

ANALİZ I - Ödev 3 Cevapları

12 Kasım 2021

Soru 1.

$$A = \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesinin (varsa) supremum ve infimumunu bulunuz.

Çözüm

$$A = \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{1}{4}, \frac{9}{20}, \dots \right\} \neq \emptyset$$

i) $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ ise

$$A_{2k} = \left\{ \frac{1}{2k+1} + \frac{1+(-1)^{2k}}{2(2k)} : k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N} \right\}$$

Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$k \geq 1 \Rightarrow 2k \geq 2, 2k+1 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Ayrıca

$$\frac{1}{2k} > 0, \frac{1}{2k+1} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k} > 0$$

O halde $0 < \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k} \leq \frac{5}{6}$ dir. $A_{2k} \subset \left(0, \frac{5}{6}\right]$

ii) $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$ ise

$$A_{2k-1} = \left\{ \frac{1}{2k-1+1} + \frac{1+(-1)^{2k-1}}{2(2k-1)} : k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N} \right\}$$

Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$k \geq 1 \Rightarrow 2k \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}$$

Ayrıca

$$\frac{1}{2k} > 0$$

O halde $0 < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}$ dir. $A_{2k-1} \subset \left(0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow A = A_{2k} \cup A_{2k-1}$

olduğundan $\sup A = \frac{5}{6}, \inf A = 0$ dir. Supremum da eşitlik olduğundan ispatlı olarak $\sup A = \frac{5}{6}$ diyebiliriz. $\inf A = 0$ olduğunu ispatlayalım. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\inf A_{2k} = \varepsilon$ olsun. (0 dan daha büyük bir alt sınır olabileceğini varsaydık.)

$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k} < \frac{1}{k} < \varepsilon, \left(k \in \mathbb{N}, A.\ddot{O}'den\right) \Rightarrow \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k} < \varepsilon$$

olduğundan $\inf A_{2k} = \varepsilon$ olamaz. O halde $\inf A_{2k} = 0$ dir.

Soru 2. $A, B \subset \mathbb{R}$ kümeleri boştan farklı ve $C := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ biçiminde tanımlansın.

- (a) A ve B kümelerinin supremumu varsa C kümesinin supremumu vardır ve $\sup C = \sup A + \sup B$ 'dir.
- (b) A ve B kümelerinin infimumu varsa C kümesinin infimumu vardır ve $\inf C = \inf A + \inf B$ 'dir.

ifadelerinin gerçekleştiğini gösteriniz. (İspatlayınız.)

Çözüm:

Yardımcı Teorem: a, x ve y reel sayılar olsun. Her $n \geq 1$ için $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$ eşitsizliği gerçekleşirse $x = a$ 'dır.

- (a) A ve B kümelerinin supremumu var olsun. $c \in C$ ise $c = a + b$, $a \in A$ ve $b \in B$ olduğundan, $c \leq \sup A + \sup B$, dir. 0 halde $\sup A + \sup B$ sayısı C kümesi için bir üst sınırdır. Bu da C 'nin supremumunun varlığını gösterir ve $\sup C \leq \sup A + \sup B$ olur.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon = \frac{1}{n}$ alınırsa,

$$\sup A - \frac{1}{n} < a \quad \text{ve} \quad \sup B - \frac{1}{n} < b \Rightarrow \sup A + \sup B - \frac{2}{n} < a + b$$

olur. $a + b = c \leq \sup C$ olduğundan,

$$\sup A + \sup B < a + b + \frac{2}{n} \leq \sup C + \frac{2}{n}$$

yazılabilir. Her $n \geq 1$ için,

$$\sup C \leq \sup A + \sup B \leq \sup C + \frac{2}{n}$$

bulunur. Yardımcı teoremden $\sup C = \sup A + \sup B$ elde edilir.

- (b) Benzer şekilde, A ve B kümeleri her ikisinin de infimumu var olsun. $c \in C$ ise $c = a + b$, $a \in A$ ve $b \in B$ olduğundan, $c \geq \inf A + \inf B$ dir. $\inf A + \inf B$ sayısı C kümesi için bir alt sınırdır. Bu ise C 'nin infimumu olduğunu gösterir ve $\inf C \geq \inf A + \inf B$ olur. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ alınırsa, infimum tanımına göre

$$a < \inf A + \frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad b < \inf B + \frac{1}{n}$$

$$\inf C < a + b < \inf A + \inf B + \frac{2}{n}$$

yazılabilir. Buradan her $n \geq 1$ için

$$\inf C \leq \inf A + \inf B < \inf C + \frac{2}{n}$$

bulunur. Yardımcı teoremden $\inf C = \inf A + \inf B$ eşitlik elde edilir.

Soru 3. $A = \mathbb{R}^+$ ve $B = \{\frac{1}{x} : x \in A\}$ olsun. B 'nin üstten sınırlı olması için gerek ve yeter koşul, $\inf A \geq 0$ olmasıdır. Bu durumda, $\sup B = \frac{1}{\inf A}$ 'dır. Gösteriniz.

Çözüm $a = \inf A > 0$ olsun. Her $x \in A$ için $x \geq a > 0$ ve $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$ dir. O halde $\frac{1}{a}$ sayısı, B için bir üst sınırdır. Bu sonuç, en küçük üst sınır özelliğinden, $\sup B$ nin varlığını gösterir. $\sup B$, B nin en küçük üst sınırı ve $\frac{1}{a}$ bir üst sınır olduğundan, $\sup B \leq \frac{1}{a}$ dır.

Tersine, B üstten sınırlı olsun. $\inf A > 0$ olduğunu gösterelim: b sayısı B nin bir üst sınırı olsun. Herhangi bir $x \in A$ için $0 < \frac{1}{x} \leq b$ ve $x \geq \frac{1}{b} > 0$ dir. O halde, $\frac{1}{b}$ sayısı A için bir alt sınırdır ve $\inf A$ en büyük alt sınır olduğundan, $\inf A \geq \frac{1}{b} > 0$ dır.

B üstten sınırlı iken $\sup B = \frac{1}{\inf A}$ olduğunu gösterelim: $\sup B - \frac{1}{\inf A}$ olduğunu biliniyor. $b = \sup B$ olarak alınırsa, önceki açıklamaya göre $\inf A \geq \frac{1}{\sup B}$ veya $\sup B \geq \frac{1}{\inf A}$ bulunur. O hâlde, $\sup B = \frac{1}{\inf A}$.