şekilde alt grafların bir listesidir.

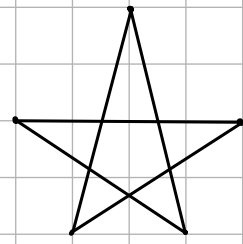
ÖRNEK:



K_5



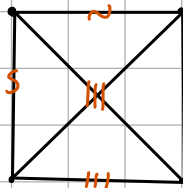
C_5 (5 döngü)



C_5 (5-döngü)

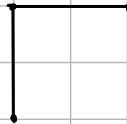
Burada iki alt graf vardır ve alt graflardaki **her bir kenar** yalnızca o alt grafa aittir.

ÖRNEK:

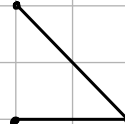


K_4

K_4 kaç tane P_3 e ayrıştırılabilir. Gösterin.



P_3



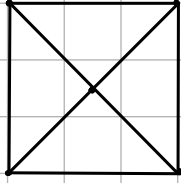
P_3



P_3

3 tane P_3 'e ayrıştırılabilir.

ÖRNEK :

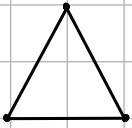


Şekildeki 5 köşeli grafi P_3 kopyalarına ayırdınn.

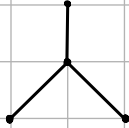


4 tane P_3 'e ayrıştırıldı.

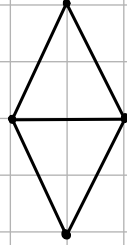
NOT : Bazı özel graflar ve isimleri ;



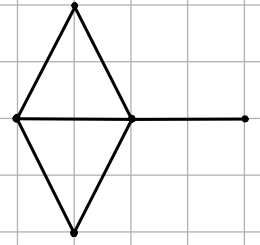
K_3 (üçgen)



$K_{1,3}$ (pençe)



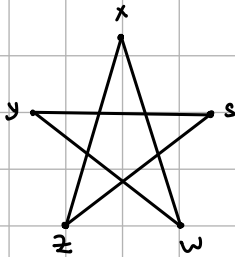
uçurtma



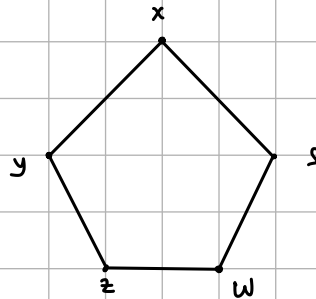
ok

SORULAR

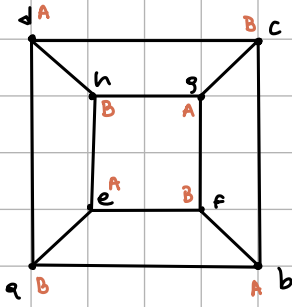
1)



Tümleyeni ?



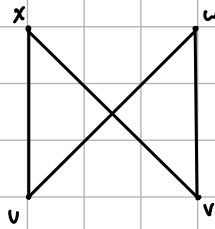
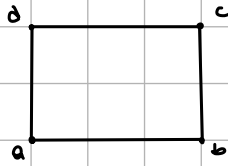
2)



Şekildeki 8 köşeli grafin kromatik sayısını bulun.

Kullanılan renk sayısı = 2 (A ve B)

3)



G ve H graflarının izomorf olduğunu göster.

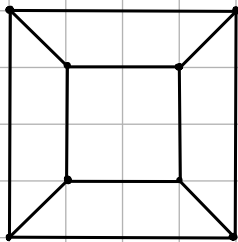
$f: G \rightarrow H$ izomorf olduğunu göster.

$$\begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = A(G)$$

$$\begin{matrix} & x & u & w & v \\ \begin{matrix} f(a) \\ f(b) \\ f(c) \\ f(d) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = A(H)$$

$A(G) = A(H)$ olduğundan izomorftur.

4)



8 köşeli grafini $K_{4,3}$ 'ün kopyalarına ayırıştırın.

$K_{4,3}$: bir tanesi tek diğeri ayrık 3 köşeye bağlanır

4 tane $K_{4,3}$ -e ayırıştırılır.

ÖDEV : P_4 -ün kopyalarına ayırıştır.

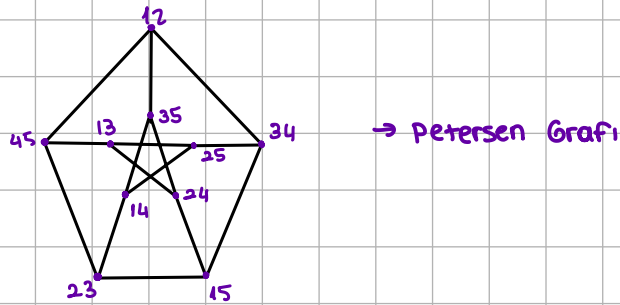
TANIM: Köşeleri 5 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümeleri ve kenarlar ; ayrık 2 elemanlı alt kümelerinin çiftleri olan basit grafa **Petersen Grafı** denir.

ÖRNEK: Petersen Grafının Yapısı : $[5] = \{1,2,3,4,5\}$ kümesini ele alalım. iki elemanlı alt kümeleri $\{a,b\} = ab$ ya da $\{a,b\} = ba$ ile ifade edelim. Bu takdirde $[5]$ kümesinin iki elemanlı alt kümelerini kullanarak Petersen grafının **köşe kümesi**;

$$\{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}$$

Kenarlar ayrık 2 iki elemanlı alt kümeler arasından oluşur.

Örneğin 12 ve 13 ayrık değildir. Çünkü ikisi de 1 içeriyor. Dolayısıyla 12 ve 13 arasında kenar oluşmaz. Ancak 12 ve 34 ayrık olduğundan bunlar arasında kenar vardır.



ÖNERME: Petersen Grafındaki ardışık olmayan her iki köşe yalnızca bir ortak komşuya sahiptir.

İSPAT: Ardışık olmayan köşeler ayrık olmayan, yani ortak bir elemana sahip köşelerdir. (örneğin; 13, 34 gibi) Bunların birleşimi 3 elemanlıdır. (134 gibi). Eğer bir köşe bu iki köşeye de ardışık olacaksa 2 elemanlı alt küme olarak bu iki köşeden de ayrık olmalıdır. 5 elemanlı bir kümeden seçim yapıldığından, bu şartı sağlayan yalnızca 1 tane 2 elemanlı alt küme bulunabilir. (örneğin; $\{1,3,4\}$ için $\{2,5\}$)

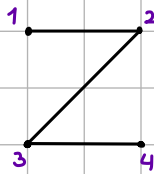
TANIM: Döngü içeren bir grafın çevre uzunluğu bu grafın en kısa döngüsünün uzunluğu olarak tanımlanır. Döngü içermeyen bir grafın çevre uzunluğu **sonsuz** olarak kabul ediliyor.

SONUÇ: Petersen Grafının çevre uzunluğu 5'tir.

İSPAT: Petersen Grafı bir basit graftır. Dolayısıyla düğüm (1-döngü) ve çoklu kenar (2-döngü) içermez. Eğer 3 döngü içerseydi, bu takdirde kendi aralarında ayrık olan iki elemanlı kümeler olmalıydı. Fakat 5-elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinden her biri kendi aralarında ayrık olacak şekilde 3 alt küme yazılamaz. Dolayısıyla bu graf 3-döngü de içermez. 3-döngünün olmadığı bu gratta 4-döngü olması için iki tane ortak komşuya sahip ardışık olmayan köşeye ihtiyaç duyulur. Bu da mümkün değil. Yani sonuç olarak; 12, 34, 15, 23, 45 köşeleri bir 5-döngü oluşturulur.

TANIM: G grafından G grafına izomorfizme G nin bir **otomorfizmi** denir. $\forall u, v \in V(G)$ çifti için u ya v ye dönüştüren bir otomorfizm mevcutsa G ye **köşe geçislidir** denir.

ÖRNEK: (otomorfizmler) G grafı, köşe kümesi $\{1, 2, 3, 4\}$ ve kenar kümesi de $\{12, 23, 34\}$ olan yol olsun.



Bu grafın 2 otomorfizmi vardır.

$$f_1: G \rightarrow G, \quad f_1(1) = 1, \quad f_1(2) = 2, \quad f_1(3) = 3, \quad f_1(4) = 4$$

$$f_2: G \rightarrow G, \quad f_2(1) = 4, \quad f_2(2) = 3, \quad f_2(3) = 2, \quad f_2(4) = 1$$

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

f_1 için $1 \rightarrow 1 \quad 2 \rightarrow 2 \quad 3 \rightarrow 3 \quad 4 \rightarrow 4$
yer değiştirirsek $A(G)$ değişmez.

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

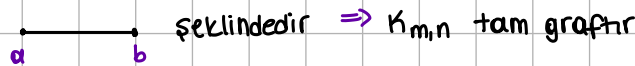
$A(G)$ değişmediğinden f_2 - otomorfizmdir.

SORULAR

1) Tam iki parçalı $K_{m,n}$ grafi bir tam graftır $\Leftrightarrow m=n=1$ ya da $\{m,n\} = \{1,0\}$

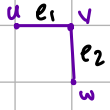
" $\Rightarrow$ ": $K_{m,n}$ bir tam graf olsun. Kabul edelim ki m ve n den en az biri 1 den büyük olsun. $m > 1$ ve $n = 1$ olsun. Bu durumda $K_{m,n}$ iki ayrık graftan oluşur. $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $\{b\}$ iki parçalı graf tanım gereği $a_1, a_2, \dots, a_m$ birbirleri ile arasıık değildir. O halde $K_{m,n}$ tam graf değildir, bu ise çelişkidir. Sonuç olarak $m > 1$ olamaz, bu durumda $m=n=1$ ya da $m=0, n=1$ elde edilir.

" $\Leftarrow$ ": i) $m=n=1$ olsun. $K_{m,n}$ nin köşe kümeleri $\{a\}$ ve $\{b\}$ şeklinde ayrıştırılır



ii) $m=1, n=0$
veya
 $m=0, n=1$ } ise $K_{m,n}$ tek köşeden oluşan bir graftır ve bir tam graftır.

2) 3 köşeli bir yol için olası tüm komşuluk ve ilişki matrislerini yazınız. Ayrıca 6 köşeli bir yol ve döngünün komşuluk matrislerini yazınız.



$$A_1(b) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u & v & w \end{matrix} \\ \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A_2(b) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u & w & v \end{matrix} \\ \begin{matrix} u \\ w \\ v \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A_3(b) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & u & w \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ u \\ w \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

komşuluk matrisleri $\leftarrow A_1, A_2, A_3$ matrislerini verir

vuw, wuv, wvu

$$M_1(b) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ v \\ w \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M_2(b) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ v \\ w \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

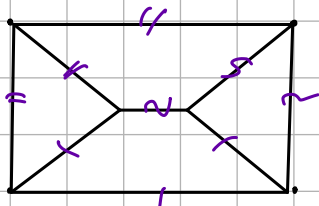
$$M_3(b) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ v \\ w \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M_4(b) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ v \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M_5(b) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} w \\ v \\ v \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M_6(b) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} w \\ v \\ v \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

3) Aşağıdaki grafi P_4 'ün kopyalarına ayırınız.



P_4 'ün 3 kopyasına ayırıldı

4) Girdilerinin tümü aynı olan dörtgensel blokları kullanarak $K_{m,n}$ için bir ilişki matrisi yazınız.

$m+n$ tane köşe var

$K_{m,n}$ -nin köşe kümeleri $V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ve $V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ şeklindedir. V_1 içindeki ve V_2 içindeki köşeler kenar oluşturmaz.

V_1 deki köşeler ve V_2 deki köşeler kenar oluşturur.

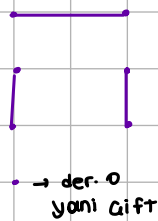
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & u_1 & u_2 & \dots & u_m & v_1 & v_2 & \dots & v_m \\
 \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & & \vdots & 1 & 1 & & \vdots \\ & & 0 & & \vdots & & 1 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

$(m+n) \times (m+n)$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

5) Her birinin derecesi tek olacak şekilde, b dan fazla köşeye sahip bir grafin 3 tane yola ayrıştırılmayacağını kanıtlayınız.



Derecesi tek olduğunda o köşeden

1, 3, 5, ... şeklinde kenar çıkar.

Hiç kenar çıkarmazsa derecesi 0 olur.

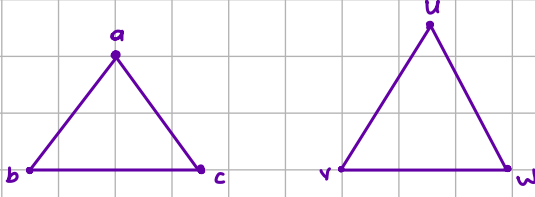
Yani çift olur. Dolayısıyla en az bir

yolun bitim noktası olmalıdır. Dolayısıyla

b -dan fazla köşe olunca 3 yol elde

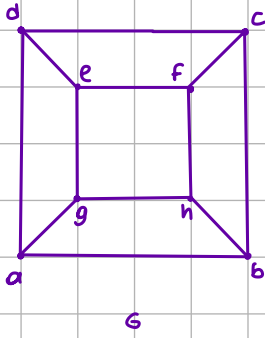
edilemez.

6) G bir basit graf olsun. G nin her bir köşesinin derecesi 2 ise G nin bir döngü olup olmadığını gösterin.

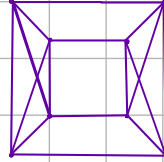


Eğer graf iki ayrı 3-döngüden oluşursa grafın kendisi döngü olmaz ama parçaları döngü olur.

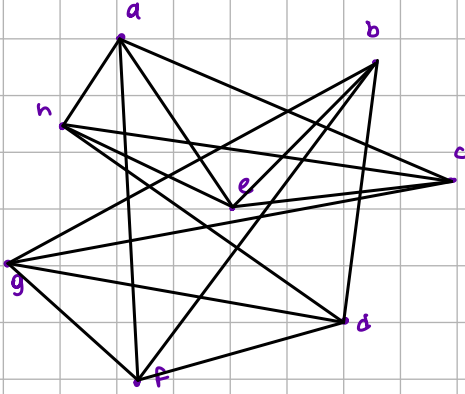
ÖDEV :



G nin tümleyenini bulunuz ve $\bar{G}$ nin



H grafına izomorf olduğunu gösteriniz.



$A(\bar{G}) =$

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	0	1	0	1	1	0	1
b	0	0	0	1	1	1	1	0
c	1	0	0	0	1	0	1	1
d	0	1	0	0	0	1	1	1
e	1	1	1	0	0	0	0	1
f	1	1	0	1	0	0	1	0
g	0	1	1	1	0	1	0	0
h	1	0	1	1	1	0	0	0

İKİ PARÇALI GRAFLAR

NOT: Bir düğüm, uzunluğu 1 olan bir dögüdür. Ayrıca birim noktaları aynı olan ayrık iki kenar, uzunluğu 2 olan bir dögü oluşturur.

Bir yürüyüşün uzunluğu tek ise bu yürüyüşe tek yürüyüş, çift ise çift yürüyüş denir.

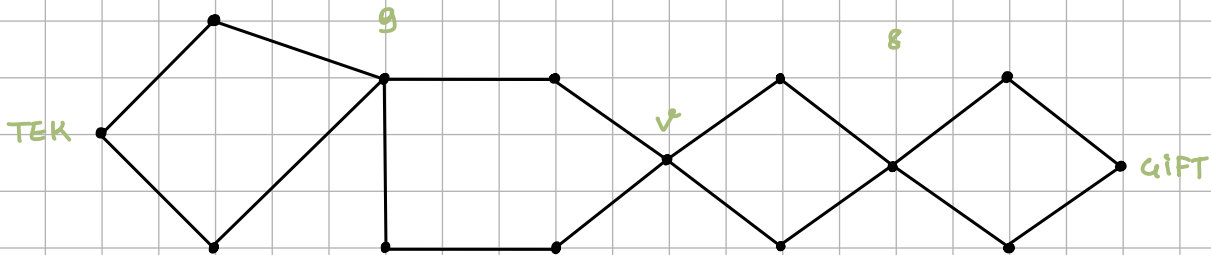
ÖNERME: Her kapalı tek yürüyüş tek uzunluklu bir dögü içerir.

İSPAT: w , uzunluğu ℓ olan tek yürüyüş olsun. Yani ℓ tek tir. ℓ üzerinden tümevarım yapalım.

$\ell = 1$ olsun. w yürüyüşü bir 1- dögüdür. Dolayısıyla bir tek dögüdür. Kabul edelim ki $1 \leq k \leq \ell$ için önerme doğru olsun. Önermenin ℓ için de doğru olduğunu gösterelim.

Eğer w başlangıç ve bitiş noktaları aynı olduğu durum hariç, tekrar eden bir köşeye sahip değilse, bu durumda w yürüyüşünün kendisi bir tek dögüdür. Bu durumda önerme ℓ için doğrudur.

Aksine kabul edelim ki w tekrar eden bir v köşesine sahip olsun. O halde w , iki farklı v - yürüyüşüne bölünebilir.



w nun uzunluğu tek olduğundan bu yürüyüşlerde birinin uzunluğu tek, diğertinin uzunluğu çift olmalıdır.

Yani $1 \leq k \leq \ell$ için hipotezin doğruluğu kabul edilir.

TANIM: G bir graf olsun. G grafının bir ikili parçalanışı birleşimleri $V(G)$ olan iki ayrı bağımsız kümenin belirlenmesidir. Bu parçalanış " G grafı X, Y ikili parçalanışa sahip iki parçalı graf olsun." cümlesi ile ifade edilir. X, Y ikili parçalanışına sahip bir iki parçalı grafa X, Y - bigraf denir.

TEOREM: Bir graf iki parçalıdır. Ancak ve ancak tek uzunluklu bir döngü içermez.

İSPAT: " $\Rightarrow$ " G iki parçalı bir graf olsun. İkili parçalanışı X, Y olsun. G 'deki her yürüyüş X ile Y arasında gidip gelir. Döngü oluşturmak için yürüyüş X 'de başlıyorsa Y 'ye uğrayıp tekrar X 'e dönmelidir. Ya da tam tersi olmalıdır. (Y 'den X 'e). Gidilen yol tekrar geri döneceğinden döngünün kenar sayısı çift olacaktır. O halde G , tek uzunlukta döngü içermez.

" $\Leftarrow$ " G , tek uzunluklu döngü içermeyen bir graf olsun. U , G 'nin trivial olmayan bir H bileşeninde bir köşe olsun. $\forall v \in V(H)$ için bir f fonksiyonunu $f(v)$ bir u, v - yolunun minimum uzunluğunu verecek şekilde tanımlanır.

$$X = \{ v \in V(H) : f(v) \text{ çift} \}$$

$$Y = \{ v \in V(H) : f(v) \text{ tek} \}$$

Şimdi X 'in bir bağımsız küme olduğunu gösterelim. X 'te v, w köşeleri bir kenar oluştursun. u, v - yolu ve u, w - yolunun minimum uzunlukları çifttir. (X kümesinden)

Şimdi u, v - yolunu, u, w kenarını ve u, w yolunun tersini birleştirerek bir kapalı yürüyüş oluşturalım. Bu yürüyüşün uzunluğu tekdir. Önceki önermeden tek uzunluklu her yol bir tek uzunluklu döngü içerir. Bu da G 'nin tek uzunluklu bir döngü içermemesi ile çelişir. O halde X 'in köşeleri ikili ikili kenar oluşturmaz. Bu da X 'in bağımsız küme olduğunu gösterir.

EULER DEVRELERİ

TANIM: Bir graf, tüm kenarlarını içeren bir patikaya sahipse bu grafa Euler tipi graf denir.

Kapalı bir patikaya devre denir. Bir grafa tüm kenarları içeren bir devreye Euler devresi denir.

Bir grafın tüm köşelerinin derecesi çiftse bu grafa çift graf denir.

NOT: Euler devreleri tanımı, düğüm içeren graflar için de geçerlidir. Köşe derecesi kavramı her döngü, bulunduğu köşenin derecesine 2 ekleyecek şekilde düğüm içeren graflara genişletilebilir.

TANIM: G bir graf olsun. G grafindaki P yolu kendinden daha uzun bir yolda içerilmiyorsa, bu P yoluna maksimal yol denir.

ÖNERME : Eğer bir G grafinin her köşesinin derecesi en az 2 ise G bir döngü içerir.



TEOREM :

Bir G grafi Euler tipi graftır $\Leftrightarrow G$ 'nin en az bir trival olmayan bileşeni vardır ve G bir çift graftır.

SONUÇ : Her çift graf döngülere ayrıştırılabilir.

ÖRNEK: a) izole köşe içermeyen bir bağıntısız graf bulun.

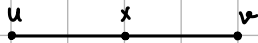
b) Bir G grafinin bir X köşesi, grafın diğer bütün köşelere bağlı ise G grafinin bağlantılı olduğunu gösteriniz.

a)



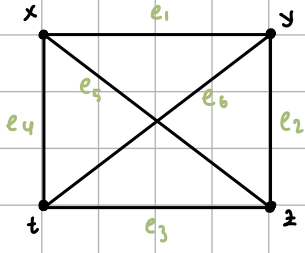
G grafi

b) Keyfi $u, v \in V(G)$ alalım. X köşesi tüm köşelerle bağlı olduğunda u, X - yolu ve X, v - yolu mevcuttur.



Bu yolların X üzerinden birleşimi bir u, v - yolu verir.

ÖRNEK :



a) K_4 grafinin patika (içinde tekrar bulunmayan) bir yürüyüş içerip içermediğini belirleyiniz.

b) K_4 grafinin kapalı olmayan ve yol olmayan bir patika içerip içermediğini belirleyiniz.

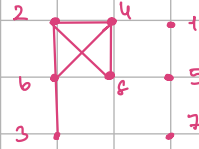
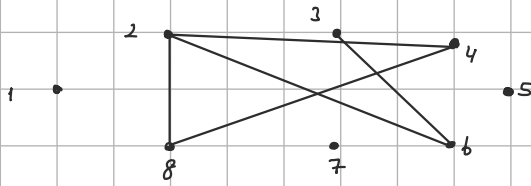
a) Bir patika içinde tekrar eden kenar bulunmayan bir yürüyüş yolu. Dolayısıyla tekrar eden bir kenara sahip yürüyüş (kenarlar da yazılır) yazmak yeterli.

$\{x, e_1, y, e_2, z, e_3, t, e_4, x\}$ listesi bir yürüyüştür. Fakat patika değildir. Dolayısıyla patika içermeyen bir yürüyüş yazılmış oldu.

b) $\{y, e_2, z, e_3, t, e_4, y, e_1, x\}$ listesine bakalım. Kapalı değil (y ile başlayıp x ile bitiş)

Patikadır çünkü tekrar eden kenar yok. y köşesi tekrar ettiğinden yol değildir.

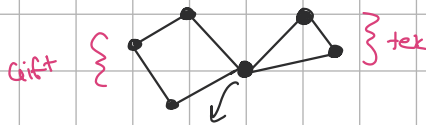
3. G grafinın köşe kümesi $\{1, 2, \dots, 8\}$ olsun. u ve v gibi iki köşenin bir kenar oluşturmaları için gerek ve yeter koşul $EboB(u, v) \neq 1$ olmasıdır. G grafinın bileşenleri ve G 'de maksimum uzunluklu bir yol bulunuz.



G 'nin bileşenleri, köşe kümeleri $\{1\}$, $\{5\}$, $\{7\}$ ve $\{2, 4, 6, 8\}$ olan alt graflardır.

Max uzunluklu yol olarak 3, 6, 2, 4, 8 alınabilir.

4. Tek sayıda kenarı, çift sayıda köşesi olan bir Euler-tipi basit graf çiziniz.



Ortak bir köşesi bulunan tek uzunluklu bir dörteği ile çift uzunluklu bir dörteğin birleşiminden oluşan graf. 6 köşe 7 kenar, basit graftır.

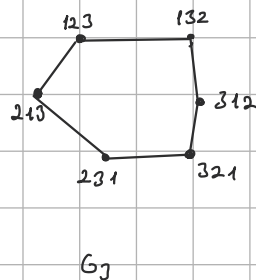
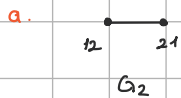
5. G_n grafi köşeleri $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesindeki elemanların permutasyonlarından oluşmaktadır.

(Örneğin: $n=3$ için permutasyonlar $(123, 132, 213, 231, 321, 312)$). $u, v \in V(G_n)$ gibi iki permutasyon bir kenar oluşturur $\Leftrightarrow u$ permutasyonundaki ardışık elemanların bir çifti yer değiştirdiğinde v permutasyonu elde edilir.

(Örneğin: $n=3$ için 123 köşesi ile 132 köşesi bir kenar oluşturur.) (123 ile 321 olmaz, $(1,2)$ ardışık olmadığı için)

a. $n=2$, $n=3$ ve $n=4$ (ödev) için G_2, G_3, G_4 graflarını çiziniz.

b. n tek ise G_n grafinın bir çift graf olduğunu gösteriniz.



$n=2$ için $V(G_2)$, $\{1, 2\}$ ile oluşturulan permutasyonlar

$V(G_2) = \{12, 21\}$

b. G_n grafinın bir çift graf olduğunu göstermek için her bir köşesinin derecesinin çift olduğunu göstermek gerekir. Keyfi bir köşe alıp bu köşenin kaç köşeye kenar oluşturduğuna bakalım. Köşeyi $a_1 a_2 \dots a_n$ permutasyonu olarak alalım. Bu köşe aşağıdaki köşelerle kenar oluşturur:

$a_2 a_1 a_3 a_4 \dots a_n$

$a_1 a_3 a_2 a_4 \dots a_n$

$\vdots$

$a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$

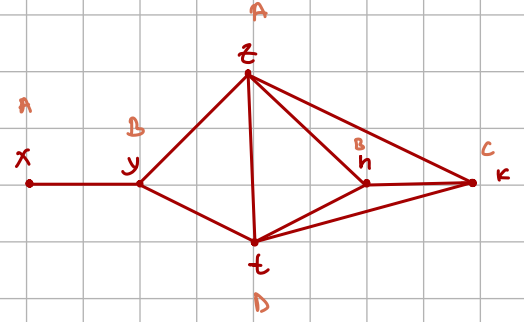
Burada tam $n-1$ tane kenar oluyor.
 n tek olduğundan $n-1$ çift olur.
Köşenin derecesi çift olur.

SORU ÇÖZÜMÜ .

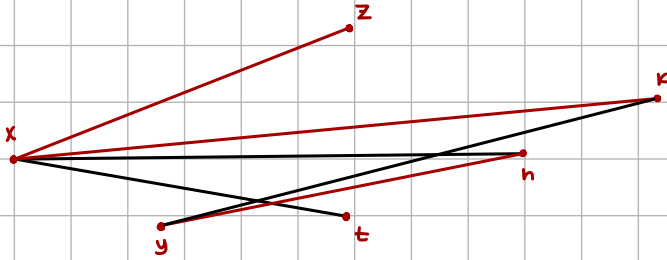
1) Yanda verilen 6 grafi için ;

a) 6 grafinin tümleyenini bulunuz.

b) Kromatik sayısını bulunuz.

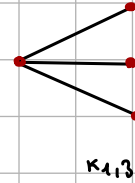
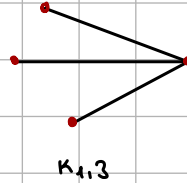
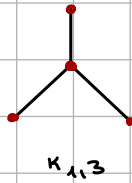
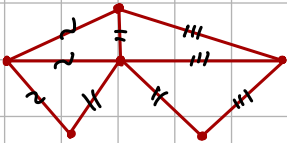


a)



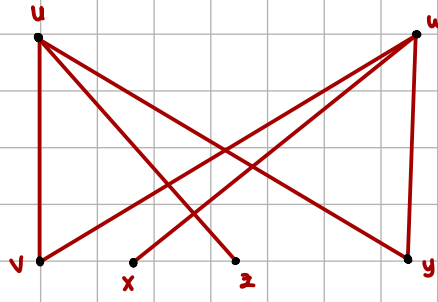
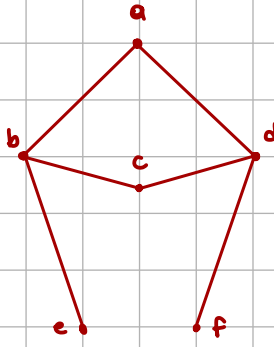
b) 4 (A,B,C,D)

2) Aşağıdaki grafi $K_{1,3}$ ün kopyalarına ayıstırınız.



→ Her kenar 1 kere kullanılıyor. Köşeler birden fazla kez kullanılabilir.

3)



$F: G \rightarrow H$ dönüşümü $f(a) = v$ $f(b) = w$ $f(c) = y$ $f(d) = u$ $f(e) = x$ $f(f) = z$ şeklinde tanımlansın. izomorfizm olduğunu göster.

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & y & u & x & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ y \\ u \\ x \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = A(H)$$

4) Bir G grafinin köşe kümesi, $\{1,2,3\}$ kümesinin elemanlarıyla oluşturulan sıralı ikililerden oluşmaktadır. Bu grafin (a,b) ve (c,d) gibi keyfi iki köşesinin kenar oluşturması için gerek $a \cdot c + b \cdot d \equiv 0 \pmod{3}$ olmasıdır. Bu G grafini çizin.

$(1,2)$ $(1,1)$ $(2,2)$ $(2,1)$
 $\underset{A}{} \quad \underset{B}{} \quad \underset{C}{} \quad \underset{D}{}$

