1) $r = \dfrac{25}{10 - 5\cos\theta}$ denkleminin belirttiği eğriyi çiziniz. Bu eğrinin merkezini bulunuz.

Çözüm : $r = \dfrac{25}{10-5\cos\theta} = \dfrac{\left(\frac{25}{10}\right)}{1-\frac{5}{10}\cos\theta} = \dfrac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$

$\Rightarrow e = \frac{1}{2}$, $d = 5$ olarak bulunur.

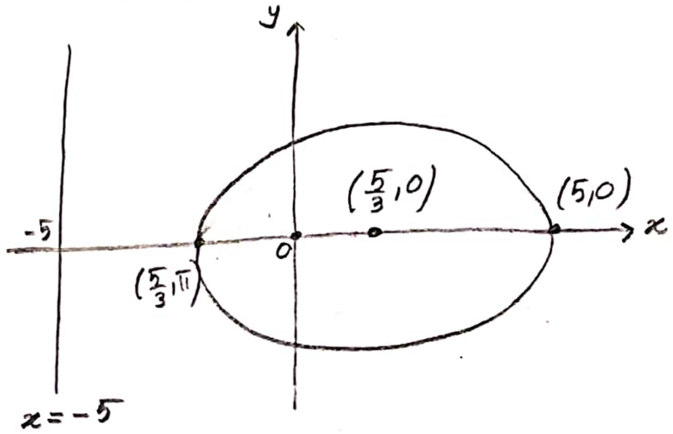
- Verilen koniğin doğrultmanı $(5,\pi)$ noktasından geçen ve kutup eksenine dik olan doğrudur.
- $0 < e < 1$ olduğundan bu konik bir elipstir.

Öte yandan, $\boxed{d = \frac{a}{e} - ea}$ 'dır.

$\Rightarrow 5 = 2a - \frac{a}{2} \Rightarrow 5 = \frac{3a}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{10}{3}}$ bulunur.

$\Rightarrow e \cdot a = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow M\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ olarak elde edilir.



2) Aşağıda kutupsal denklemleri verilen eğrilerin kartezyen denklemini bulunuz ve grafiği tanımlayınız.

a) $r = \cot\theta . \csc\theta$

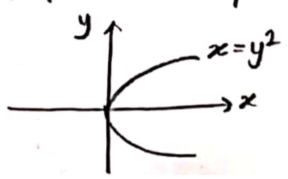
b) $r = 2\cos\theta + 2\sin\theta$

c) $r\sin\theta = r\cos\theta$

Çözüm : a) $r = \cot\theta . \csc\theta = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) . \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow r . \sin^2\theta = \cos\theta$ $\quad \begin{pmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r^2\sin^2\theta = r\cos\theta \overset{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}}{\Longrightarrow} \boxed{y^2 = x}$ kartezyen koordinatlardaki denklemi elde edilir.

Bu denklem ise tepe noktası $(0,0)$ olan parabol denklemidir.



b) $r = 2\cos\theta + 2\sin\theta \implies r^2 = 2r\cos\theta + 2r\sin\theta$

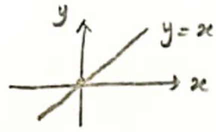
$$\xRightarrow[(x^2+y^2=r^2)]{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}} x^2+y^2 = 2x+2y$$

$\implies \boxed{x^2-2x+y^2-2y=0}$ denklemi elde edilir.

Düzenlersek,

$\boxed{(x-1)^2+(y-1)^2=2}$ denklemi elde edilir. Bu ise; merkezi $M(1,1)$, yarıçapı $a=\sqrt{2}$ olan çember denklemidir.

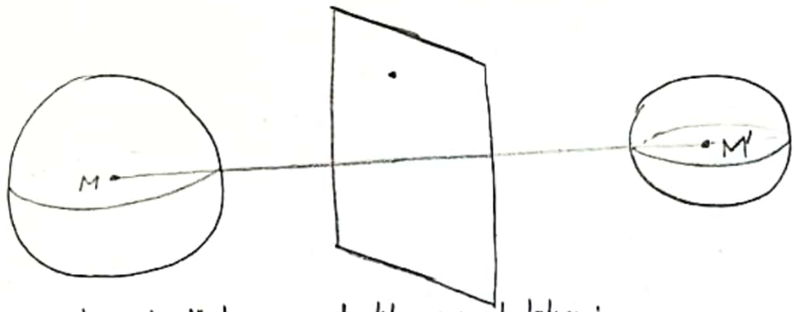
c) $r\sin\theta = r\cos\theta \xRightarrow{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}} \boxed{y=x}$ denklemi elde edilir.



- Eğimi $m=1$ olan, $(0,0)$ noktasından geçen doğru denklemidir.

3) $x^2+y^2+z^2=9$ ve $x^2+(y-y_0)^2+z^2=25$ kürelerinin kuvvet düzlemi, $(2,-3,1)$ noktasından geçecek biçimdeki y_0 sayılarının kümesini bulunuz.

Çözüm:



Küre yüzeylerinin kuvvet düzleminin denklemini bulalım:

$$\cancel{x^2}+y^2+\cancel{z^2}-9 = \cancel{x^2}+(y-y_0)^2+\cancel{z^2}-25$$

$\implies y^2 = y^2-2y_0y+y_0^2-25+9 \implies \boxed{y_0^2-2y_0y-16=0}$ denklemi elde edilir.

Bu düzlem $(2,-3,1)$ noktasından geçtiğinden,

$$y_0^2-2y_0\cdot(-3)-16=0$$

$$\implies y_0^2+6y_0-16=0$$

$\implies \boxed{y_0=-8}$ veya $\boxed{y_0=2}$ olarak elde edilir.

O halde, istenilen y_0 sayılarının kümesi $\{-8, 2\}$ olarak elde edilir.

4) Küresel koordinatlardaki denklemi $\rho = 2\sin\theta\sin\varphi$ olan yüzeyin kartezyen koordinatlardaki denklemini bularak bu yüzeyin tipini belirleyiniz.

Çözüm: Küresel Koordinatlar

$x = \rho\cos\theta\sin\varphi$

$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$

$z = \rho\cos\varphi$

$(x^2+y^2+z^2=\rho^2)$

$\rho = 2\sin\theta\sin\varphi \implies \underbrace{\rho^2}_{=x^2+y^2+z^2} = 2\underbrace{\rho\sin\theta\sin\varphi}_{=y}$

$\implies x^2+y^2+z^2=2y \implies x^2+y^2-2y+z^2=0 \implies \boxed{x^2+(y-1)^2+z^2=1}$ bulunur.

$\implies \boxed{x^2+(y-1)^2+z^2=1} \rightarrow (0,1,0)$ merkezli, 1 yarıçaplı küredir.

5) $x^2+y^2+z^2=4$ küresi ile $x=1$ düzleminin arakesiti olan eğriyi dayanak eğrisi olarak alan ve doğrultman vektörü $(3,2,-4)$ olan silindirin denklemini bulunuz. (3)

Çözüm: $K: \; x^2+y^2+z^2=4$
$D: \; x=1$ olsun.

$K\cap D$ kümesi üzerindeki noktaları bulalım:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow 1^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow \boxed{y^2+z^2=3} \text{ bulunur.}$$

O halde, $K\cap D$ kümesi üzerindeki noktalar,

$$x=1 \quad \text{ve} \quad y^2+z^2=3$$

önermesini sağlayan noktalardır. Buradan, $K\cap D$ kümesinin

$$\alpha(t)=(1, \sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t)$$

eşitliğiyle belirli α eğrisi olduğu anlaşılır.

Şimdi de; dayanak eğrisi α ve doğrultman vektörü $u:=(3,2,-4)$ olan silindirin denklemini bulalım:

$$\varphi(t,\lambda)=\alpha(t)+\lambda u$$
$$=(1,\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t)+\lambda(3,2,-4)$$

olarak elde edilir. $P=(x,y,z)$ almak üzere, $P=\varphi(t,\lambda)$ eşitliğinden,

$$\begin{cases} x=1+3\lambda & (1) \\ y=\sqrt{3}\cos t+2\lambda & (2) \\ z=\sqrt{3}\sin t-4\lambda & (3) \end{cases}$$

bulunur.

$(1) \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{x-1}{3}}$ olarak bulunur. (2) ve (3) 'te yerine yazalım:

$$\Rightarrow y-2\left(\frac{x-1}{3}\right)=\sqrt{3}\cos t \quad , \quad z+4\left(\frac{x-1}{3}\right)=\sqrt{3}\sin t$$

$$\Rightarrow \boxed{(3y-2x+2)^2+(4x+3z-4)^2=27} \text{ denklemi elde edilir.}$$

6) $x=1$ ve $z=y^2$ yüzeylerinin arakesiti olan α eğrisini belirtiniz. Dayanak eğrisi α ve tepe noktası $(4,0,0)$ olan koni yüzeyinin denklemini bulunuz.

Çözüm: • $x=1$ yüzeyi uzayda bir düzlem belirtir. Bu düzlemi D ile gösterelim.

• $z=y^2$ yüzeyi uzayda bir silindir yüzeyi belirtir. Bu silindiri S ile gösterelim.

$D\cap S$ kümesi, $\begin{cases} x=1 \\ z=y^2 \end{cases}$ eşitliklerinin her ikisini birden doğrulayan (x,y,z) noktalarının kümesidir.

$$\Rightarrow \boxed{D\cap S=\{(1,t,t^2) \mid t\in\mathbb{R}\}} \text{ şeklindedir.}$$

Buna göre, arakesit eğrisi α, $\boxed{\alpha(t)=(1,t,t^2)}$ şeklinde bulunur. Bu eğri, $x=1$

düzlemi içinde bir paraboldür.

Şimdi de; dayanak eğrisi α ve tepe noktası $H:=(4,0,0)$ olan koni yüzeyinin denklemini bulalım:

P, koni yüzeyi üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere, $(P=(x,y,z))$

$$P=\varphi(t,\lambda)=(1-\lambda)\alpha(t)+\lambda H$$
$$=(1-\lambda)(1,t,t^2)+\lambda(4,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=(1-\lambda)+4\lambda & (1) \\ y=(1-\lambda)t & (2) \\ z=(1-\lambda)t^2 & (3) \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

$(1)\Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{x-1}{3}}$ bulunur. (2) ve (3)'te yerine yazalım:

$$y=\left(1-\frac{x-1}{3}\right)t \quad \text{ve} \quad z=\left(1-\frac{x-1}{3}\right)t^2$$

bulunur. Düzenlersek,

$$\boxed{3y^2-4z+xz=0}$$

denklemi elde edilir.

7) Uzayda, $\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\eta(t)=(0,t^2,t)$ eğrisinin, Oz-ekseni çevresinde döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin denklemini bulunuz.

<u>Çözüm:</u> η eğrisi üzerindeki bir T noktasının, xOy düzlemine göre pozitif yönde λ radyan döndürülmesiyle elde edilen nokta P olsun. Bu takdirde,

$$\begin{cases} x=-t^2\sin\lambda \\ y=t^2\cos\lambda \\ z=t \end{cases}$$

şeklindedir. Bu denklemlerden ilk ikisinin kareleri alınıp toplanarak,

$$x^2+y^2=t^4$$

bulunur. Üçüncü denklem yardımıyla,

$$\boxed{x^2+y^2=z^4}$$

yüzeyi elde edilir.

<u>II. yol</u>

Oz-ekseninin denklemi $X=t(0,0,1)$ şeklinde verilebilir. $A=(0,0,0)$ ve $u=(0,0,1)$ olmak üzere, $X=t(0,0,1)$ doğrusu, A noktasından geçen ve u vektörüne paralel olan doğrudur. Aradığımız dönel yüzey, u vektörüne dik olarak değişen bir düzlemle, merkezi $(0,0,0)$ noktası olan, değişen k yarıçaplı küre yüzeyinin ortak noktalarından oluşur.

u vektörüne dik olan bir düzlemin denklemi,

$$u_1 x + u_2 y + u_3 z + d = 0 \quad \ldots (1)$$

biçimindedir. $u=(0,0,1)$ olduğundan, (1)'den

$$\boxed{z + d = 0} \quad \ldots (2)$$

bulunur. Merkezi $(0,0,0)$ noktası olan k yarıçaplı küre yüzeyinin denklemi,

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=k^2} \quad \ldots (3)$$

dir. Her $t \in \mathbb{R}$ için $\eta(t)$ noktası hem düzlemin üzerinde hem de küre yüzeyinin üzerinde bulunduğundan,

$$t+d=0 \quad \ldots (4)$$

$$t^4+t^2=k^2 \quad \ldots (5)$$

olmalıdır. (4)'ten, $\boxed{t=-d}$ bulunur. (5)'te yerine yazarsak,

$$\boxed{d^4+d^2-k^2=0} \quad \ldots (6)$$

denklemi elde edilir. (2) ve (3) eşitliklerine göre, dönel yüzey üzerindeki değişken her (x,y,z) noktası için,

$$d=-z \quad , \quad k=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

dir. Bu takdirde, (6) denkleminden,

$$z^4+(-z)^2-(x^2+y^2+z^2)=0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{z^4 = x^2+y^2}$ dönel yüzeyi elde edilir.

8) Aşağıda verilen kuadrik yüzeylerin tipini belirleyerek çiziniz.

a) $4x^2+4y^2=z^2$

b) $z=1+y^2-x^2$

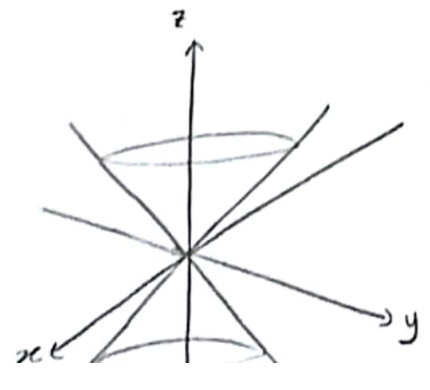
c) $y=-(x^2+z^2)$

d) $36x^2+9y^2+4z^2=36$

e) $4x^2-4y^2-z^2=4$

Çözüm: a) $4x^2+4y^2=z^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=\dfrac{z^2}{2^2}$ olarak yazılır.

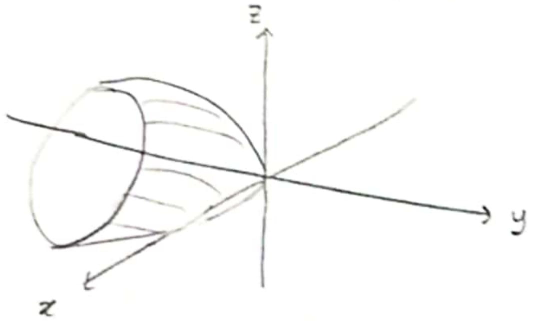
$\Rightarrow$ Eliptik konidir.



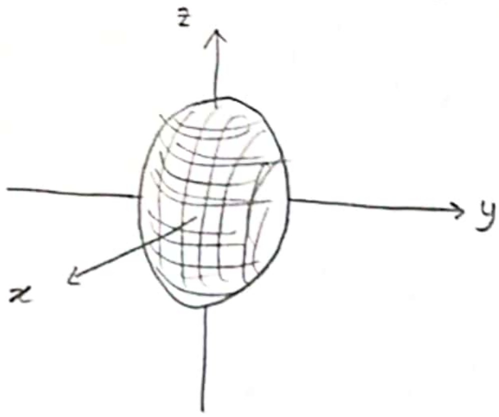
b) $z = 1 + y^2 - x^2$

Hiperbolik paraboloid yüzeyidir. (Kesitler alarak gösteriniz!)

c) $y = -(x^2 + z^2)$ Paraboloid yüzeyidir. (Kesitler alarak gösteriniz!)



d) $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \Rightarrow$ Elipsoid yüzeyidir.
(Kesitler alarak gösteriniz!)



e) $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{2^2} = 1 \Rightarrow$ Çift kanatlı hiperboloiddir.
(Kesitler alarak gösteriniz!)