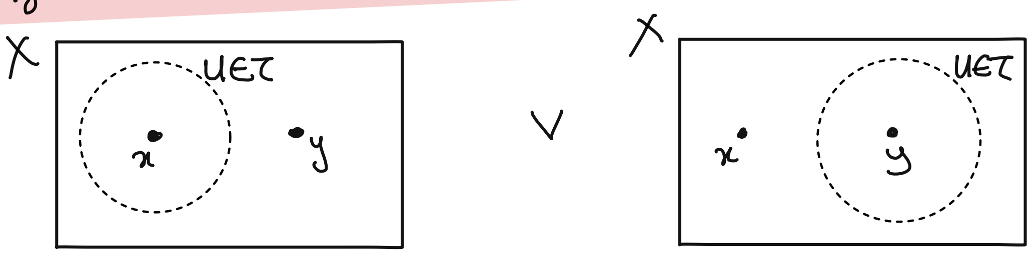
AYIRMA AKSİYOMLARI

Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

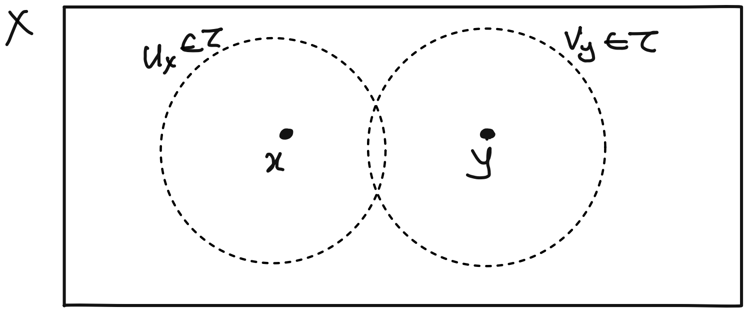
a) X uzayının her farklı x, y noktası çifti için x'i içeren fakat y noktasını içermeyen veya y'yi içeren fakat x noktasını içermeyen bir $U\ (\in \tau)$ açık kümesi varsa (X, τ) topolojik uzayına bir T_0 uzayı denir. Bu aksiyom Kolmogoroff ayırma aksiyomu olarak da bilinir.

$$T_0 : x, y \in X\ (x \neq y) \text{ için } \exists\, U \in \tau : (x \in U \wedge y \notin U) \vee (x \notin U \wedge y \in U)$$



b) X uzayının her farklı x, y nokta çifti için x'i içeren fakat y noktasını içermeyen ve y'yi içeren fakat x noktasını içermeyen $U, V \in \tau$ açık kümeleri bulunabiliyorsa (X, τ) uzayına T_1 uzayı denir. Bu aksiyom Frechet ayırma aksiyomu olarak da bilinir.

$$T_1 : x, y \in X\ (x \neq y) \text{ için } \exists\, U_x, V_y \in \tau : (x \in U_x \wedge y \notin U_x) \wedge (x \notin V_y \wedge y \in V_y)$$



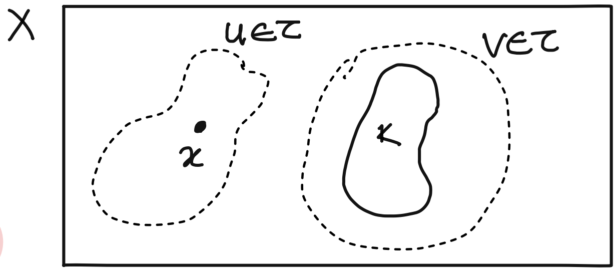
c) X uzayının her farklı x, y nokta çifti için x'i içeren fakat y noktasını içermeyen ve y'yi içeren fakat x noktasını içermeyen U ve V açık kümeleri $U \cap V = \emptyset$ bulunabiliyorsa (X, τ) uzayına T_2 uzayı denir. Bu aksiyom Haussdorf ayırma aksiyomu olarak da isimlendirilir.

$$T_2 : x, y \in X\ (x \neq y) \text{ için } \exists\, U, V \in \tau : (x \in U \wedge y \in V) \wedge (U \cap V = \emptyset)$$

d) X uzayının her kapalı K kümesi ve $x\ (\notin K)$ için $x \in U$ $K \subseteq V$ o.ş. her x, K $(x \notin K)$ her nokta kapalı küme çiftine karşın $\exists U, V \in \tau : (x \in U) \wedge (K \subseteq V) \wedge (U \cap V = \emptyset)$ koşulu gerçekleniyorsa (X, τ) uzayına regüler uzay denir. Bu aksiyom Vietoris ayırma aksiyomu olarak da bilinir.

Regüler : $(K \subseteq X,\ x \in X,\ X \setminus K \in \tau,\ x \notin K)$

$\Rightarrow \exists U, V \in \tau : (x \in U \wedge K \subseteq V) \wedge (U \cap V = \emptyset)$

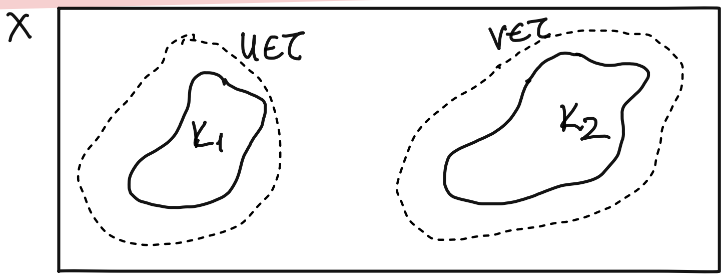


Regüler T_1 uzayına T_3 uzayı denir.

e) X uzayının $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ koşulunu sağlayan her kapalı K_1 ve K_2 kümeleri için $K_1 \subseteq U$ ve $K_2 \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ koşulunu gerçekleyen $U, V \in \tau$ açık kümeleri bulunabiliyorsa (X, τ) uzayına normal uzay denir. Bu aksiyom Urysohn ayırma aksiyomu olarak isimlendirilir.

Normal uzay : $K_1, K_2 \subseteq X$, $C_X K_1, C_X K_2 \in \tau$ ve $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

$\Rightarrow \exists U, V \in \tau : (K_1 \subseteq U \wedge K_2 \subseteq V) \wedge (U \cap V = \emptyset)$



Normal T_1 uzayına T_4 uzayı denir.

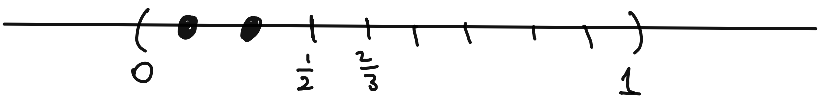
Uyarılar:

a) Yukarıda verilen tanımlardan her T_2 uzayı bir T_1 uzayı, her T_1 uzayı bir T_0 uzayıdır. $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

Fakat T_0 olmayan topolojik uzaylar vardır. Bunu kanıtlamak için T_0 olmayan bir topolojik uzay örneği vermek yeterlidir. X en az iki elemana sahip bir küme $\tau_X = \{\emptyset, X\}$, $x, y \in X$ $(x \neq y)$ koşulunu sağlayan tek açık küme X'tir. $x \in X$ fakat $y \in X$ ya da bu tersi $y \in X$ ama $x \in X$. Bu uzayda bir noktayı içerip diğerini içermeyen açık küme yok da (X, τ) T_0 uzayı değil.

$X=(0,1)$, $U_n=[0,1-\frac{1}{n})$, $n=2,3,\dots$ olsun.

$\tau=\{\emptyset,X\}\cup\{U_n : n=2,3,\dots\}$



(X,τ) T_0 değil.

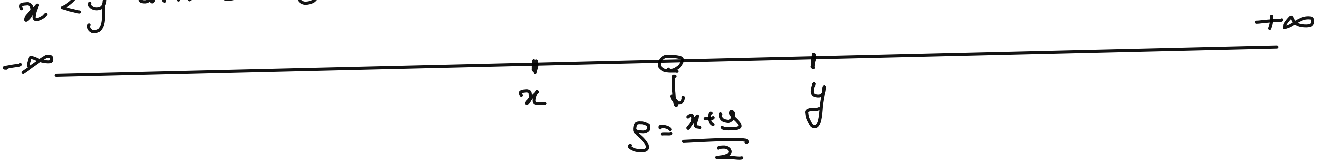
b) T_0 uzayı, T_1 uzayı olmak zorunda değildir.

b.1) iddiamızı kanıtlamak için T_1 uzayı olmayan bir T_0 uzayı örneği vermek yeterlidir.

$\mathbb{R}$ üzerinde $\tau=\{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\{(-\infty,a) : a\in\mathbb{R}\}$ sol ışın topolojisi verilsin.

$x,y\in\mathbb{R}$, $x\neq y$ olsun.

$x<y$ almak genelliği bozmaz.



$s=\frac{x+y}{2}$ için $x\in(-\infty,s)\in\tau$, $y\notin(-\infty,s)$ old.dan uzay T_0'dır ama y noktasını içeren her açık küme x'i de içereceğinden bu uzay T_1 uzayı değildir.

b.2) $S=\{0,1\}$ $\tau_S=\{S,\{0\},\emptyset\}$ $\Rightarrow$ Sierpinski uzayı

T_0 uzayıdır ama T_1 uzayı değildir.

$0\neq 1$, $0,1\in S$, $0\in\{0\}\in\tau_S$, $1\notin\{0\}$ $\Rightarrow$ uzay T_0'dır.

Ama bu uzayda 1'i içerip 0'ı içermeyen bir açık küme yoktur.

O halde (S,τ_S) T_1 uzayı değildir.

c) T_1 uzayı, T_2 uzayı olmak zorunda değil.

X sonsuz bir küme $\tau=\{\emptyset\}\cup\{G\subseteq X \mid C_X G \text{ sonlu}\}$ bütünleyeni sonlu topolojisini göz önüne alalım.

$x,y\in X$, $x\neq y$ olsun.

$X\setminus\{x\}$, $X\setminus\{y\}\in\tau$

$x\in X\setminus\{y\}$, $y\notin X\setminus\{y\}$ ve $y\in X\setminus\{x\}$, $x\notin X\setminus\{x\}$ old.dan T_1 uzayı.

$(X\setminus(X\setminus\{x\}))=\{x\}$ sonlu $\Rightarrow$ $X\setminus\{x\}\in\tau$.

(X,τ) nun T_2 uzayı old. farzedelim.

$x,y \in X$, $x \neq y$ için $x \in U_x$, $y \in U_y$ ve $U_x \cap U_y = \emptyset$ dur.

$$U_x \cap U_y = \emptyset \Rightarrow \underbrace{U_x}_{\text{sonsuz}} \subseteq \underbrace{C_X U_y}_{\text{sonlu}} \quad \text{Çelişki!!}$$

$$U_x \cap U_y = \emptyset \Rightarrow C_X(U_x \cap U_y) = \underbrace{C_X U_x}_{\text{sonlu}} \cup \underbrace{C_X U_y}_{\text{sonlu}} = \underbrace{X}_{\text{sonsuz}} \quad \text{Çelişki!!}$$

(X,τ) uzayı T_2 uzayı değildir.

25 Şubat 2025

d) Her T_2 uzayı regüler uzay değildir.

$(\mathbb{R}, \tau_{st})$ göz önüne alınsın. $\mathbb{Q} (\subseteq \mathbb{R})$ kümesinden hareket ile

$\tau^* = \{ G \cup (H \cap \mathbb{Q}) : G, H \in \tau_{st} \}$ topolojisi göz önüne alınsın.

Bu topoloji de bazı açık küme tipleri :

(i) $\mathbb{Q} \cup (\tau_{st}$ kapalı kümeler$)$

(ii) $(\tau_{st}$ açık kümeler$) \cup (\mathbb{Q} \cap \tau_{st}$ açık kümeler$)$ olarak verilebilir.

$G = \emptyset$, $H = \mathbb{R}$ için

$$\underbrace{\emptyset}_{\in \tau_{st}} \cup \underbrace{(\mathbb{R} \cap \mathbb{Q})}_{\in \tau_{st}} = \mathbb{Q} \in \tau^*$$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τ^* – kapalı bir kümedir.

$0 \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ o halde nokta kapalı küme çifti olarak $(0, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ seçilebilir. 0'ı içeren her açık küme ile $\neq \emptyset$ arakesite sahiptir. tek açık küme $\mathbb{R}$ dir ve

Aksi durumda $U, V \in \tau^*$ ayrık açık kümeleri $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \subseteq U$ ve $0 \in V$ o.ş. bulunabilirdi. Bu durumda $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \subseteq U = G \cup (H \cap \mathbb{Q})$ o.ş. $G, H \in \tau_{st}$ vardır.

Her τ_{st} açık küme $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ile $\neq \emptyset$ arakesite sahip, o halde

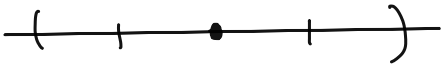
$\exists M \in \tau_{st}$: $V = M \cap \mathbb{Q}$ olur. $\exists \varepsilon > 0$, $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subseteq M \cap \mathbb{Q}$ o.ş. seçilebilir. $(0 \in V)$

$\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ irrasyonel sayısı seçilebilir. $\xi \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \subseteq G (\subseteq U)$ gerçeklenir. $G \in \tau_{st}$ old.dan

$\exists \delta > 0$: $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \underset{\subseteq U}{G}$ gerçeklenir. $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ aralığında bir r rasyonel sayısı da seçilebilir. Aynı zamanda $r \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subseteq V$ geçerlidir. Bu durumda

$U \cap V \neq \emptyset$ çelişkisi elde edilir.

$x,y \in \mathbb{R}$ $(x \neq y)$



$\delta = |x-y|$ için $\underbrace{\left(x-\frac{\delta}{2},\ x+\frac{\delta}{2}\right)}_{\in \tau_{st}} \cap \underbrace{\left(y-\frac{\delta}{2},\ y+\frac{\delta}{2}\right)}_{\in \tau_{st}} = \emptyset$ $(\mathbb{R}, \tau^*)$ T_2 uzayıdır.

e) Her regüler uzay T_2 uzayı değildir.

$X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{X, \emptyset, \{a\}, \{b,c\}\}$ olsun. Bu uzay $b,c \in X$ ama b ve c'yi içeren ayrık açık küme çifti olmadığından T_2 değildir.

τ-kapalı kümeler $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$ olur.

$a \notin \{b,c\}$, $a, \{b,c\}$ nokta kapalı küme çifti için $(\{a\}, \{a,b\})$ bu çifte karşı gelen ayrık açık küme çifti $b \notin \{a\}$, $c \notin \{a\}$ old.dan her iki durumda $(\{b,c\}, \{a\})$ ayrık $(b, \{a\})$, $(c, \{a\})$ nokta kapalı çiftlerine gelir. $(a, \emptyset)$, $(b, \emptyset)$, $(c, \emptyset)$, $(\{a\}, \emptyset)$, $(\{b,c\}, \emptyset)$ açık küme çifti karşı gelir. Bu uzay regüler uzaydır.

ayrık açık küme çiftleri karşı gelir. Bu uzay regüler uzaydır.

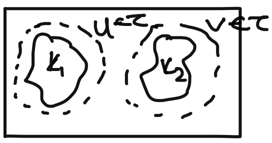
Ayrık açık küme çiftleri karşı gelir. Bu uzay regüler uzaydır.

f) Tek elemanlı her küme kapalı olmak zorunda değildir.

$X=\{a,b,c\}$ üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b,c\}\}$ göz önüne alınsın.

$\{b\}$ ve $\{c\}$ tek nokta kümeleri bu topoloji de kapalı değiller.

g) Her normal uzay T_2 uzayı değildir.



$\Rightarrow U \cap V = \emptyset$

Normal uzay

$S=\{0,1\}$ üzerinde $\tau_S = \{\emptyset, \{0\}, S\}$ göz önüne alınsın. $0,1 \in S$ $0 \neq 1$ için 0 ve 1'i içeren ayrık açık küme olmadığından bu uzay T_2 uzayı değil.

Kapalı kümeler $\emptyset, S, \{1\}$. Bu uzayda ayrık kapalı küme çiftleri $(S, \emptyset)$, $(\{1\}, \emptyset)$ ve bunlara karşı gelen ayrık açık küme çifti $(S, \emptyset)$ olur. Yani uzay normaldir.

Örnek: $\mathbb{R}$ üzerinde $(a,b]$ kümelerini taban kabul eden τ topolojisi T_2 midir?

Çözüm:

$a,b\in\mathbb{R}$ $\quad a\neq b$, $a<b$ olmak genelliği bozmaz.

$(a-1,a]$, $(a,b]\in\tau$

$a\in(a-1,a]$, $\quad b\in(a,b]$ ve $\quad (a-1,a]\cap(a,b]=\emptyset$

Teorem: Bir (X,τ) topolojik uzayının T_0 uzayı olması için g.y.k. $\forall x,y\in X$ nokta çifti için $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$ olmasıdır.

=İspat=

$(\Rightarrow)$ (X,τ) bir T_0 uzayı, $x,y\in X$ olsun.

$\exists U\in\tau : (x\in U, y\notin U)\vee(y\in U, x\notin U)$ gerçeklenir.

- $x\in U\in\tau$, $y\notin U$ gerçeklensin. $(x\in U)\wedge(U\cap\{y\}=\emptyset)$

$x\in\overline{\Delta} \iff \forall U\in\tau\cap\mathcal{U}_x \quad U\cap\Delta\neq\emptyset$

$\Rightarrow x\notin\overline{\{y\}}\Rightarrow\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$

- Eğer $y\in U\in\tau$, $x\notin U$ gerçeklensin $(y\in U)\wedge(U\cap\{x\}=\emptyset)$

$\Rightarrow y\notin\overline{\{x\}}\Rightarrow\overline{\{y\}}\neq\overline{\{x\}}$

$(\Leftarrow)$ $\forall x,y\in X$ için $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$ gerçeklensin. (X,τ) T_0 uzayı mıdır?

$x,y\in X$ alınsın. $x\in\overline{\{y\}}$ ve $y\in\overline{\{x\}}$ olursa

$\{x\}\subseteq\overline{\{y\}}\Rightarrow\overline{\{x\}}\subseteq\overline{\{y\}}$ ve $\{y\}\subseteq\overline{\{x\}}\Rightarrow\overline{\{y\}}\subseteq\overline{\{x\}}$

$\Rightarrow\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$

O halde ya $x\notin\overline{\{y\}}$ veya $y\notin\overline{\{x\}}$ gerçeklenir.

- $x\notin\overline{\{y\}}\Rightarrow\exists U\in\tau : (x\in U)\wedge(U\cap\{y\}=\emptyset)$ O halde $x\in U$ ve $y\notin U$
- $y\notin\overline{\{x\}}\Rightarrow\exists V\in\tau : (y\in V)\wedge(V\cap\{x\}=\emptyset)$ O halde $y\in V$ ve $x\notin V$

$\Rightarrow(X,\tau)$ bir T_0 uzayıdır.

Teorem: Bir (X,τ) topolojik uzayının T_1 uzayı olması için g.y.k. $\forall x\in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesinin τ-kapalı olmasıdır.

=İspat=

$(\Rightarrow)$ ((X,τ) bir T_1 uzayı ve $x\in X$ olsun) $\quad X\setminus\{x\}\in\tau$?

$y\in X\setminus\{x\}$ olsun.

(X,τ) bir T_1 uzayı olduğundan,

$\exists U\in\tau : (y\in U)\wedge(x\notin U)$ olsun. $\quad y\in U\subseteq X\setminus\{x\}$, $X\setminus\{x\}$ her noktası iç nokta o halde $\in\tau$.

$\Rightarrow X\setminus\{x\}\in\tau$ ve $\{x\}\in\tau$-kapalıdır.

$(\Leftarrow)$ $\forall x\in X$ için $\{x\}\in\tau$-kapalı olsun.

$x,y\in X$, $x\neq y$ olsun.

$\overline{\{y\}}=\{y\}$, $x\notin\overline{\{y\}}$

$\exists: U\in\tau : (x\in U)\wedge(U\cap\{y\}=\emptyset)\}$

O halde U, x'i içerip y'yi içermeyen açık kümedir.

Benzer şekilde $y\notin\overline{\{x\}}$ ise $\exists V\in\tau : (y\in V)\wedge(\overbrace{V\cap\{x\}=\emptyset}^{x\notin V})$

yani bir V açık kümesi y'yi içerip x'i içermemek üzere vardır.

Örnek:

$(\mathbb{R},\tau_{st})$, T_1 uzayı mıdır?

Çözüm:

$x\in\mathbb{R}$, $\quad \mathbb{R}\setminus\{x\}=(-\infty,x)\cup(x,\infty)\in\tau_{st}$

$\Rightarrow(\mathbb{R},\tau_{st})$ T_1 uzayıdır.

Tanım: Bir topolojik uzayın bir özelliği her alt uzayında korunuyorsa bu özelliğe kalıtsal özellik denir.

Örnek: T_1 uzayı olmak kalıtsal özellik midir?

Çözüm: (X,τ) bir T_1 uzayı. $A\subseteq X$ olsun. (A,τ_A) alt uzayı T_1 uzayı mıdır?

$x\in A$ için $\{x\}\in\tau_A$-kapalı mıdır?

$x\in A\subseteq X \Rightarrow \{x\}$ τ-kapalı

$\{x\}=A\cap\underbrace{\{x\}}_{\tau\text{-kapalı}} \Rightarrow \{x\}$ τ_A-kapalıdır.

sınav

Teorem: T_0 uzayı olmak kalıtsal özelliktir.

28 Şubat

=ispat=

(X,τ) bir T_0 uzayı, $Y \subseteq X$ ve Y üzerinde (X,τ) nun belirlediği alt uzay topolojisi τ_Y olsun. (Y,τ_Y) T_0 uzayı mıdır?

alt uzaydan seç

$x,y \in Y$, $x \neq y$ olsun.

$x,y \in Y \subseteq X \Rightarrow x,y \in X$ ve (X,τ) T_0 uzayı olduğundan

$\exists G \in \tau : (x \in G \wedge y \notin G) \vee (y \in G \wedge x \notin G)$ gerçeklenir.

$G \cap Y \in \tau_Y \overset{(x,y \in Y)}{\Longrightarrow} (x \in G \cap Y \wedge y \notin G \cap Y) \vee (y \in G \cap Y \wedge x \notin G \cap Y)$

$\Rightarrow (Y,\tau_Y)$ bir T_0 uzayıdır. $y \notin G \ (\supseteq G \cap Y) \Rightarrow y \notin G \cap Y$.

Teorem: T_0 uzayı olmak topolojik özelliktir.

=ispat=

(X,τ) bir T_0 uzayı, (X',τ') 'de ilk uzayın h homeomorfisiyle homeomorf olduğu topolojik uzay olsun. $h:(X,\tau) \longrightarrow (X',\tau')$ bir homeomorfizm var.

(X',τ') bir T_0 uzayı mıdır?

$x',y' \in X'$, $x' \neq y'$ olsun. h homeomorfi old.dan bijektiftir.

O halde üzerinelikten

$\exists x,y \in X : h(x)=x'$, $h(y)=y'$ o.s. vardır.

birebirliği bozar eşit olursa

$x' \neq y'$ ve h fonksiyon old.dan $x \neq y$ 'dir. Ayrıca h homeomorfi olduğundan y' nün y den farklı orijinali de olamaz.

$h^{-1}(y')=y$ 'dir. $y_1,y_2 \in h^{-1}(y)$ $(y_1 \neq y_2)$ $h(y_1)=h(y_2)=y$ 1-1 'likle çelişir.

$x,y \in X$, $x \neq y$ old. göre

$\exists A \in \tau : (x \in A \wedge y \notin A) \vee (y \in A \wedge x \notin A)$

$\Rightarrow (h(x) \in h(A) \wedge h(y) \notin h(A)) \vee (h(y) \in h(A) \wedge h(x) \notin h(A))$

$\Rightarrow (x' \in h(A) \wedge y' \notin h(A)) \vee (y' \in h(A) \wedge x' \notin h(A)) \wedge (h(A) \in \tau')$

çünkü h açık fonksiyon.

$h(A)=A' \in \tau'$ ve $(x' \in A' \wedge y' \notin A') \vee (y' \in A' \wedge x' \notin A')$

$\Rightarrow (X',\tau')$ bir T_0 uzayıdır ve T_0 uzayı olmak topolojik bir özelliktir.

Örnek: T_1 uzayı olmak topolojik özellik midir?

Çözüm: (X,τ) ve (Y,σ) birer topolojik uzay, (X,τ) bir T_1 uzayı, $h:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ bir homeomorfi olsun.

(Y,σ) bir T_1 uzayı mıdır? $y\in Y$ olsun (ya da tanımdan) $\{y\}$ σ-kapalı mıdır?

h üzerine old. dan: $\exists x\in X : h(x)=y \Rightarrow h^{-1}(y)=x$

$(x_1,x_2\in h^{-1}(y)$, $x_1\neq x_2$ olsaydı $h(x_1)=h(x_2)=y \Rightarrow x_1=x_2$ çelişki$)$

$x\in X$, (X,τ) T_1 uzayı old. dan $\{x\}$ τ-kapalıdır. h homeomorfi olduğundan $\forall A\subseteq X$ için $h(\overline{A})=\overline{h(A)}$'dır.

$\{y\}=h(\{x\})=h(\overline{\{x\}})=\overline{h(\{x\})}=\overline{\{y\}}$

$\Rightarrow \{y\}=\overline{\{y\}}$

$\Rightarrow \{y\}$, σ-kapalıdır.

$\forall y\in Y$ için $\{y\}$ σ-kapalı $\Rightarrow (Y,\sigma)$, T_1 uzayıdır.

Teorem: Haussdorff uzayı olma özelliği kalıtsal özelliktir.

İspat: (X,τ) bir Haussdorff (T_2) uzayı, $A\subseteq X$ olsun. (X,τ) nun A üzerinde belirlediği (A,τ_A) alt uzay topolojisi T_2 uzayı mıdır?

$x,y\in A$, $x\neq y$ olsun.

$x,y\in A\subseteq X \Rightarrow (x,y\in X\ (x\neq y))\wedge((X,\tau),\ T_2$ uzayıdır$)$

$\Rightarrow \exists U,V\in\tau : (x\in U\wedge y\in V\wedge U\cap V=\emptyset)$

$\Rightarrow (x\in A\cap U\in\tau_A)\wedge(y\in A\cap V\in\tau_A)\wedge((A\cap U)\cap(A\cap V)=A\cap\underbrace{(U\cap V)}_{\emptyset}=\emptyset)$

$\Rightarrow (A,\tau_A)$ T_2'dir. Ve Hausdorff uzayı olmak kalıtsal özelliktir.

Teorem: T_2 uzayı olmak topolojik özelliktir.

İspat: (X,τ) ve (X',τ') iki topolojik uzay, $h:(X,\tau)\to(X',\tau')$ bir homeomorfi olsun. (X',τ') T_2 uzayı mıdır?

$x',y'\in X'$, $x'\neq y'$ göz önüne alınsın.

h'nin üzerineliğinden: $(\exists x\in X : h(x)=x')\wedge(\exists y\in X : h(y)=y')$ geçerlidir. x ve y tek türlü belirlidir.

$(h(x)=x'\neq y'=h(y))\overset{h,\ 1-1}{\Longrightarrow} x\neq y \Rightarrow (x,y\in X,\ x\neq y)\wedge(X,\tau)$ T_2 uzayı olduğundan $\exists U_x,U_y\in\tau : (x\in U_x)\wedge(y\in U_y)\wedge(U_x\cap U_y=\emptyset)$ gerçeklenir.

$x' = h(x) \in h(U_x) = U'_x \overset{h \text{ açık}}{\in} \tau'$

$y' = h(y) \in h(U_y) = U'_y \overset{h \text{ açık}}{\in} \tau'$

ve h bijektif olduğundan $U'_x \cap U'_y = h(U_x) \cap h(U_y) = h(U_x \cap U_y)$
$= h(\emptyset) = \emptyset$

$\Rightarrow (X', \tau')$, T_2 uzayıdır.

$\Rightarrow \exists U'_x, U'_y \in \tau' : (x' \in U'_x \wedge y' \in U'_y) \wedge (U'_x \cap U'_y = \emptyset)$

Teorem: T_3 uzayı olmak kalıtsal özelliktir.

İspat: T_1 uzayı olmak kalıtsal özellik old. gösterdik. Regülerlik kalıtsal mıdır?

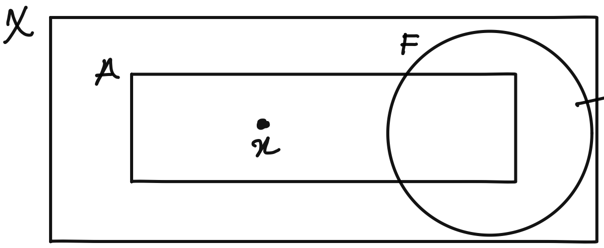
(X,τ) regüler uzay, $A \subseteq X$ olsun. (A, τ_A) alt uzayı regüler midir?

A da x, F nokta kapalı küme çiftini

$x \in A$, F τ_A-kapalı, $x \notin F$ olsun.

$x \notin F$ olmak üzere seçtik. ($F \subseteq A$ ve F τ_A-kapalı)

F, τ_A-kapalı ise τ-kapalı M kümesi $F = A \cap M$ o.ş. vardır.



M τ-kapalı ve $F = A \cap M$.

Bu durumda $x \notin M$ geçerlidir çünkü $x \in M$ ise $\Rightarrow x \in M \cap A = F$ çelişkisi elde edilir.

Elimde X de x, M nokta kapalı çifti $x \notin M$ o.ü. var. (X,τ) regüler olduğundan

$\exists U, V \in \tau : (x \in U \in \tau) \wedge (M \subseteq V \in \tau) \wedge (U \cap V = \emptyset)$ gerçeklenir.

Buradan

$(x \in U \cap A = U_1 \in \tau_A) \wedge (M \subseteq V \in \tau \Rightarrow F = A \cap M \subseteq V \cap A = V_1 \in \tau_A)$

$\wedge (U_1 \cap V_1 = (U \cap A) \cap (A \cap V) = A \cap \underbrace{(U \cap V)}_{\emptyset} = A \cap \emptyset = \emptyset)$

Regüler uzay olmak kalıtsal özelliktir.

Alıştırma: Regüler uzay olmak topolojik özelliktir?

Çözüm: (X,τ), (Y,σ) birer topolojik uzay, (X,τ) regüler uzay ve $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ bir homeomorfi olsun.

$y \in Y$, $F (\subseteq Y)$ ve F σ-kapalı ve $y \notin F$ olsun.

f üzerine old.dan $\exists x \in X : f(x) = y$ ve $f^{-1}(y)$ tek elemanlıdır.

$f^{-1}(F)$ τ-kapalıdır $y \notin F$ old. dan $x = f^{-1}(y) \notin f^{-1}(F) \Rightarrow x \notin f^{-1}(F)$

x, $f^{-1}(F)$ X'de $x \notin f^{-1}(F)$ nokta kapalı çifti ve (X, τ) regüler uzay olduğundan

$\exists U, V \in \tau : (x \in U \in \tau) \wedge (f^{-1}(F) \subseteq V \in \tau) \wedge (U \cap V = \emptyset)$

gerçeklenir.

Bu durumda f bijektif ve açık fonk old. dan

$(y = f(x) \in f(U) \in \sigma) \wedge (F = f(f^{-1}(F)) \subseteq f(V) \in \sigma) \wedge (f(U) \cap f(V) = f(U \cap V) = f(\emptyset) = \emptyset)$

$\Rightarrow (Y, \sigma)$ regülerdir.

T_3 uzayı topolojik özelliktir $\Rightarrow$ T_1 topolojik öz, regüler öz old.

4 Mart 2025

Alıştırma: (X, τ) sonlu bir T_1 uzayı ise $\tau = \mathcal{P}(X)$ olur, gösterin.

=Çözüm=

(X, τ) T_1 uzayı old. dan $\forall x \in X$ için $\overline{\{x\}} = \{x\}$ ve $\forall F \subseteq X$ için sonlu bir kümenin her alt kümesi sonlu old. dan $F = \{a_1, \dots, a_n\}$, $\boxed{a_1, \dots, a_n \in X}$ formundadır ve $\overline{F} = \overline{\{a_1, \dots, a_n\}} = \overline{\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}} = \overline{\{a_1\}} \cup \dots \cup \overline{\{a_n\}}$
$= \{a_1\} \cup \dots \cup \{a_n\}$

$X \setminus F$ açık ve benzer şekilde $X \setminus F$ yine sonlu olacağından $\overline{X \setminus F} = X \setminus F$

$\Rightarrow X \setminus (X \setminus F) = F \in \tau$

O halde X in her alt kümesi hem açık hem kapalı $\forall x \in X$ için

$\{x\} \subseteq X \Rightarrow \{x\} \in \tau \Rightarrow \tau = \mathcal{P}(X)$.

Örnek: (X, τ) bir T_1 uzayı ise sonlu alt kümelerinin yığılma noktası yoktur, gösteriniz.

=Çözüm= $A \subseteq X$ için ya $A = \emptyset$ ya da $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $(a_1, \dots, a_n \in X)$

$A = \emptyset$ ise $A' = \emptyset' = \emptyset$ iddia doğru.

$p \in \emptyset'$ olsaydı $\exists G \in \tau \cap \mathcal{N}_p$ için $(G \setminus \{p\}) \cap \emptyset = \emptyset$ olmalıydı ama bu mümkün değil.

$A=\{a_1,\dots,a_n\} \subseteq X$ olsun. Uzay T_1 uzayı old.dan $\overline{A}=A$ olur.
O halde A, eğer varsa yığılma noktalarını içerir.

$a_1 \in C_X\{a_2,\dots,a_n\} \in \tau$

$\Rightarrow \left(C_X\{a_2,\dots,a_n\} \setminus \{a_1\}\right) \cap A = \emptyset$ O halde $a_1 \notin A'$.

Benzer şekilde $a_2,\dots,a_n \notin A'$. $\Rightarrow A'=\emptyset$.

Teorem: (X,τ) bir T_1 uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

ⓐ $a\in X$, A kümesinin yığılma noktasıdır. $a\in A'$

ⓑ a noktasını içeren her açık küme A nın sonsuz sayıda noktasını içerir.

=İspat=

- ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ

$a\in A'$, G ise A nın A dan farklı sonlu sayıda noktasını içeren bir açık küme olsun. Bu ise,

$A\cap(G\setminus\{a\})=\{a_1,\dots,a_n\}=B$ ve uzay T_1 old.dan $\overline{B}=B$ 'dir.

O halde $X\setminus B \in \tau$ ve $a\in X\setminus B$ 'dir.

$a\in H= G\cap(X\setminus B)\in\tau$ $\Rightarrow a\in H\in\tau$

$\Rightarrow (H\setminus\{a\})\cap A$ kümesi a noktasını içermez $\Rightarrow a\notin A'$ çelişkisini verir.

$(H\setminus\{a\})\cap A = \left((G\cap(X\setminus B))\setminus\{a\}\right)\cap A = [(G\setminus\{a\})\cap A]\cap(X\setminus B)=\emptyset$

- ⓑ $\Rightarrow$ ⓐ

$\forall G\in\tau\cap\mathcal{N}_a$ için $A\cap G$ sonsuz elemanlı ise $A\cap(G\setminus\{a\})\neq\emptyset$

$\Rightarrow a\in A'$.

Teorem: Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

ⓐ (X,τ) bir Haussdorff uzayıdır.

ⓑ $a\in X$ olsun. $x\neq a$ gerçekleyen $\forall x\in X$ için $\exists U\in\tau\cap\mathcal{N}_a : x\notin\overline{U}$ gerçeklensin. $\Rightarrow (x\in C_X\overline{U})$

ⓒ $\Delta=\{(x,x) : x\in X\}$, $X\times X$ in kapalı bir alt kümesidir. $(X\times X\setminus\Delta$ açıktır.$)$

=İspat=

• ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ $\quad a \in X$, $x \in X \setminus A$ $\quad (x \neq a)$ olsun.

(X, τ) T_2 uzayı old.dan

$\exists\, U, V \in \tau : (x \in U) \wedge (x \in V) \wedge (U \cap V = \emptyset)$ gerçeklenir.

$(x \in V) \wedge (U \cap V = \emptyset) \Rightarrow x \notin \overline{U} \Rightarrow x \in C_X \overline{U}$

• ⓑ $\Rightarrow$ ⓐ $\quad a \neq y$, $a, y \in X$ olsun.

ⓑ $\Rightarrow \exists\, U \in \tau : a \in U$ ve $y \notin \overline{U} \Rightarrow \exists\, G_y \in \tau \cap \mathcal{N}_y : U \cap G_y = \emptyset$.

ise (X, τ) bir T_2 (Haussdorff) uzayıdır.

• ⓑ $\Rightarrow$ ⓒ $\quad (X \times X) \setminus \Delta$ açık.

$(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta \Rightarrow x \neq y$

ⓑ den $\exists\, U \in \tau \cap \mathcal{N}_x : y \in C_X \overline{U}$ gerçeklenir.

$(x, y) \in U \times C_X \overline{U} \subseteq X \times X$

$U \cap C_X \overline{U} = \emptyset \Rightarrow U \times C_X \overline{U}$ kümesi hiçbir $(z, z) \in \Delta$ noktası içeremez.

$(x, y) \in U \times C_X \overline{U} \subseteq X \times X \setminus \Delta$.

$\Rightarrow (X \times X) \setminus \Delta$ her noktası iç nokta dolayısıyla $X \times X \setminus \Delta$ açık ve Δ kapalıdır.

• ⓒ $\Rightarrow$ ⓐ

$x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. Bu durumda $(x, y) \notin \Delta$ $(\Rightarrow (x, y) \in X \times X \setminus \Delta)$

O halde ⓒ den $X \times X$ (x, y) noktasını içeren W açık kümesi $W \cap \Delta = \emptyset$ $(\equiv W \subseteq X \times X \setminus \Delta)$ gerçeklenmek üzere vardır.

(x, y) noktasını içeren bir $U \times V$ taban elemanı $(x, y) \in U \times V \subseteq W$ o.ş. vardır.

O halde $(x \in U \in \tau) \wedge (y \in V \in \tau) \wedge (U \cap V = \emptyset)$ geçerlidir.

Çünkü $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$

$\Rightarrow (X, \tau)$ T_2 uzayıdır.

Teorem: (X, τ) Haussdorf uzayı ise $\forall x \in X$ için $\{x\}$ kapalıdır.
($\forall$ T_2 uzayı bir T_1 uzayıdır.)

=İspat= $x \in X$ için $X \setminus \{x\}$ açık mıdır?

$y \in X \setminus \{x\} \Rightarrow x \neq y$ ve uzay T_2 old.dan

$\exists U, V \in \tau : (x \in U) \wedge (y \in V) \wedge (U \cap V = \emptyset)$ geçerlidir.

Bu $y \in V \subseteq X \setminus \{x\}$ verir.

$X \setminus \{x\}$ in her noktası iç nokta, $X \setminus \{x\}$ açık, $\{x\}$ τ-kapalıdır.

Alıştırma: (X, τ) bir topolojik uzay, (Y, σ) bir Haussdorff uzayı
$f, g : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ sürekli fonksiyonlar olsunlar.
$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ kümesi (X, τ) uzayında da kapalıdır, gösterin.

=Çözüm=

$x \notin A \Rightarrow f(x) \neq g(x)$ ve (Y, σ) Haussdorff uzayı old.dan

$\exists U, V \in \sigma : (f(x) \in U \in \sigma) \wedge (g(x) \in V \in \tau) \wedge (U \cap V = \emptyset) \Rightarrow$

$(x \in f^{-1}(U) \in \tau) \wedge (x \in f^{-1}(V) \in \tau) \wedge (f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \in \tau \cap \mathcal{N}_x)$

olur.

$f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq X \setminus A \Rightarrow f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \cap A = \emptyset$

Aksi mümkün değildir. Çünkü $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$ ise

$\exists z \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \cap A \quad (z \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)) \wedge (z \in A)$

$\Rightarrow (f(z) \in f(f^{-1}(U)) \subseteq U) \wedge (g(z) \in g(g^{-1}(V)) \subseteq V) \wedge (z \in A) \Rightarrow f(z) = g(z)$

$\Rightarrow f(z) = g(z) \in U \cap V = \emptyset$

O halde $X \setminus A$ açık, A kapalıdır.

Ödev: Bu soruda $\bar{A} = X$ ise $\forall x \in X$ için $f(x) = g(x)$ 'dir göster.

Tanım: (X, τ) ve (Y, σ) birer topolojik uzay, $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun.
$G_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ kümesine f fonk.nunun grafiği ya da grafı denir.

$y = X$ olması durumunda $i: X \to X$ idantik fonknunun grafiği

$G_i = \{(x,x) \in X \times X : x = x\}$ $(= \Delta)$

Yani idantik fonksiyonunun grafiği diagonal ile çakışır.

Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay, (Y, σ) bir Haussdorff uzayı ve $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ sürekli olsun.
$G_f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ kümesi $X \times Y$ de kapalıdır.

=ispat=

$(x,y) \notin G_f \Rightarrow (y \neq f(x)) \wedge ((Y,\sigma)$ Haussdorff uzayı$)$

$\Rightarrow \exists U, V \in \sigma : (y \in U) \wedge (f(x) \in V) \wedge (U \cap V = \emptyset)$ ve f sürekli old.dan.

$\exists W \in \tau \cap \mathcal{N}_x : f(W) \subseteq V$ gerçeklenir.

Bu durumda $(x,y) \in W \times U \subseteq X \times Y \setminus G_f$ gerçeklenir.

Tersi mümkün mü?

$(x', y') \in G_f \cap (W \times U)$ farzedelim. Bu durumda $(x' \in W) \wedge (y' \in U)$ ve

$f(x') = y' \in V \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$ çelişkisi elde edilir.

O halde $(x,y) \in W \times U \subseteq X \times Y \setminus G_f$

$X \times Y \setminus G_f$'in her noktası iç nokta $X \times X \setminus G_f$ açık, G_f kapalıdır.

Teorem: Bir (X, τ) topolojik uzayının regüler uzay olması için g.y.k. $x \in X$ ve $U \in \tau \cap \mathcal{N}_x$ gerçekleyen $\forall U \in \tau$ için bir $V \in \tau \cap \mathcal{N}_x$'in $\overline{V} \subseteq U$ gerçeklenecek şekilde var olmasıdır.

=ispat=

(X, τ) regülerdir $\Leftrightarrow (x \in X) \wedge (U \in \tau \cap \mathcal{N}_x) \Rightarrow \exists V \in \tau \cap \mathcal{N}_x : \overline{V} \subseteq U)$

$(\Rightarrow)$ (X, τ) regüler olsun. $x \in U \in \tau \Rightarrow (X \setminus U$ τ-kapalı$) \wedge (x \notin X \setminus U)$

(X, τ) regüler old.dan $\exists V, Z \in \tau : (x \in V) \wedge (X \setminus U \subseteq Z) \wedge (V \cap Z = \emptyset)$

$(X \setminus U) \subseteq Z \Rightarrow X \setminus Z \subseteq U$ ve $V \cap Z = \emptyset$ old.dan

$V \subseteq X \setminus Z \subseteq U$

$\Rightarrow \overline{V} \subseteq \overline{X \setminus Z} = X \setminus Z \subseteq U$

$\Rightarrow \overline{V} \subseteq U$, koşul gerçeklendi.

$(\Leftarrow)$ $x \in X$, F de X in $x \notin F$ gerçekleyen kapalı alt kümesi olsun.
$x \in X \setminus F \in \tau$ verir.

Hipotezden

$\exists V \in \tau \cap \mathcal{N}_x : \overline{V} \subseteq X \setminus F$ o.ş. vardır.

Burada $F \subseteq X \setminus \overline{V} \in \tau$ ve $V \subseteq \overline{V}$ $\Rightarrow V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$

$(V \subseteq \overline{V}) \Rightarrow X \setminus \overline{V} \subseteq X \setminus V \Rightarrow V \cap (X \setminus \overline{V}) \subseteq V \cap (X \setminus V) = \emptyset$

O halde $x \in V \in \tau$, $F \subseteq X \setminus \overline{V} \in \tau \Rightarrow V \cap (X \setminus \overline{V}) \neq \emptyset$

(X, τ) regülerdir.

$\boxed{\text{7 Mart 2025}}$

Örnek: Her T_4 uzayı T_2 uzayıdır, gösteriniz.

=Çözüm=

T_4 uzayı = Normal + T_1 uzayı

$x, y \in X$, $x \neq y$ olsun.

T_4 uzayı T_1 uzayı şartlarını sağladığından $\{x\}, \{y\} \in \tau$-kapalı

Normal uzay, $\begin{matrix} \{x\} \subseteq U \\ \{y\} \subseteq V \end{matrix}$ ve $U \cap V = \emptyset$ o.ş. $U, V \in \tau$ vardır.

O halde uzay T_2 uzayıdır.

Örnek: Regüler uzay olmak topolojik özelliktir, gösteriniz.

=Çözüm= (X, τ) regüler uzay olsun.

$f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ bir homeomorfi olsun. $F \in \sigma$-kapalı ve $y \notin F$ gerçekleyen $y \in Y$ alalım.

f örten olduğundan $\exists x \in X : f(x) = y$ ve f 1-1 old.dan $x \in X$ tek türlüdür.

f sürekli old.dan $f^{-1}(F) \in \tau$-kapalı.

$x = \underbrace{f^{-1}(y)}_{f \text{ fonksiyon}} \notin f^{-1}(F)$

$(x, f^{-1}(F))$, (X,τ) uzayında nokta, kapalı küme çifti oldu.

(X,τ) regüler old.dan $(x \in U) \wedge (f^{-1}(F) \subseteq V) \wedge (U \cap V = \emptyset)$ olmak üzere $U, V \in \tau$ vardır.

$x \in U$ old.dan $\underbrace{f(x)}_{y} \in \underbrace{f(U)}_{f \text{ açık olduğundan}}$
$f(U) \in \sigma$

$f(f^{-1}(F)) \underset{f \text{ örten old.}}{=} F \subseteq \underbrace{f(V)}_{f \text{ açık old.dan}}$
$f(V) \in \sigma$

(Y, F)'e karşılık $y = f(U) \in \sigma$ ve $F \subseteq f(V) \in \sigma$ vardır.

$f(U) \cap f(V) \underset{f\ 1\text{-}1}{=} f(U \cap V) = \emptyset$

O halde (Y, σ) regüler uzaydır.

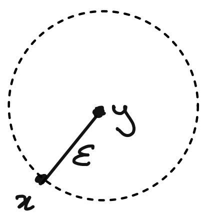
Örnek: Her metrik uzay T_1'dir, gösteriniz.

=Çözüm=

(X, d) metrik uzay olsun. τ_d bu uzayın belirlediği topoloji olsun. Yani d metriğinin belirlediği tabanı kabul eden topoloji olsun.

$x \in X$ alalım. $\{x\} \in \tau$-kapalı mı?

$y \in X \setminus \{x\}$ alalım. Böyle bir y yoksa $X = \{x\}$ old. $\{x\}$ hem açık hem kapalıdır.



Aksi durumda $x \neq y$ olsun. $d(x,y) = \varepsilon > 0$ olsun.

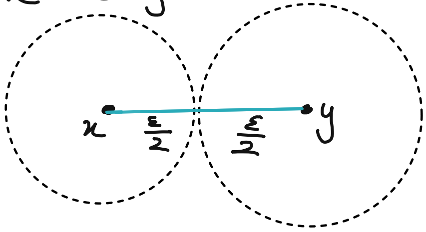
$y \in \underbrace{S_d(y, \varepsilon)}_{x \notin S_d(y,\varepsilon)} \subseteq (X \setminus \{x\})$

O halde y, $X \setminus \{x\}$'in iç noktasıdır. $X \setminus \{x\}$ açık kümedir. $\{x\}$ kapalı kümedir. (X, τ_d) topolojik uzayı T_1 uzaydır.

Örnek: Her metrik uzay T_2 uzayıdır.

=Çözüm= (X,d) metrik uzay, τ_d bu metrik uzayın ürettiği topoloji olsun.

$x,y\in X$ ve $x\neq y$ olsun. $d(x,y)=\varepsilon>0$ olsun.



$x\in B_d(x,\frac{\varepsilon}{2})$

$y\in B_d(y,\frac{\varepsilon}{2})$

ve $B_d(x,\frac{\varepsilon}{2})\cap B_d(y,\frac{\varepsilon}{2})=\emptyset$

$\neq\emptyset$ ise $z\in B_d(x,\frac{\varepsilon}{2})\cap B_d(y,\frac{\varepsilon}{2})$ vardır.

$$\left.\begin{array}{l}|x-z|<\frac{\varepsilon}{2}\\ |y-z|<\frac{\varepsilon}{2}\end{array}\right\}\quad \varepsilon>|x-z|+|y-z|\geq|x-y|=\varepsilon\,,\quad \varepsilon<\varepsilon \text{ çelişki var.}$$

O halde metrik uzay T_2 uzayıdır.

Sonuç: Bir topolojik uzayın metriklenemez old. göstermek için T_1 veya T_2 uzayı olmadığını göstermek yeterlidir.

Regüler olup olmadığına bakmak için nokta ve kapalı küme nokta çiftine bakmam lazım.

Örnek: $(\mathbb{R},\tau_{st})$ regüler uzaydır, gösteriniz.

=Çözüm=

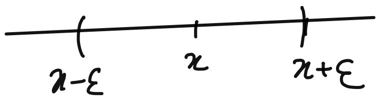
$F\subseteq\mathbb{R}$ ve τ_{st}-kapalı olsun.

$x\notin F$ yani $x\in(\mathbb{R}\setminus F)$

$F=\overline{F}$, $x\notin\overline{F}$ old.dan $\exists\, x\in W\in\tau_{st} : W\cap F=\emptyset$.

$W\in\tau_{st}$ old.dan. $x\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq W$ o.ş. $\varepsilon>0$ vardır.

$W\cap F=\emptyset$ old.dan $F\subseteq(\mathbb{R}\setminus W)$



$$(\mathbb{R}\setminus W)\subseteq(-\infty,x-\varepsilon]\cup[x+\varepsilon,\infty)\subseteq\underbrace{(-\infty,x-\tfrac{\varepsilon}{2})\cup(x+\tfrac{\varepsilon}{2},\infty)}_{V\in\tau_{st}}$$

$$\left.\begin{array}{l}F\subseteq(\mathbb{R}\setminus W)\subseteq V\in\tau_{st}\\ U=(x-\frac{\varepsilon}{2},x+\frac{\varepsilon}{2})\in\tau_{st}\end{array}\right\}\quad U\cap V=\emptyset$$

O halde $(\mathbb{R},\tau_{st})$ regüler uzaydır.

örnek: X sonsuz bir küme ve $a \in X$ olsun.
$\tau = \{U \subseteq X : X \setminus U$ sonlu veya $a \in (X \setminus U)\}$ topolojik uzayı verilsin.

(i) (X, τ) regüler uzay mıdır?

$F \in \tau_{kapalı}$ ve $x \notin F$ olsun.

• $x = a$ olsun. $a \in (X \setminus F)$ olur. O halde $F \in \tau$.

$F \subseteq F = V \in \tau_{st}$ seçilsin.

$a \notin F$ old. dan $a \in (X \setminus \underbrace{F}_{\tau_{kapalı}}) \in \tau$

$a \in (X \setminus F) = U \in \tau_{st}$

$U \cap V = (X \setminus F) \cap F = \emptyset$

• $x \neq a$ olsun. $x \notin F$ olsun.

$a \notin \{x\}$ old. dan $a \in (X \setminus \{x\})$

$\{x\} \in \tau$. $x \in \{x\} = U \in \tau$.

$x \notin F$ old. dan $F \subseteq \underbrace{X \setminus \{x\}}_{V}$

$X \setminus V = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\}$ sonlu. $V \in \tau$.

$\left.\begin{array}{l} x \in U \in \tau \\ F \subseteq V \in \tau \end{array}\right\} V \cap U = (X \setminus \{x\}) \cap \{x\} = \emptyset$

(ii) (X, τ) normal uzay mıdır?

$F \in \tau_{kapalı} \Leftrightarrow X \setminus F \in \tau \Leftrightarrow (X \setminus (X \setminus F)) = F$ sonlu veya
$a \in (X \setminus (X \setminus F)) = F \quad (a \in F)$

$F_1, F_2 \in \tau_{kapalı}$ ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ise,

$\exists\, U, V \in \tau : (F_1 \subseteq U) \wedge (F_2 \subseteq V) \wedge (F_1 \cap F_2 = \emptyset)$

(1) $a \notin F_1$, $a \notin F_2$ olsun.

O halde F_1 ve F_2 sonlu.

$a \notin F_1$ old. dan $a \in X \setminus F_1$ o halde $F_1 \in \tau$

$a \notin F_2$ old. dan $a \in X \setminus F_2$ o halde $F_2 \in \tau$.

$\left.\begin{array}{l} F_1 \subseteq F_1 \in \tau \\ F_2 \subseteq F_2 \in \tau \end{array}\right\} F_1 \cap F_2 = \emptyset$

② $a \in F_1$ ve $a \notin F_2$ olsun. Tersi de olabilir genelliği bozmaz. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$

$a \notin F_2$ old.dan $a \in X \setminus F_2$ o halde $F_2 \in \tau$. $F_2 \subseteq F_2 = U \in \tau$

$F_1 \subseteq (X \setminus F_2) = V \in \tau$

$X \setminus V = (X \setminus (X \setminus F_2)) = F_2$ sonlu.

$$\left.\begin{array}{l} F_1 \subseteq V \in \tau \\ F_2 \subseteq F_2 \in \tau \end{array}\right\} \quad V \cap F_2 = (X \setminus F_2) \cap F_2 = \emptyset$$

O halde (X, τ) topolojik uzayı normal uzaydır.

iii (X, τ) topolojik uzayı T_1 uzayı mıdır?

$\forall x \in X$ için $\{x\}$ sonlu old.dan $\{x\} \in \tau_{kapalı}$ olur.

O halde (X, τ) topolojik uzayı T_1 uzayıdır.

iv (X, τ) topolojik uzayı T_2 uzayı mıdır?

i) $x, y \in X$, $x \neq y$ ve $x \neq a$, $y \neq a$ olsun.

$$\left.\begin{array}{lll} a \notin \{x\} & \text{old.dan} & a \in X \setminus \{x\} \\ a \notin \{y\} & \text{old.dan} & a \in X \setminus \{y\} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x \in \{x\} = U \in \tau \\ y \in \{y\} = V \in \tau \end{array}$$

ii) $x = a$, $y \neq a$ olsun.

$a \notin \{y\}$ ve $a \in X \setminus \{y\}$ old.dan $\{y\} = U \in \tau$.

$x \in X \setminus \{y\} = V \Rightarrow X \setminus V = \{y\}$ sonlu o halde $V \in \tau$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in V \in \tau \\ y \in U \in \tau \end{array}\right\} \quad \underbrace{\{y\}}_{U} \cap \underbrace{(X \setminus \{y\})}_{V} = \emptyset$$

$\Rightarrow (X, \tau)$ topolojik uzayı T_3 uzayıdır $= T_1 +$ regüler

(X, τ) topolojik uzayı T_4 uzayıdır $= T_1 +$ normal

Örnek: $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathcal{B}=\{[a,b) : a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$ 11 Mart 2025

tabanı tarafından belirlenen $\mathbb{R}_{\ell}$- alt limit topolojisi normal uzay mıdır?

Çözüm:

$A,B\subseteq\mathbb{R}$ $\mathbb{R}_{\ell}$-kapalı ve $A\cap B=\emptyset$ gerçekleyen iki küme olsun.

$\forall a\in A,\ \exists \varepsilon_a>0 : [a,a+\varepsilon_a)\cap B=\emptyset$ gerçeklenir. Benzer şekilde

$\forall b\in B,\ \exists \varepsilon_b>0 : [b,b+\varepsilon_b)\cap A=\emptyset$ gerçeklenir.

$U=\bigcup_{a\in A}[a,a+\varepsilon_a)\ \wedge\ V=\bigcup_{b\in B}[b,b+\varepsilon_b)$ için $A\subseteq U$ ve $B\subseteq V$ gerçeklenir.

İddia: $U\cap V=\emptyset$

İspat: $x\in U\cap V$ farz edelim. Bu durumda bir $a\in A$ ve bir $b\in B$ için

$x\in[a,a+\varepsilon_a)\cap[b,b+\varepsilon_b)$ olur.

$a<b$ olmak genelliği bozmaz. Bu durumda $b<a+\varepsilon_a$ olur ki bu da

$b\in[a,a+\varepsilon_a)$ çelişkisini verir.

O halde $U\cap V=\emptyset$.

Teorem: Her metrik uzay normal uzaydır.

İspat: (X,d) bir metrik uzay, τ_d bu metriğin belirlediği topoloji olsun.

$A,B\subset X$, τ_d-kapalı ve $A\cap B=\emptyset$ gerçekleyen iki küme olsun.

Bu durumda

$\forall x\in A : \exists \varepsilon_x>0 : B_d(x,\varepsilon_x)\cap B=\emptyset$ ve benzer şekilde

$\forall y\in B : \exists \varepsilon_y>0 : B_d(y,\varepsilon_y)\cap A=\emptyset$

O halde

$U=\bigcup_{x\in A}B_d(x,\frac{\varepsilon_x}{2})$ ve $V=\bigcup_{y\in B}B_d(y,\frac{\varepsilon_y}{2})$ için $U,V\in\tau_d$ ve $A\subseteq U$ ve

$B\subseteq V$ geçerlidir. $U\cap V=\emptyset$ gerçeklenir, aksi takdirde bir $x\in A$ ve $y\in B$

için $B_d(x,\frac{\varepsilon_x}{2})\cap B_d(y,\frac{\varepsilon_y}{2})\neq\emptyset \Rightarrow \exists z\in B_d(x,\frac{\varepsilon_x}{2})\cap B_d(y,\frac{\varepsilon_y}{2})$ gerçeklenir.

Genelliği bozmadan $\varepsilon_y\le\varepsilon_x$ alınırsa üçgen eşitsizliğinden

$$\left.\begin{aligned} d(x,y)&\le d(x,z)+d(z,y)\\ &<\frac{\varepsilon_x}{2}+\frac{\varepsilon_y}{2}\le\varepsilon_x\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} d(x,y)<\varepsilon_x \Rightarrow y\in B_d(x,\varepsilon_x) \text{ çelişkisi}\\ \text{elde edilir.}\end{array}$$

Örnek: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ normal uzay mıdır?

Çözüm:

$F_1, F_2 \in \tau_{st}$ - kapalı ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olsun.

Her bir $x \in F_1$ için $x \notin F_2$ old. dan $\exists \varepsilon_x > 0 : (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \cap F_2 = \emptyset$.

Benzer şekilde her bir $y \in F_2$ için $y \notin F_1$ old. dan: $\exists \varepsilon_y > 0 : (y-\varepsilon_y, y+\varepsilon_y) \cap F_1 = \emptyset$.

$U = \bigcup_{x \in F_1} \left(x - \frac{\varepsilon_x}{2}, x + \frac{\varepsilon_x}{2}\right)$ ve $V = \bigcup_{y \in F_2} \left(y - \frac{\varepsilon_y}{2}, y + \frac{\varepsilon_y}{2}\right)$ ise $U, V \in \tau_{st}$,

$F_1 \subseteq U$ ve $F_2 \subseteq V$ gerçeklenir. $U \cap V = \emptyset$?

$z \in U \cap V$ farz edelim.

$z \in U \Rightarrow \exists x \in F_1 : z \in \left(x - \frac{\varepsilon_x}{2}, x + \frac{\varepsilon_x}{2}\right)$ ve buradan $|x-z| < \frac{\varepsilon_x}{2}$.

Benzer şekilde $z \in V \Rightarrow \exists y \in F_2 : z \in \left(y - \frac{\varepsilon_y}{2}, y + \frac{\varepsilon_y}{2}\right)$ buradan $|y-z| < \frac{\varepsilon_y}{2}$.

Üçgen eşitsizliğinden,

$$|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y| < \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2}$$

Ya $\varepsilon_x \leq \varepsilon_y$ ya da $\varepsilon_y \leq \varepsilon_x$ gerçeklenir.

$\varepsilon_x \leq \varepsilon_y$ farz edelim.

$|x-y| < \varepsilon_y$ olur $\Rightarrow x \in (y-\varepsilon_y, y+\varepsilon_y)$ çelişki elde edilir.

$(y-\varepsilon_y, y+\varepsilon_y) \cap F_1 = \emptyset$ ve $x \in F_1$ idi.

Benzer şekilde $\varepsilon_y \leq \varepsilon_x$ olsaydı $|x-y| < \varepsilon_x \Rightarrow y \in (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x)$ çelişki olur.

$(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \cap F_2 = \emptyset$ ve $y \in F_2$ idi.

Sonuçta $U \cap V = \emptyset$

Soru: Normal uzay olmak kalıtsal özellik değildir.

=Çözüm=

$X=\{a,b,c,d\}$ üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ topolojisi normal uzaydır.

Her ayrık kapalı küme çiftine ayrık açık küme çifti karşılık gelecek.

$\tau_{kapalı}$ kümeler $=\{\emptyset, X, \{b,c,d\},\{c,d\},\{b,d\},\{d\}\}$

ayrık kapalı küme çiftleri:

$(\emptyset, X)$, $(\emptyset,\{b,c,d\})$, $(\emptyset,\{c,d\})$, $(\emptyset,\{b,d\})$, $(\emptyset,\{d\})$

ve her bir durumda bu ayrık kapalı küme çiftlerine karşı gelen ayrık açık küme çifti $(\emptyset, X)$. Yani uzay normaldir.

$A=\{a,b,c\}$ üzerindeki alt uzay topolojisi $\tau_A=\{A,\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$ dır.

τ_A-kapalı kümeler $=\{A,\emptyset,\{b,c\},\{c\},\{b\}\}$

$\{b\}\cap\{c\}=\emptyset$, $\{b\},\{c\}$ τ_A-kapalı ayrık küme çifti ama

$(\{c\}\subseteq U\in\tau_A)\wedge(\{b\}\subseteq V\in\tau_A)\wedge(U\cap V=\emptyset)$ gerçekleyen U,V ayrık açık küme çifti olmadığından (A,τ_A) normal uzay değildir.

Teorem: Normal bir uzayın kapalı alt uzayı normaldir.

=İspat=

(X,τ) normal bir topolojik uzay, A ise τ-kapalı alt küme, τ_A ise A üzerindeki alt uzay topolojisi olsun.

$K_1,K_2\in\tau_A$-kapalı ve $K_1\cap K_2=\emptyset$ olsun.

Bu durumda alt uzayda kapalı küme olma tanımından τ-kapalı F_1 ve F_2 kümeleri $K_1=A\cap F_1$ ve $K_2=A\cap F_2$ o.s. vardır.

A ve F_1 τ-kapalı old.dan $K_1=A\cap F_1$ kümesi de τ-kapalıdır.

Benzer şekilde A ve F_2 τ-kapalı old.dan $K_2=A\cap F_2$ kümesi de τ-kapalıdır.

$K_1,K_2\in\tau$-kapalı, $K_1\cap K_2=\emptyset$ ve (X,τ) normal uzay old.dan

$\exists U,V\in\tau: (K_1\subseteq U)\wedge(K_2\subseteq V)\wedge(U\cap V=\emptyset)$ gerçeklenir.

$K_1\subseteq U \Rightarrow K_1 \Rightarrow K_1\cap A=(A\cap F_1)\cap A=(F_1\cap A)=K_1\subseteq U\cap A\in\tau_A$

$K_2\subseteq V \Rightarrow K_2 \Rightarrow K_2\cap A=(A\cap F_2)\cap A=(F_2\cap A)=K_2\subseteq V\cap A\in\tau_A$

$(U \cap A) \cap (V \cap A) = A \cap \underbrace{(U \cap V)}_{\emptyset} = A \cap \emptyset = \emptyset$

Teorem: Normal bir topolojik uzayın üzerine, sürekli ve kapalı bir fonksiyon altındaki görüntüsü normaldir.

=İspat=

(X, τ) normal uzay, $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ üzerine sürekli ve kapalı bir fonksiyon olsun.

(Y, σ) normal uzay mıdır?

$K_1, K_2 \in \sigma$-kapalı, ayrık küme çifti olsun. $(K_1 \cap K_2 = \emptyset)$

f sürekli old. dan $f^{-1}(K_1)$ ve $f^{-1}(K_2)$ τ-kapalı kümelerdir.

$K_1 \cap K_2 = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(K_1) \cap f^{-1}(K_2) = f^{-1}(K_1 \cap K_2) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

(X, τ) normal uzay old. dan $f^{-1}(K_1)$, $f^{-1}(K_2)$ τ-açık ayrık kapalı küme çifti old. dan

$\exists U_1, V_1 \in \tau : (f^{-1}(K_1) \subseteq U_1) \wedge (f^{-1}(K_2) \subseteq V_1) \wedge (U_1 \cap V_1 = \emptyset)$ gerçeklenir.

$(W_1 = Y \setminus f(X \setminus U_1))$
$(W_2 = Y \setminus f(X \setminus V_1))$
tanımlanırsa f kapalı fonk. old. dan W_1, W_2 açık kümelerdir. $W_1, W_2 \in \sigma$.

- $f^{-1}(K_1) \subseteq U_1 \Rightarrow X \setminus U_1 \subseteq X \setminus f^{-1}(K_1) = f^{-1}(Y \setminus K_1)$

  $f(X \setminus U_1) \subseteq f(f^{-1}(Y \setminus K_1)) \overset{f \text{ üzerine}}{=} Y \setminus K_1$ ise $K_1 \subseteq \underbrace{Y \setminus f(X \setminus U_1)}_{W_1}$

Benzer şekilde

- $f^{-1}(K_2) \subseteq V_1 \Rightarrow X \setminus V_1 \subseteq X \setminus f^{-1}(K_2) = f^{-1}(Y \setminus K_2)$

  $f(X \setminus V_1) \subseteq f(f^{-1}(Y \setminus K_2)) = Y \setminus K_2$ ise $K_2 \subseteq \underbrace{Y \setminus f(X \setminus V_1)}_{W_2}$

Yani K_1 kapalı kümesini içeren W_1 açık kümesi ve K_2 kapalı kümesini içeren W_2 açık kümesi $f^{-1}(W_1) \subseteq U_1$ ve $f^{-1}(W_2) \subseteq V_1$ o.ş. vardır, Çünkü,

$$f^{-1}(W_1) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U_1)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus U_1))$$
$$\subseteq X \setminus (X \setminus U_1) = U_1$$

$X \setminus U_1 \subseteq f^{-1}(f(X \setminus U_1))$
$X \setminus f^{-1}(f(X \setminus U_1)) \subseteq X \setminus (X \setminus U_1) = U_1$

Benzer şekilde $f^{-1}(W_2) \subseteq V_1$ dir.

$$f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2) \subseteq U_1 \cap V_1 = \emptyset$$

$$\Rightarrow f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2) = \emptyset.$$

$$\Rightarrow f^{-1}(W_1 \cap W_2) = \emptyset \quad \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \emptyset.$$

O halde

K_1 ve K_2 σ-kapalı ayrık küme çiftini içeren ayrık açık W_1, W_2 kümeleri bulunabilir.