

 MARMARA ÜNİVERSİTESİ	MARMARA ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ	 Fen Fakültesi
--	--	--

2022-2023 EĞİTİM-ÖĞRETİM YILI GÜZ DÖNEMİ
MAT2012 ANALİZ IV DERSİ ARA SINAV HAZIRLIK

ÖĞRENCİNİN:
ADI ve SOYADI:
NUMARASI:
KISMI:

Tarih: 13.04.2023

BİLGİLENDİRME

1. Alıştırmalar Analiz IV dersinin ilk 7 haftalık konularını içermektedir.
2. Sorular Ahmet Tercan'ın İleri Analiz ve Cevdet Cerit'in Matematik Analiz kitaplarından alınmıştır.
3. Aynı konu başlıklarında farklı kaynaklardan da soru çözmenizi tavsiye ederim.
4. Her bir konu başlığında konuyu anladığınızı hissedene kadar soru çözün.
5. Sorularınız olursa e-mail yoluyla ya da okula gelerek sorabilirsiniz.

BAŞARILAR DİLERİM.

2022-2023 EĞİTİM-ÖĞRETİM YILI GÜZ DÖNEMİ
MAT2012 ANALİZ IV DERSİ ARA SINAV HAZIRLIK

1 Çok Değişkenli Fonksiyonlar

1. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

- | | |
|---|---|
| (a) $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ | (o) $f(x, y) = \sqrt{1 + x - y^2}$ |
| (b) $z = 1 - \sqrt{1 - (x - y)^2}$ | (p) $f(x, y) = \sqrt{(x - 1)(y + 3)}$ |
| (c) $z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$, | (q) $f(x, y) = \ln(x \ln(y - x))$ |
| (d) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$ | (r) $f(x, y) = \sqrt{y \sin x}$ |
| (e) $z = \ln(x + y)$, | (s) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ |
| (f) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(4a^2 - x^2 - y^2)}$, | (t) $f(x, y) = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{xy}}$ |
| (g) $z = \arcsin x + \arccos y$, | (u) $f(x, y) = x + \arccos y$ |
| (h) $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$ | (v) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x - y)^2}$ |
| (i) $z = \ln xy$ | (w) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$ |
| (j) $z = \arcsin \frac{y}{x}$, | (x) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$ |
| (k) $z = \sqrt{1 - x - y }$ | (y) $f(x, y) = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2}{4}\right) + \ln \frac{x}{y}$ |
| (l) $z = \arcsin e^{x^2 - y^2}$ | (z) $f(x, y) = \sqrt{5 - 3x - 2y}$ |
| (m) $z = \frac{y}{\sqrt{x - y^2}}$ | (aa) $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{2x - y}{x + y}\right)$ |
| (n) $f(x, y) = \ln\left(\frac{y}{x^2 + y^2 - 1}\right)$ | |

2. Aşağıdaki fonksiyonların tüm seviye eğrilerini bulunuz.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ | (f) $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ |
| (b) $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ | (g) $f(x, y) = x - y + 2$ |
| (c) $f(x, y) = y - \ln x$ | (h) $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ |
| (d) $f(x, y) = x - y^2$ | (i) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ |
| (e) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ | |

3. $A, (0, 0)$ noktasını bulunduran konveks bir küme ve f de A da tanımlı konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde her $(x, y) \in A$ için $(-x, -y) \in A$ ve $f(-x, -y) > -f(x, y)$ olduğunu gösteriniz.
4. A konveks bir küme, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $k > 1$ tamsayı ve $x_1, x_2, \dots, x_k \in A$ olsun. Bu takdirde f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$ özelliğindeki $\lambda_i \in [0, 1]$ için $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_k f(x_k)$ olmasıdır, gösteriniz.
5. $A = \{(x, y) : x, y > 0\}$ konveks kümesi üzerinde tanımlanan $f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{xy}\right)$ fonksiyonunun konveks olduğunu gösteriniz.
6. $I_1, I_2 \neq \emptyset$ herhangi iki aralık olmak üzere $I_1 \times I_2$ de tanımlı monoton artan ve monoton azalan fonksiyonun sabit fonksiyon olduğunu gösteriniz.
7. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x - y$ fonksiyonun monotonluğunu inceleyiniz.

8. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : (1, \infty) \times (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = [\ln(x + y)]^k$ olarak tanımlansın. $k < 0$ iken f nin monoton azalan ve $0 < k < 1$ iken f nin monoton artan olduğunu gösteriniz.

9. $f : [0, 2] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+1)(y+1) & x+y \geq 2 \text{ ise} \\ xy & x+y < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonun $[0, 2] \times [0, 2]$ de monoton artan olduğunu gösteriniz.

10. $f : [0, 2] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \text{ ve } 0 \leq y \leq 1 \text{ ise} \\ x-1 & 1 < x \leq 2 \text{ ve } 0 \leq y \leq 1 \text{ ise} \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \text{ ve } 1 < y \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonun $[0, 2] \times [0, 2]$ de monoton olduğunu gösteriniz.

2 Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit

11. Limit tanımını kullanarak aşağıdaki limitlerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} (3xy - 8x + 2y) = -24$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)^2} \frac{x^2+y^2+7}{x^2+y^2+2} = \frac{7}{2}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} (x^2 + y^2 + 5x - 3y) = -6$

(f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2+3} = 0$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (1 - x^2 + 4y^2) = 16$

(g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (y^2 + 3xy) = 4$

(h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2$

12. Aşağıdaki limitlerin olup olmadığını araştırınız.

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

(i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y}{x^3+y^3}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x+y}$

(j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

(k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos x - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4+y^4}$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

(l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{5x^4+2y^4}$

(m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{3-x+y}{4+x-2y}$

(f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

(n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,\pi)} x^2 \sin \frac{y}{x}$

(g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

(o) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{\arcsin(xy-2)}{\arctan(3xy-6)}$

(h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$

(p) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

3 Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Süreklilik

13. $(x, y) \neq (0, 0)$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyonların $(0, 0)$ noktasındaki sürekliliğini araştırınız ($f(0, 0) = 0$).

- (a) $f(x, y) = \frac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|}$ (g) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
 (b) $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$ (h) $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^2+y^2} e^{-x^2-y^2}$
 (c) $f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{2x^2+y^2}$ (i) $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
 (d) $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$ (j) $f(x, y) = x^2 \sin \left(\frac{1}{x^2+y^2} \right)$
 (e) $f(x, y) = \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ (k) $f(x, y) = xy \ln(x^2+y^2)$
 (f) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+xy+y^2}$
14. $f(x, y) = \begin{cases} 3 + \frac{2(x-2)^2(y+3)}{x^2+y^2-4x+6y+13} & (x, y) \neq (2, -3) \\ 3 & (x, y) = (2, -3) \end{cases}$ olarak tanımlanan fonksiyonun $(2, -3)$ noktasındaki sürekliliğini araştırınız.

15. Aşağıdaki fonksiyonların sürekli oldukları kümeleri bulunuz.

- (a) $f(x, y) = \ln \left(\frac{y}{x^2+y^2-1} \right)$ (f) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$
 (b) $f(x, y) = \sqrt{1+x-y^2}$ (g) $f(x, y) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{y^2-4}$
 (c) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ (h) $f(x, y) = 1 + \sqrt{1-(x-y)^2}$
 (d) $f(x, y) = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{xy}}$ (i) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$
 (e) $f(x, y) = \ln(x \ln(y-x))$ (j) $f(x, y) = x + \arccos y$

16. $f, g : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = (x+y)^2$ ve

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & x+y \geq 0 \\ -f(x, y) & x+y < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonların $[-1, 1] \times [-1, 1]$ de sürekli olduklarını gösteriniz.

17. Aşağıdaki fonksiyonların süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

- (a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & (x, y) \neq (0, 0) \\ y & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ (b) $f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(xy) & xy > 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$
18. $f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/|x-y|} & x \neq y \\ c & x = y \end{cases}$ olarak tanımlanan fonksiyonun $\mathbb{R}^2$ de sürekli olması için c değerini bulunuz.
19. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ olarak tanımlanan fonksiyonun dizisel sürekli olmadığını gösteriniz.
20. $I_1 = [a_1, b_1]$ ve $I_2 = [a_2, b_2]$ olmak üzere $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fonksiyonun sınırlı olduğunu gösteriniz.
21. $A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir küme olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün sürekli fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösteriniz.
22. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f : A \rightarrow B$ düzgün sürekli olsun. Eğer (x_n) , A da bir Cauchy dizisi ise $(f(x_n))$ nin de B de bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

4 Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Kısmi Türev

23. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki noktada birinci mertebeden kısmi türevlerini, kısmi türev tanımını kullanarak bulunuz.

- (a) $f(x, y) = 2x^2 + xy^2, (1, 1)$
 (b) $f(x, y) = x^3y + xy^3, (1, -1)$
 (c) $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2, (-1, 2)$
 (d) $f(x, y) = xy^2 + 2xy^3, (2, -2)$
 (e) $f(x, y, z) = x^2 + yz^2 - xyz, (1, 2, -3)$
 (f) $f(x, y, z) = yz^2 + xyz^3, (-2, 0, 1)$
24. $(x, y) \neq (0, 0)$ için aşağıdaki gibi tanımlanan fonksiyonların $(0, 0)$ noktasında birinci mertebeden kısmi türevlerinin olup olmadığını araştırınız. ($f(0, 0) = 0$ dır).
- (a) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$
 (b) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^3+y^2}$
 (c) $f(x, y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2}$
 (d) $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$
 (e) $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$
 (f) $f(x, y) = \frac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|}$
 (g) $f(x, y) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$
 (h) $f(x, y) = \frac{x^4y}{x^2+y^2}$
 (i) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$
25. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ olarak tanımlanan fonksiyonun $(0, 0)$ noktasında birinci mertebeden kısmi türevlerinin olduğunu, ancak bu noktada sürekli olmadığını gösteriniz.
26. Aşağıdaki fonksiyonların ikinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.
- (a) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$
 (b) $f(x, y) = xe^{\frac{y}{x}}$
 (c) $f(x, y) = \ln\left(e^{\frac{y}{x}} + e^{\frac{\pi}{y}}\right)$
 (d) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$
 (e) $f(x, y) = x^2y + xy^2$
 (f) $f(x, y) = \arcsin\left(\tan \sqrt{\frac{x}{y}}\right)$
 (g) $f(x, y) = \ln(\sec(x - 2y))$
 (h) $f(x, y) = \sin(x - y) - \cos(x + y)$
 (i) $f(x, y) = \tan(xy) + \cot(xy)$
 (j) $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$
 (k) $f(x, y) = e^{\sin xy} + e^{\cos xy}$
27. $f(x, y) = x^2 \arctan \frac{y}{x}$ fonksiyonu için $f_{xy}(1, 1)$ ve $f_{yx}(1, 1)$ türevlerini bulunuz.
28. Aşağıdaki fonksiyonların Jakobiyen matrisini bulunuz.
- (a) $f(x, y) = (3x - 2y, x^2y)$
 (b) $f(x, y) = (x^2y, xy^2, xy)$
 (c) $f(x, y) = (2x^2 - 3xy^2, x^2 + y^2)$
 (d) $f(x, y) = \left(xy, \frac{x}{y^2}, \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$
 (e) $f(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$
 (f) $f(x, y) = (\sin(2x + y), e^{2x-y})$
 (g) $f(x, y) = (xy, 1 + 3x, 2x + y^3)$
 (h) $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2, xyz)$
 (i) $f(x, y, z) = \left(\sin \frac{yz}{x}, \cos \frac{xz}{y}, \tan \frac{xy}{z}\right)$
 (j) $f(x, y, z) = (xy - z^2, 3x^2, 2xyz, yz^3)$
 (k) $f(x, y, z) = \left(\frac{xy}{z}, e^{x^2y}, \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$
 (l) $f(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2z, x^3 + y^3 + z^3, xyz)$
 (m) $f(x, y, z) = (x + y, x + 3z, y - z)$
 (n) $f(x, y, z, w) = (x^2 - y^2, z^2 - w^2)$
 (o) $f(x, y, z, w) = (\sin(xy), \cos(yz), \tan(zw), \sec(wx))$
 (p) $f(x, y, z, w) = \left(2xw, 3yz^2, \frac{w^2}{xz}, 2x + 3yz^2w, x + 2y - 3z + 4w\right)$
29. Aşağıdaki fonksiyonlar için Euler teoreminin gerçekleştiğini gösteriniz.

(a) $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$

(b) $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2y^3$

(c) $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$

(d) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(e) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 2z^3$

(f) $f(x, y, z) = 3x^2yz^3 + y^3z^3 - 5xyz^4$

(g) $f(x, y, z, w) = xyzw + x^2z^2 - y^2w^2$

(h) $f(x, y, z, w) = x^3 - 3xz^2 + yzw + xyz$

(i) $f(x, y, z, w) = xy^2w + xz^3 + w^4$

30. Aşağıdaki fonksiyonların monotonluğunu inceleyiniz.

(a) $f : [0, 1] \times [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x + 2y$

(b) $f : [-1, 0] \times [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $f : [0, 2] \times [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = -2x^2 - 3y^2 - 5xy + 1$

(d) $f : [-1, 0] \times [-3, -1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + 2xy^3 + 2xy$

5 Diferansiyel, Diferansiyellenebilirlik ve Teğet Düzlem

31. $(x, y) \neq (0, 0)$ için aşağıdaki fonksiyonların $(0, 0)$ noktasında diferansiyellenebilir olup olmadığını araştırınız ($f(0, 0) = 0$) dır.

(a) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

(b) $f(x, y) = xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(d) $f(x, y) = \frac{x^5}{x^4+y^2}$

(e) $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$

(f) $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(g) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(h) $f(x, y) = \frac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|}$

(i) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

(j) $f(x, y) = \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}$

(k) $f(x, y) = |y| \ln(1+x)$

(l) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$

(m) $f(x, y) = |y|^a \sin x (a \in \mathbb{R})$

32. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki noktadaki diferansiyellenebilirliğini araştırınız.

(a) $f(x, y) = y\sqrt{x}, (4, 1)$

(b) $f(x, y) = xy - 3x^2, (1, 2)$

(c) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}, (0, 0)$

(d) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}, (0, 0)$

(e) $f(x, y) = x - 3 \sin y, (1, 0)$

(f) $f(x, y) = \frac{3x+2y}{x-y}, (2, 1)$

(g) $f(x, y) = |x| \sin(x^2 + y^2), (0, 0)$

33. $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + 3y^2}$ fonksiyonunun $(0, 0)$ noktasında sürekli olduğunu, ancak bu noktada diferansiyellenemediğini gösteriniz.

34. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$ fonksiyonun $(0, 0, 0)$ noktasındaki diferansiyellenebilirliğini araştırınız ($f(0, 0, 0) = 0$ dır).

35. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki değerler için Δf ve df değerlerini hesaplayınız.

(a) $f(x, y) = 2x^2y + 3xy^2 - 5x, (x_0, y_0) = (-1, 2), dx = 0.2, dy = -0.01$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 5y - 2, (x_0, y_0) = (2, -3), dx = 0.03, dy = -0.0$

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz, (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3), dx = 0.01, dy = 0.02, dz = -0.03$

(d) $f(x, y, z, w) = x^2y^2 - z^2w^2, (x_0, y_0, z_0, w_0) = (2, 4, 2, 1), dx = 0.02, dy = -0.1, dz = 0.2, dw = -0.03$

36. Aşağıdaki ifadelerin yaklaşık değerini hesaplayınız.

(a) $\sqrt{(18.03)^2 + (23.98)^2}$

(f) $(1.98)^3 \sqrt{(3.01)^2 + (3.97)^2}$

(b) $(5.2)^2 + (12.1)^2$

(g) $\frac{(2.01)(2.98)^3}{(-1.99)^2 + (4.001)^2}$

(c) $(6.04) \cdot (3.1) \cdot (2.96)$

(d) $\sin 91 + \cos 178$

(h) $\ln \left(\frac{(3.03)^2 + (4.002)^2}{(4.98)^2} \right)$

(e) $\sqrt[5]{(3.8)^2 + 2(2.1)^3}$

37. Aşağıdaki ifadelerin (varsa) hangi f fonksiyonunun tam diferensiyeli olduğunu bulunuz.

(a) $(x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$

(b) $(e^{2y} - 5y^3e^x) dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x) dy$

(c) $(2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$

(d) $e^x (e^y(x - y + 2) + y) dx + e^x (e^y(x - y) + 1) dy$

(e) $\left(\frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} - \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(\frac{-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{x} \right) dy$

(f) $\frac{(x^2 + 2xy + 5y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy}{(x+y)^3}$

(g) $\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$

(h) $\frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$

(i) $xe^y dx + ye^x dy$

(j) $(6x + 5y)dx + (5x + 6y)dy$

(k) $(1 + 2xy + \ln x)dx + x^2 dy$

(l) $\left(12x^2y + \frac{1}{y^2} \right) dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3} \right) dy$

(m) $(x^3 + 4xy) dx + (4xy - y^3) dy$

(n) $\frac{y}{x^2 + 1} dx + (y^2 + \arctan x) dy$

(o) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})dx + \frac{x}{2\sqrt{y}} dy$

(p) $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x dy - y dx}{x^2}$

(q) $\frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1 + x^2} dy$

(r) $2x \sin y dx + (y + x^2 \cos y) dy$

(s) $\frac{\arcsin y}{x} dx + \frac{\ln x}{\sqrt{1 - y^2}} dy$

(t) $(x + \sqrt{x + y})dx + (y + \sqrt{x + y})dy$

(u) $(2xy^2 + 3y \cos 3x) dx + (2x^2y + \sin 3x) dy$

(v) $(6xy - y^2) dx + (2xe^y - x^2) dy$

(w) $(x^3 + 2xy + y^2) dx + (x^2 + 2xy + y^3) dy$

(x) $yz dx + xz dy + (xy + 2z) dz$

(y) $e^y dx + xe^y dy + (z + 1)e^z dz$

(z) $(z^3 - 3y) dx + (12y^2 - 3x) dy + 3xz^2 dz$

- (aa) $(2xyz + \frac{1}{z}) dx + (x^2z - \frac{1}{z^2}) dy + (x^2y - \frac{x}{z^2} + \frac{2y}{z^3}) dz$
(ab) $(2xy + z^2 + yz) dx + (x^2 + 2yz + xz) dy + (y^2 + 2xz + xy) dz$
(ac) $\frac{yz}{x^2y^2+z^2}dx + \frac{xz}{x^2y^2+z^2}dy - \frac{xy}{x^2y^2+z^2}dz$
(ad) $y^2 \cos z dx + 2xy \cos z dy - xy^2 \sin z dz$

38. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki kısmi diferansiyel denklemleri sağlayıp sağlamadığını araştırınız.

- (a) $f(x, y) = e^{x+y}(x + y), f_{xx} - 2f_{xy} + f_{yy} = 0$
(b) $f(x, y) = y \arctan \sqrt{x^2 - y^2}, \frac{f_x}{x} + \frac{f_y}{y} = \frac{f}{y^2}$
(c) $f(x, y) = \cosh\left(\frac{y}{x}\right) + \tan\left(\frac{x}{y}\right), xf_x + yf_y = 0$ ve $yf_{yy} + xf_{xy} + f_y = 0$
(d) $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y), f_{xx} - f_{yy} = 0$
(e) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, xf_x + yf_y = 1$
(f) $f(x, y) = x^4y^2 \arcsin \frac{y}{x}, xf_x + yf_y - 6f = 0$
(g) $f(x, y) = xy \tan \frac{y}{x}, xf_x + yf_y - 2f = 0$
(h) $f(x, y) = x \cos \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}, x^2f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2f_{yy} = 0$
(i) $f(x, y) = xe^y + ye^x, f_{xxx} + f_{yyy} - xf_{xyy} - yf_{xxy} = 0$

39. Aşağıdaki fonksiyonların harmonik olduğunu (Laplace denklemini sağladığını) gösteriniz ($a, b \in \mathbb{R}$).

- (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (f) $f(x, y) = \ln((x - a)^2 + (y - b)^2)$
(b) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ (g) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$
(c) $f(x, y) = e^x \cos y$ (h) $f(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$
(d) $f(x, y) = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$ (i) $f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$
(e) $f(x, y, z) = z \arctan \frac{x}{y}$

40. Aşağıdaki fonksiyonların dalga denklemini sağladığını gösteriniz ($a, k \in \mathbb{R}$).

- (a) $f(x, y) = \sin(kx) \sin(aky)$ (c) $f(x, y) = (x - ay)^6 + (x + ay)^6$
(b) $f(x, y) = \frac{y}{a^2y^2 - x^2}$ (d) $f(x, y) = \sin(x - ay) + \ln(x + ay)$

41. $f(x, y, z) = \left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^n$ olarak tanımlanan fonksiyonun $xf_x + yf_y + zf_z = 0$ ve $x^2f_{xx} + y^2f_{yy} + z^2f_{zz} + 2xyf_{xy} + 2xzf_{xz} + 2yzf_{yz} = 0$ kısmi diferansiyel denklemleri sağladığını gösteriniz.

42. $z = f(x, y)$ fonksiyonu yardımıyla verilen aşağıda yüzeylere, yanlarımdas noktadan çizilen teğet düzlem denklemini bulunuz.

- (a) $f(x, y) = x^2 + xy, (x_0, y_0) = (-1, 1)$
(b) $f(x, y) = 2x + y^2 - x^3y, (x_0, y_0) = (-2, 1)$
(c) $f(x, y) = x^3 + 2xy^2, (x_0, y_0) = (-1, -2)$
(d) $f(x, y) = \sin(2x - 3y) - \cos(2x + 3y), (x_0, y_0) = (\pi/2, \pi/3)$
(e) $f(x, y) = xe^y, (x_0, y_0) = (1, 0)$
(f) $f(x, y) = e^{y^2 - x^2}, (x_0, y_0) = (-1, 1)$
(g) $f(x, y) = x \ln y, (x_0, y_0) = (4, 1)$

43. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki noktada lineerizasyonunu bulunuz.

- (a) $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2, (x_0, y_0) = (1, -1)$
 (b) $f(x, y) = e^{x+3y-5}, (x_0, y_0) = (1, 3)$
 (c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), (x_0, y_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$
 (d) $f(x, y) = \cos(2x - 3y) + \sin(2x + 3y), (x_0, y_0) = (\pi/2, \pi/3)$
 (e) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + e^{\frac{y}{x}}, (x_0, y_0) = (1, 1)$

44. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki noktada ikinci dereceden yaklaşımlarını bulunuz.

- (a) $f(x, y) = e^x \sin y$ (e) $f(x, y) = x^2y + 3y - 2, (1, -2)$
 (b) $f(x, y) = \sin x \cos y, (0, 0)$ (f) $f(x, y) = e^{2x+y}, (1, -2)$
 (c) $f(x, y) = \cos(x - y), (\pi, 0)$ (g) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, (3, 4)$
 (d) $f(x, y) = x^2y, (1, -2)$ (h) $f(x, y) = \arctan(xy), (1, 1)$

6 Zincir Kuralı

45. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında belirtilen kısmi türevlerini hesaplayınız.

- (a) $f(y_1, y_2) = 2y_1^2 + y_1y_2^2, y_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + xz^3, y_2(x, y, z) = yz^2 + xy^3, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.
 (b) $f(y_1, y_2) = \cos(y_1^2 + y_2^2), y_1(x, y, z) = \sin^2(xyz), y_2(x, y, z) = 2xy^2 + yz^3 - xz^2, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.
 (c) $f(y_1, y_2) = \cos y_1^2 + \sin y_2^2, y_1(x, y) = x^2 + y^2, y_2(x, y) = \tan(x + y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.
 (d) $f(y_1) = y_1^2, y_1(x, y, z) = x + xz + y^2, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.
 (e) $f(y_1, y_2) = y_1^2 \cos y_2, y_1(x, y) = x^2 + y^2, y_2(x, y) = x \sec y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

46. g türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere $x - az - g(y - bz) = 0$ denklemiyle verilen $z = f(x, y)$ fonksiyonunun $az_x + bz_y = 1$ kısmi diferansiyel denklemi gerçekleştirdiğini gösteriniz.

47. $z^3 - xz - y = 0$ denklemiyle verilen $z = f(x, y)$ fonksiyonu için $z_{xy} = -\frac{3z^2+x}{(3z^2-z)^3}$ olduğunu gösteriniz.

48. f ve g ikinci mertebeye kadar türevlenebilen tek değişkenli fonksiyonlar olmak üzere $F(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$ olarak tanımlanan fonksiyonun dalga denklemini gerçekleştirdiğini gösteriniz.

49. $z = f(x, y), x = u + v$ ve $y = u - v$ olarak tanımlanan fonksiyon için $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

50. $z = f(x, y), x = u \cosh v, y = u \sinh v$ fonksiyonu için $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ olduğunu gösteriniz.

51. $f(x, y), x = u \cos v$ ve $y = u \sin v$ olarak tanımlanan fonksiyon için $f_{rx} + f_{rr} = 0$ Laplace denkleminin $f_{uu} + \frac{1}{u} f_v + \frac{1}{u^2} f_{vv} = 0$ denklemine indirgendini gösteriniz.

52. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki kısmi diferansiyel denklemi sağlayıp sağlamadığını araştırınız.

- (a) $z = f(xy), xz_{xx} - yz_{yy} + (x - y)z_{xy} + z_x - z_y = 0$
 (b) $z = f(x + ay) + g(x - ay), z_{yy} - a^2 z_{xx} = 0$
 (c) $f(x, y, z) = \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{x}{y}}, xf_x + yf_y + zf_z = 0$

53. g , Laplace denklemini sağlayan ve ikinci mertebeye kadar türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere $f(x, y) = g\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ olarak tanımlanan fonksiyonun Laplace denklemini sağladığını gösteriniz.
54. g, h ve k ikinci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere, zincir kuralını kullanarak aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki kısmi diferansiyel denklemi gerçeklediğini gösteriniz.
- $f(x, y) = \sin y + g(\sin x - \sin y), \cos y f_x + \cos x f_y = \cos x \cos y$
 - $f(x, y) = xy + xg\left(\frac{y}{x}\right), x f_x + y f_y - xy = f$
 - $f(x, y) = xg\left(\frac{y}{x}\right), x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$
 - $f(x, y) = g(x^2 y), x f_x - 2y f_y = 0$
 - $f(x, y) = g(xy) \ln y + h(xy), x^2 f_{xx} - 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} + x f_x + y f_y = 0$
 - $f(x, y) = yg(x^2 - y^2), \frac{f_x}{x} + \frac{f_y}{y} = \frac{f}{y^2}$
 - $f(x, y) = g(xy), x f_x - y f_y = 0$
 - $f(x, y) = g\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right), x f_x + y f_y = 0$
 - $f(x, y) = e^{2x} \cos(g(y)), f_{yy} + \frac{f_y}{y} + \frac{f_{xx}}{y^2} = 0$
 - $f(x, y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right), x f_x + y f_y = n f$
 - $f(x, y) = g(x^2 + y^2), x f_y - y f_x = 0$
 - $f(x, y) = yg(x^2 - y^2), \frac{f_x}{x} + \frac{f_y}{y} - \frac{f}{y^2} = 0$
 - $f(x, y) = g(x - y, y - x), f_x + f_y = 0$
 - $f(x, y) = g(x^2 - y^2, y^2 - x^2), y f_x + x f_y = 0$
 - $f(x, y) = g(2x^3 + 3y^2), y f_x - x^2 f_y = 0$
 - $f(x, y) = g(r \cos \theta, r \sin \theta), f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} = 0 (f_{xx} + f_{yy} = 0 \text{ ise})$
 - $f(x, y) = g(x + ay) + h(x - ay), f_{xx} - \frac{1}{a^2} f_{yy} = 0$
 - $f(x, y) = xg(x + y) + yh(x + y), f_{xx} - 2f_{xy} + f_{yy} = 0$
 - $f(x, y, z) = g(x, y) + h(y, z) + k(x, z), f_{xyz} = 0$
 - $f(x, y, z) = g\left(\frac{x}{z}\right) + h\left(\frac{y}{z}\right), x f_x + y f_y - f = 0$
55. $w = f(x - y, y - z, z - x)$ olarak tanımlanan fonksiyonun $w_x + w_y + w_z = 0$ kısmi diferansiyel denklemi gerçeklediğini gösteriniz.
56. Aşağıdaki f ve g fonksiyonları ve P_0 noktası için $g \circ f$ bileşke fonksiyonunun P_0 daki diferansiyelini hesaplayınız.
- $f(x, y) = (3x^2 y, -2xy^2), g(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 + 3y^2), P_0 = (1, -1)$
 - $f(x, y) = (x^2 y, 3x - 4y^2), g(x, y) = (x^2, -xy^2, 2x^2 y), P_0 = (3, 2)$
 - $f(x, y) = (x^2, -2xy^2, x^2 + y^2), g(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, xyz), P_0 = (0, -4)$
 - $f(x, y, z) = (xyz, 3xy, y^2 z), g(x, y, z) = \left(\frac{xy}{z}, x^2 yz, -xy^2 z^3\right), P_0 = (-2, 3, 1)$
57. $xy \neq 1$ olmak üzere $u = \frac{x+y}{1-xy}$ ve $v = \arctan x + \arctan y$ fonksiyonları için $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ değerini hesaplayınız.
58. $x = u - v + w, y = u^2 - v^2 - w^2$ ve $z = u^3 + v$ fonksiyonları için $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ değerini hesaplayınız.
59. $F(x, y) = 0$ kapalı denkleminle verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevinin
- $$y'' = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$
- olduğunu gösteriniz.

7 Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Taylor Seri Açılımı

60. Aşağıdaki fonksiyonları yanlarında belirtilen noktada Taylor serisine açınız.

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x, y) = x^2y + 3y - 2, (1, 1)$ | (k) $f(x, y) = \cos(x - y), (\pi, 0)$ |
| (b) $f(x, y) = x^3 + xy^2 - xy, (3, -1)$ | (l) $f(x, y) = \sin x \cos y, (0, \pi)$ |
| (c) $f(x, y) = (x + y)^2, (0, 0)$ | (m) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2), (0, \sqrt{\pi})$ |
| (d) $f(x, y) = \frac{y+3}{x+2}, (1, 1)$ | (n) $f(x, y) = \tan(x + y) - \sec(x - y), (\pi, -\pi)$ |
| (e) $f(x, y) = x^2y + 3xy^2, (1, -2)$ | (o) $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy), (0, 0)$ |
| (f) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}, (0, 0)$ | (p) $f(x, y) = \sinh 2x + \cosh 3y, (\ln 2, \ln 3)$ |
| (g) $f(x, y) = e^{2x+y}, (1, -2)$ | (q) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, (-3, -4)$ |
| (h) $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos y, (1, 0)$ | (r) $f(x, y) = \ln(\sec(x + 2y)), (\pi, \pi/2)$ |
| (i) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}, (0, -1)$ | (s) $f(x, y) = \cos(2x - 3y) + \sin(2x + 3y), (\pi/2, -\pi/3)$ |
| (j) $f(x, y) = e^x \sin y, (1, 0)$ | |

8 Hessian Form ve Hessian Matris

61. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki noktada Hessian formunu ve Hessian matrisini bulunuz.

- (a) $f(x, y) = x^3 - y^3 + 5x^2y, (-2, 1)$
(b) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}, (-1, 3)$
(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, (-3, 4)$
(d) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, (1, 1)$
(e) $f(x, y) = \sin(x + y), (\pi, 0)$
(f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, (1, 1, 2)$
(g) $f(x, y, z) = \frac{x^2+y^2-z^2}{xyz}, (1, 1, 1)$
(h) $f(x, y, z) = x^4yz - yz^3, (-2, 3, -1)$
(i) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2x_2x_3 - x_2x_3^2x_4^3, (2, -3, 1, 1)$
(j) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 - x_1x_2x_3x_4, (-1, 2, -1, 1)$
(k) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 - 2x_2^2 + 3x_3^3 - 4x_4^2x_5 + 5x_3x_4x_5^2, (-1, 2, 4, 3, 1)$
(l) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 - 3x_4^2 + 2x_5^3 + x_6^2 + x_1x_2x_3 - x_4x_5x_6, (1, 2, -1, 0, 1, 3)$

9 Kapalı Fonksiyon Teoremleri

62. Aşağıda $F(x, y) = 0$ denklemiyle verilen $y = f(x)$ kapalı fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevlerini hesaplayınız.

- (a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + 1 = 0$
(b) $F(x, y) = x^2y - xy^2 + 3xy - 4x + 5y - 1 = 0$
(c) $F(x, y) = x^2 + xy^3 + 3xy - 4x + 5y - 2 = 0$
(d) $F(x, y) = x^3 + y^3 - xy^2 + 5x - 2y + 3 = 0$

$$(e) F(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

$$(f) F(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + e^{\frac{y}{x}} = 0$$

$$(g) F(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y) = 0$$

$$(h) F(x, y) = \sec(x^2 + y^2) + \tan(y^2 - x^2) = 0$$

63. Aşağıda $F(x, y, z) = 0$ denklemiyle verilen $z = f(x, y)$ kapalı fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

$$(a) F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 5xyz - 3 = 0$$

$$(b) F(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2 - 1 = 0$$

$$(c) F(x, y, z) = \sin(yz) + \cos(xz) + \tan(xy) - 1 = 0$$

$$(d) F(x, y, z) = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 1 = 0$$

$$(e) F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 1 = 0$$

64. Aşağıda $F(x, y, z) = 0$ deklemiyle verilen $z = f(x, y)$ kapah fonksiyonun yanlarındaki P_0 noktasındaki ikinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

$$(a) F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2 = 0, P_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(b) F(x, y, z) = y - xz + \cos(xyz) - 3 = 0, P_0 = (1, 0, -2)$$

$$(c) F(x, y, z) = \sin(x + y) + \sin(y + z) + \cos(x + z) - 1 = 0, P_0 = (\pi, -\pi, \pi)$$

$$(d) F(x, y, z) = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} - 3 = 0, P_0 = (1, -1, 1)$$

65. $x = x(y, z), y = y(x, z)$ ve $z = z(x, y)$ olmak Uzere $F(x, y, z) = 0$ denklemiyle verilen fonksiyonun $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = -1$ kısmi diferansiyel denklemini gerçeklediğini gösteriniz.

66. $F(x, y) = 0$ denklemiyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonun ikinci mertebeden türevinin $y''(x) = -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}$ olduğunu gösteriniz.

67. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, u, v) = (u^3 + xv + y, yu + v^3 - x)$ olarak tanımlanan fonksiyon için $F(x, y, u, v) = 0$ denklem sisteminden hangi şartlar altında u, v nin x, y cinsinden çözülüp çözülemeyeceğini araştırınız.

68. Aşağıdaki denklem sistemlerinin $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ kısmi türevlerini bulunuz.

$$(a) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - u_1 u_2^2 = 0 \\ x_1 u_2 - x_2 u_1 = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2u_1^2 u_2 + 1 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + u_1^2 - u_1 u_2 = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + 2u_1 u_2 = 0 \\ -2x_1 x_2 + u_1^2 + u_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + u_1^2 - u_2^2 = 0 \\ x_1 x_2 u_1 u_2 = 4 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x_1^2 x_2 + u_1^2 - 2u_2 u_3^2 = 0 \\ x_1 - x_2^2 u_3 + u_2^2 - u_1 = 0 \\ x_1 x_2 - u_1 u_2 u_3^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

69. Aşağıdaki denklem sistemlerine yanlarındaki noktada kapalı fonksiyon teoremini uygulayınız ve kısmi türevlerini hesaplayınız.

- (a) $\begin{cases} x^2u + yv^2 = 0 \\ xv^2 - 2y^2u + 1 = 0 \end{cases} \quad P_0 = (1, -1, 1, 1)$
- (b) $\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3u^4 + 8 = 0 \end{cases} \quad P_0 = (2, -1, 2, 1)$
- (c) $\begin{cases} 4xy + y^2u - v^3 - 3 = 0 \\ 5x^2 - uv^2 + 3v^3 + 4 = 0 \end{cases} \quad P_0 = (1, -2, 3, 1)$
- (d) $\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 - 3 = 0 \\ yzu^3 + 2xv - u^2v^2 - 2 = 0 \end{cases} \quad P_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$

10 Ters Fonksiyon Teoremi

70.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonun $x_0 = 0$ noktasının bir komşuluğunda tersinin olup olmadığını araştırınız.

71. $u = 2x + 3yz, v = x + x^2yz, w = 3x + 2y - 5z$ denklem sisteminin $P_0 = (0, 0, 0)$ noktasının uygun bir komşuluğunda x, y, z nin u, v ve w cinsinden çözülüp çözilemeyeceğini araştırınız.
72. $A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ birebir, sürekli ve diferansiyellenebilir bir fonksiyonu olsun. $\det(Df(x)) \neq 0$ ise $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ ters fonksiyonunun da diferansiyellenebilir olduğunu gösteriniz.
73. $i = 1, 2$ için $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (ax_1 + by_1 + c_1, ax_2 + by_2 + c_2)$ olarak tanımlanan fonksiyonunun tersinin olup olmadığını araştırınız ve tersinin olduğu noktalardaki türevlerini hesaplayınız.
74. $f(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right)$ fonksiyonunun $(-1, 1)$ noktasının uygun bir komşuluğunda ters fonksiyonunun olup olmadığını araştırınız.
75. Aşağıdaki denklem sistemlerinin hangi koşullar altında tersinin olduğunu belirleyiniz ve bu koşullardaki kısmi türevlerini hesaplayınız.
- (a) $\begin{cases} y_1 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ y_2 = x_1^2 - x_2^2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ y_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \end{cases}$
76. $\begin{cases} 3x - \cos y + y + e^z = 0 \\ x - e^x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ denklem sisteminin $(0, 0)$ noktası civarında tersinin olup olmadığını araştırınız, tersi varsa bu noktadaki kısmi türevlerini hesaplayınız.

11 Yönlü Türev

77. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki noktada ve vektör yönündeki yönlü türevini hesaplayınız.

- (a) $f(x, y) = x + xy, P_0 = (0, 0), u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$
- (b) $f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2, P_0 = (2, 1), u = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$
- (c) $f(x, y) = xy + 6x - 3, P_0 = (1, 2), u = (1, -3)$
- (d) $f(x, y) = x^2 + 2xy^3 + 5xy, P_0 = (-1, 3), u = (-1, 2)$

- (e) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$, $P_0 = (1, 1)$, $u = (-2, 4)$
(f) $f(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$, $P_0 = (1, -1, 2)$, $u = (-3, 4, 2)$
(g) $f(x, y, z) = y^2 - xz + 2xyz$, $P_0 = (1, 3, -2)$, $u = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
(h) $f(x, y, z) = \sin(2x - 3y + 4z)$, $P_0 = (\pi/2, -\pi/3, \pi/4)$, $u = (-1, 3, 5)$
(i) $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 - z^2 + w^2 + xyzw$, $P_0 = (-1, 2, 1, 3)$, $u = (3, 1, 4, -2)$
(j) $f(x, y, z, w) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$, $P_0 = (-3, 0, 4, 0)$, $u = (1, 1, -2, 1)$
(k) $f(x, y, z, w) = xy + zw$, $P_0 = (1, -1, -1, 1)$, $u = (2, 3, -3, 1)$

78. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki noktada ve herhangi bir $u = (u_1, u_2)$ birim vektörü yönündeki yönlü türevinin olup olmadığını araştırınız. Ayrıca bu fonksiyonların $(0, 0)$ noktasında diferensiyelenebilir olup olmadığını araştırınız.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{|x|}{2x} \sqrt{2x^2 + 3y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

79. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki noktada ve θ yönündeki yönlü türevini bulunuz.

- (a) $f(x, y) = 2x^2y + 3xy^2 + 5x - 4y$, $P_0 = (-1, 3)$, $\theta = \pi/4$
(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $P_0 = (-3, 4)$, $\theta = \pi/3$
(c) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $P_0 = (2, -5)$, $\theta = 2\pi/3$
(d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + xy)$, $P_0 = (1, 1)$, $\theta = \pi$
(e) $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$, $P_0 = (1, -1)$, $\theta = \pi/4$
(f) $f(x, y) = \sin(2x - 3y) - \cos(-2x + 3y)$, $P_0 = (\pi/2, -\pi/3)$, $\theta = \pi/2$

12 Gradyent, Diverjans, Rotasyonel

80. $f = x^2y - xx^3$ dir. a) $\vec{\nabla} f$, b) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} f)$, c) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)$ i bulunuz.

81. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ olmak üzere

- (a) $\vec{\nabla}|\vec{r}|^3 = 3r\vec{r}$
(b) $\vec{\nabla}f(r) = \frac{f'(r)\vec{r}}{r}$

olduğunu gösteriniz.

82. $\vec{\nabla} f = (2xy - z^3)\vec{i} + z^2\vec{j} - 3xz^2\vec{k}$ dir. f yi bulunuz.

83. $U(x, y, z)$ diferansiye edilebilir bir fonksiyon ise $\vec{\nabla} U d\vec{r} = dU$ olduğunu gösteriniz.

84. $F(x, y, z, t)$ ve $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ argümanlarının diferansiye edilebilir fonksiyonları ise

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{\nabla} f \frac{d\vec{r}}{dt}$$

olduğunu gösteriniz.

85. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ dir. $\vec{\nabla}^2 f(r) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr}$ olduğunu gösteriniz,
86. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ irrotasyonel ise $\vec{A} \times \vec{B}$ nin solenoidal olduğunu gösteriniz:
87. $f(r)\vec{r}$ nin irrotasyonel olduğunu gösteriniz.
88. $\vec{u} = (by + cz)\vec{i} + (ax + cz)\vec{j} + (ax + by)\vec{k}$ dur. $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$ olması için a, b ve c nin gerçeklemeleri gereken ilişkiyi bulunuz.
89. Aşağıdaki yüzeylerin yanlarında verilen noktada teğet düzlem ve normal denklemlerini bulunuz.
- $4x^2 - y^2 + 3z^2 - 10 = 0, (2, -3, 1)$
 - $z - 4x^2 - 9y^2 = 0, (-2, -1, 25)$
 - $9x^2 - 4y^2 - 25z^2 - 40 = 0, (4, 1, -2)$
 - $z - 4x^2 + y^2 = 0, (5, -8, 36)$
 - $xy + xz + yz - 3x^3y^3z^3 = 0, (1, 1, 1)$
 - $x^2y^3 - xy^2 = z + \frac{3}{8}, (2, \frac{1}{2}, -\frac{3}{8})$
90. $u, x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinin $(2, 2, 1)$ deki normali olmak üzere $f(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 + z^2 + xyz$ fonksiyonunun $(2, 2, 1)$ deki u vektörü yönündeki yönlü türevini hesaplayınız.
91. $f(x, y, z) = x^2y + e^{\frac{z}{x}}$ ve $g(x, y, z) = \frac{z}{x} + 2xy$ fonksiyonları için $(2, 1, 0)$ noktasında $\nabla(f + g)$ ve $\nabla(f \cdot g)$ değerlerini hesaplayınız.
92. $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 - y^3$ ve $g(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ fonksiyonları için $(1, 1)$ noktasında $\nabla(4f + 2g)$ ve $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)$ değerlerini hesaplayınız.
93. $f(x, y, z) = 2xy^2z + \frac{xy}{z^2}$ ve $g(x, y, z) = -7x + y^2 + z^2$ fonksiyonlar için $(-1, 2, 4)$ noktasında $\nabla(f \cdot g), \nabla\left(\frac{1}{f}\right), \nabla(f^2), \nabla(g^3)$ ve $\nabla(\sqrt[4]{g})$ değerlerini hesaplayınız.
94. $f(x, y)$ ve $g(x, y)$ fonksiyonları için $\nabla(f, g) = f_xg_y - f_yg_x$ olarak tanımlansın. Buna göre $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ve $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ fonksiyonları için $\nabla(f, g)$ değerini hesaplayınız.
95. Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için $h = gof$ bileşke fonksiyonunun gradiyentini yanlarındaki noktada hesaplayınız.
- $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy, g(x) = x^2, (1, -3)$
 - $f(x, y) = x^2y - xy^2 + 3xy, g(x) = 1 - x - x^2, (-1, 3)$
 - $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2 - xyz, g(x) = x^2 + x - 1, (1, 1, -1)$
 - $f(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2, g(x) = 2x^4 + 3x^2 + 7x - 1, (-1, 4, 3)$

13 Çok Değişkenli Fonksyonlarda Maksimum ve Minimum

96. Aşağıdaki fonksiyonların kritik noktalarını bulunuz ve cinslerini belirleyiniz.
- $f(x, y) = x^4 + y^3 + 32x - 9y$
 - $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
 - $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x - 32y - 7$

- (d) $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 2xy + 5y^2 - 4y^3$
- (e) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
- (f) $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$
- (g) $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$
- (h) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$
- (i) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x + 4$
- (j) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 + 3$
- (k) $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 6xy + 6$
- (l) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y - 6$
- (m) $f(x, y) = ye^x - y$
- (n) $f(x, y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$
- (o) $f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2}$
- (p) $f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$
- (q) $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2$
- (r) $f(x, y) = 4x^2 - 4xy + 2y^2 + 10x - 6y$
- (s) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 1$
- (t) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3ax - 36y$

14 Yan Şartlı Maksimum ve Minimum

97. Aşağıda yan şartı ile verilen fonksiyonların maksimum ve minimum değerlerini bulunuz,

- (a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy, g(x, y) = x + 3y - 2 = 0$
- (b) $f(x, y) = 2xy^2 + 3xy - y^3, g(x, y) = 2x - 3y + 4 = 0$
- (c) $f(x, y) = x^2 + xy^2 + 3xy, g(x, y) = -2x - 2y + 5 = 0$
- (d) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y, g(x, y) = 5x - 8y + 4 = 0$
- (e) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5xy + x - y, g(x, y) = 2x - 3y + 6 = 0$
- (f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, g(x, y) = x + y - 1 = 0$
- (g) $f(x, y) = xy, g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
- (h) $f(x, y, z) = x - y + z, g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$
- (i) $f(x, y, z) = 3x - y + 2z, g(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} - 1 = 0$
- (j) $f(x, y, z) = xyz, g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
- (k) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3, g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$

98. Aşağıdaki noktaların yanlarındaki yüzeylere olan en kısa uzaklıklarını bulunuz.

- (a) $(2, 1, -1), x + y - z = 1$
- (b) $(1, 2, 3), x - y + z = 4$
- (c) $(0, 0, 0), z^2 = xy + 1$
- (d) $(0, 0, 0), x^2y^2z = 1$
- (e) $(2, 1 - 3), x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- (f) $(-1, 2, 2), x^2 = y^2 + z^2$

15 Kapalı Bölgelerde Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum

99. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen B bölgesindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

- (a) $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2, B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
- (b) $f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1, B = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1 - x\}$
- (c) $f(x, y) = xy(108 - 2x - 2y), B = \{(x, y) : x + y \leq 54, x \geq 0, y \geq 0\}$
- (d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4, B = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
- (e) $f(x, y) = 2xy - (1 - x^2 - y^2)^{3/2}, B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (f) $f(x, y) = 1 + xy - x - y, B, y = z^3$ ve $y = 4$ ile sınırlı bölge
- (g) $f(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2 + x - y, B; x = y^2$ ve $x = 1$ ile sınırlı bölge
- (h) $f(x, y) = x^2(y + 1) - 2y, B = \{(x, y) : \sqrt{1 + x^2} \leq y \leq 2\}$

16 Lagrange Çarpanlar Yöntemi

100. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında yazılı yan şartlar altındaki maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2, xy = 1$
- (b) $f(x, y) = 4x + 6y, x^2 + y^2 = 13$
- (c) $f(x, y) = x^2 + y^2, x^4 + y^4 = 1$
- (d) $f(x, y) = xy \cdot x^2 + 3y^2 = 6$
- (e) $f(x, y) = (x + y)e^{-x^2 - y^2}, 2x + y = 0$
- (f) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{xy}{2} + 1, 4x^2 + y^2 = 1$
- (g) $f(x, y) = 2x^2 + y^2, x^4 - x^2 + y^2 - 5 = 0$
- (h) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1, 4x^2 + y^2 - 1 = 0$
- (i) $f(x, y, z) = x + y^2 + 2z, 4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 36$
- (j) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- (k) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, x + 3y - 2z = 4$
- (l) $f(x, y, z) = xy^2z^2, x + y + z = 12$
- (m) $f(x, y, z) = 8x - 4z, x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$
- (n) $f(x, y, z) = x^2y^2z^2, x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- (o) $f(x, y, z) = xyz, x + y + z = a, a > 0$ sabit
- (p) $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4, x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- (q) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0)$
- (r) $f(x, y, z) = xy^2z^3, x + y + z = 6, x > 0, y > 0, z > 0$
- (s) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p, x_1 + x_2 + \dots + x_n = a (p > 1, \Leftrightarrow > 1)$
- (t) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 (\sigma_1 > 0)$

(u) $f(x, y, z) = xyz, x + y + z = 40$ ve $x + y = z$

(v) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, x + 2y + 3z = 6$ ve $x + 3y + 9z = 9$

(w) $f(x, y, z) = x + y + z, x^2 - y^2 = 1$ ve $2x + z = 1$

(x) $f(x, y, z) = 3x + 3y + 8z, x^2 + z^2 = 1$ ve $y^2 + z^2 = 1$

101. $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ yüzeyi üzerinde $(0, 0, 0)$ noktasına en yakın ve en noktalarını bulunuz.

102. $\frac{z^2}{y} + \frac{y^2}{16} + \frac{a^2}{16} = 1$ elipsoidi içirisine yerleştirilen en büyük hacimli dikdörtgenler prizmasının hacmini bulunuz.