3.10.23
Salı

Topolojik Uzaylar

Tanım: X verilmiş bir küme olsun eğer $P(X)$'in bir $\mathcal{I}$ alt ailesi aşağıdaki üç koşulu sağlarsa $\mathcal{I}$ ailesine X üzerinde bir topoloji (veya kısaca topoloji) denir.

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$, $X \in \mathcal{I}$
2. $\forall \{A\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \mathcal{I}$ için $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \in \mathcal{I}$ olur
3. I sonlu bir indis kümesi olmak üzere $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{I}$ ise $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{I}$

Buna denk olarak

$$\forall \{A_1, A_2\} \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{I}$$

$$A_1 \ldots\ldots A_n = (A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}) \cap A_n \in \mathcal{I}$$

$(X, \mathcal{I})$ çiftine topolojik uzay $\mathcal{I}$'nın elemanlarına $(X, \mathcal{I})$ uzayının <u>açık elemanları</u> üzerinde $\mathcal{I}$ topolojisinin tanımlı olduğu X kümesinin elemanlarına $(X, \mathcal{I})$ topolojik uzayının noktaları denir.

Örn $X = \{a, b, c\}$ üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ bir topoloji midir?

→ i) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$ olarak verilmiş zaten

ii)

$\cup$	X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
X	X	X	X	X	X
$\emptyset$	X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	X	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\{b\}$	X	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	X	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

iii)

$\cap$	X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
X	X	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$

Örn $X = \{a, b, c, d\}$ $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$ topoloji midir?

$\{a,b\} \cup \{b,c\} = \{a,b,c\} \notin \tau$
$\{a\} \cup \{b,c\} = \{a,b,c\} \notin \tau$

olduğundan τ, X üzerinde topoloji değildir bütün alt kümelerin ailesi

Ör $X \neq \emptyset$ için $\tau = P(X)$ göz önüne alınsın. τ, X üzerinde topoloji midir?

→ i) $X \in P(X) = \tau$

$\emptyset \in P(X) = \tau \Rightarrow \emptyset, X \in \tau$

ii) $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau \; (= P(X)) \Rightarrow \bigcup G_\alpha \in \tau$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $G_\alpha \in P(X) \Rightarrow G_\alpha \subseteq X \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \subseteq X$

$G_1, G_2, \ldots$

$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \in \tau$

iii) $\{G_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau \; (= P(X))$

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $G_i \subseteq X \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \subseteq X \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$

Bu topoloji X üzerinde ayrık (discrete) topoloji olarak isimlendirilir. Bir (X, τ) topolojik uzay $\forall x \in X$ için $\{x\} \in \tau$ gerçeklerse $\forall U \subseteq X$ için,

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \in \tau \Rightarrow \tau = P(X)$$

Ör $X \neq \emptyset$ için $\tau = \{X, \emptyset\}$ X üzerinde ayrık olmayan topoloji (indiscrete topoloji) olarak adlandırılır.

Ör X boştan farklı bir küme $p \in X$ olsun.

$\tau = \{\emptyset\} \cup \{G \in P(X) : p \in G\} \quad (= \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X \mid p \in G\})$

ailesi X üzerinde topoloji midir?

→ i) $\emptyset \in \tau$, $p \in X \Rightarrow X \in \tau$

ii) $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \in \tau$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $G_\alpha = \emptyset = \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha = \emptyset \in \tau$ Aksi durumda

$\exists \alpha_0 \in \Delta : p \in G_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \Rightarrow p \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \in \tau$

iii) $\{G_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$?

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $p \in G_i \Rightarrow p \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$ Aksi durum

$\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$ $G_{i_0} = \emptyset$ $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \; (\subseteq G_{i_0}) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i = \emptyset \in \tau$

Ör: X boştan farklı bir küme $p \in X$ olsun

$\tau = \{X\} \cup \{G \subseteq X \mid p \notin G\}$ ailesi X üzerinde bir topoloji midir?

→ i) $X \in \tau$, $p \notin \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \tau$

ii) $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau$ için $\bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \in \tau$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $p \notin G_\alpha \Rightarrow p \notin \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \Rightarrow \bigcup G_\alpha \in \tau$

Aksi durumda, $\exists \alpha_0 \in \Delta : G_{\alpha_0} = X$ ve $X = G_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha = X \in \tau$

iii) $\{G_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$?

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $X = G_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i = X \in \tau$

Aksi durumda $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$ $p \notin G_{i_0} \Rightarrow p \notin \bigcap_{i=1}^{n} G_i \; (\subseteq G_{i_0})$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$

Ör: X sonsuz bir küme $\tau = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X \mid X \setminus G = C_X G$ sonlu$\}$ küme ailesi topolojidir. (Bütünleyeni sonlu topoloji)

→ i) $\emptyset \in \tau$, $X \in X$ ve $X \setminus X = \emptyset$ sonlu $\Rightarrow X \in \tau$

ii) $\{G_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$?

$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ $C_X G_i$ sonlu olsun
→ Bütünleyen

$\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{C_X G_i}_{\text{sonlu}}}_{\text{sonlu}} = C_X \left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i \right)$ sonlu $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$

GIPTA

Aksi durumda, $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$

$$G_{i_0} = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i = \emptyset \in \tau$$

iii) $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \subseteq \tau$ için $\bigcup_{\alpha\in\Delta} G_\alpha \in \tau$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $G_\alpha = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Delta} G_\alpha = \emptyset \in \tau$

Aksi durumda $\exists \alpha_0 \in \Delta : C_X G_{\alpha_0}$ sonlu geçerlidir.

$$(\bigcup_{\alpha\in\Delta} G_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Delta} C_X G_\alpha \subseteq C_X G_{\alpha_0} \Rightarrow C_X(\bigcup_{\alpha\in\Delta} G_\alpha) \text{ sonlu}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Delta} G_\alpha \in \tau$$

* Sonlu X kümesi üzerinde bütünleyeni sonlu topoloji τ alınırsa $\tau = P(X)$ (Ödev göster)

Ör X sonsuz bir küme $p \in X$ olsun. $\tau = \{G \subseteq X \mid p \notin G$ ve $C_X G$ sonlu $\}$ ailesi bir topolojidir. (Fort topolojisi)

$\rightarrow$ i) $p \notin \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \tau$ $\quad C_X X = \emptyset$ sonlu $\Rightarrow X \in \tau$

ii) $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Delta} G_\alpha \in \tau$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $p \notin G_\alpha \Rightarrow p \notin \bigcup_{\alpha\in\Delta} G_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Delta} G_\alpha \in \tau$

Aksi durumda, $\exists \alpha_0 \in \Delta$ için $C_X G_{\alpha_0}$ sonlu

$$\underbrace{C_X(\bigcup_{\alpha\in\Delta} G_\alpha)}_{\text{sonlu}} = \bigcap_{\alpha\in\Delta} C_X G_\alpha \subseteq \underbrace{C_X G_{\alpha_0}}_{\text{sonlu}}$$

$C_X(\bigcup_{\alpha\in\Delta} G_\alpha)$ sonlu $\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Delta} G_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$

iii) $\{G_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$?

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $C_X G_i$ sonlu

$C_X(\bigcap_{i=1}^{n} G_i) = \bigcup_{i=1}^{n} C_X G_i \Rightarrow C_X(\bigcap_{i=1}^{n} G_i)$ sonlu $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$

Aksi durumda $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$ $\quad p \notin G_{i_0} \Rightarrow p \notin \bigcap_{i=1}^{n} G_i$

$\Rightarrow \bigcap^{n} G_i \in \tau$

Ör) $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{ G \subseteq \mathbb{R} \mid 0 \notin G$ veya $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \subseteq G \}$ ailesi topoloji midir?

$\rightarrow$ i) $0 \notin \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \tau$

$\mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in \tau$

ii) $\{G_{\alpha_0}\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \in \tau$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $0 \notin G_\alpha \Rightarrow 0 \notin \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \in \tau$

Aksi durumda $\exists \alpha_0 \in \Delta : \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \subseteq G_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha$

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \in \tau$

iii) $\{G_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$?

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \subseteq G_i \Rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in$

Aksi durumda, $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\} : 0 \notin G_{i_0} \Rightarrow 0 \notin \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$

5.10.23
Perşembe

Ör) $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{\mathbb{R}\} \cup \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid U \cap [0,1] = \emptyset \}$ ailesi topoloji midir?

$\rightarrow$ i) $\mathbb{R} \in \tau$, $\emptyset \cap [0,1] = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \tau$

ii) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $U_\alpha \cap [0,1] = \emptyset \Rightarrow \left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \right) \cap [0,1]$

$= \bigcup_{\alpha \in \Delta} \underbrace{(U_\alpha \cap [0,1])}_{\emptyset} = \emptyset$

$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau$

Aksi durumda

$\exists \alpha^* \in \Delta : U_{\alpha^*} = \mathbb{R} \Rightarrow U_{\alpha^*} = \mathbb{R} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha = \mathbb{R} \in \tau$

iii) $\{U_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$?

$\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ için $U_i = \mathbb{R}$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \mathbb{R} \in \tau$

Aksi durumda $\exists i_0 \in \{1,2,\dots,n\} : U_{i_0} \cap [0,1] = \emptyset$

$$\emptyset \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \cap [0,1] = \bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap [0,1]) \subseteq U_{i_0} \cap [0,1] = \emptyset$$

$$\Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{i_0}\right) \cap [0,1] = \emptyset$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$$

Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \in \mathbb{R} \mid [0,1] \subseteq U\}$ topoloji midir

→ i) $\emptyset \in \tau$, $[0,1] \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in \tau$

ii) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $U_\alpha = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha = \emptyset \in \tau$

Aksi durumda $\exists \alpha_0 \in \Delta : [0,1] \subseteq U_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$

$$\Rightarrow [0,1] \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau$$

iii) $\{U_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$?

$\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ için $[0,1] \subseteq U_i \Rightarrow [0,1] \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$

Aksi durumda, $\exists i_0 \in \{1,2,\dots,n\} : \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq U_{i_0} = \emptyset$

$U_{i_0} = \emptyset$ $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \emptyset \in \tau$

Ödev

1. $X \neq \emptyset$, $\emptyset \neq A_0 \subsetneq X \Rightarrow \tau_1 = \{X\} \cup \{G \subseteq X : A \cap G = \emptyset\}$ topoloji midir?

2. $\tau_2 = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X \mid A_0 \subsetneq G\}$ topoloji midir.? Gösteriniz

Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{L_a = (-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ (Sol ışın topolojisi) topolojidir. Gösteriniz

$-\infty$ $+\infty$

$\rightarrow$ i) $\emptyset, \mathbb{R} \in \tau$ 2sol için

ii) $a, b \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b \in \tau$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}_a \cap \mathcal{L}_b = \begin{cases} \mathcal{L}_a & , a \leq b \\ \mathcal{L}_b & , a \geq b \end{cases} \Longrightarrow \underline{\mathcal{L}_a \cap \mathcal{L}_b \in \tau}$$

$\mathcal{L}_a \cap \mathbb{R} = \mathcal{L}_a \in \tau \quad , \quad \mathcal{L}_a \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$

iii) $\{\mathcal{L}_{a_i} : a_i \in \mathbb{R}, i \in \Delta\} \subseteq \tau \qquad \cup \mathcal{L}_{a_i} \in \tau$?

$$\bigcup_{i \in \Delta} \mathcal{L}_{a_i} = \begin{cases} \mathcal{L}_a & , \text{eğer } a = \sup_{i \in \Delta} \{a_i\} \\ \mathbb{R} & , \text{aksi durumda} \end{cases} \Longrightarrow \bigcup_{i \in \Delta} \mathcal{L}_{a_i} \in \tau$$

Ödev: $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{\mathcal{L}_a = (a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ sağ ışın topolojisidir. Gösteriniz. (infimum)

Örn $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde $\tau = \{E_n = \{n, n+1, \dots\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ bir topoloji midir?

E_2 2 3 4 5

E_4 4 5 6 ...

$\rightarrow$ i) $\emptyset \in \tau \quad , \quad E_1 = \mathbb{N} \in \tau$

ii) $E_n, E_m \in \tau \quad (n, m \in \mathbb{N})$

$E_n \cap E_m = E_{\max\{n,m\}} \in \tau$

$E_n \cap \emptyset = \emptyset \in \tau \quad , \quad E_n \cap \mathbb{N} = E_n \in \tau$

iii) $\{E_{n_i} : n_i \in \mathbb{N}, i \in \Delta\} \subseteq \tau$ olsun.

$k = \min_{i \in \Delta} \{n_i\}$ için $\bigcup_{i \in \Delta} E_{n_i} = E_k \in \tau$

$n > 1 \quad , \quad n \in \mathbb{N} \qquad C_{\mathbb{N}} E_n = E_n^c \quad , \quad \{1, 2, \dots, n-1\}$

GIPTA

Tn $\mathbb{R}$'nin standart topolojisi: $\mathbb{R}$ üzerinde τ_{st} öklid topolojisi ya da standart topolojisi $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\tau_{st} = \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in U \text{ için } \exists (a,b) : x \in (a,b) \subseteq U \}$$

$U \in \tau_{st} \iff U$ açık aralıkların bir birleşimidir.

$\rightarrow$ i) $\emptyset \in \tau_{st}$ gerçekten bir an için $\emptyset \notin \tau_{st}$ farzedelim. τ_{st}'ye ait olma koşulu olan "$\forall x \in U \ \exists (a$..." ifadesinin değili "$\exists x \in U$, $\nexists (a,b)$ ....." formundadır. Ama $\emptyset$ hiç bir elemana sahip olmadığından bu mümkün değil. O halde farzıyemiz yanlıştır. $\emptyset \in \tau_{st}$, $\mathbb{R} \in \tau_{st}$ açıktır.

ii) $U_1, U_2 \in \tau_{st} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau_{st}$?

$x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow (x \in U_1) \wedge (x \in U_2)$

$$\left.\begin{array}{l} x \in U_1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U_1 \\ x \in U_2 \Rightarrow \exists \varepsilon' > 0 : (x-\varepsilon', x+\varepsilon') \subseteq U_2 \end{array}\right\}$$

$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ için

$$((x-\varepsilon^*, x+\varepsilon^*) \subseteq U_1) \wedge ((x-\varepsilon^*, x+\varepsilon^*) \subseteq U_2)$$

$\Rightarrow (x-\varepsilon^*, x+\varepsilon^*) \subseteq U_1 \cap U_2$

$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau_{st}$

iii) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau_{st}$ için $\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau_{st}$?

Eğer en az bir $\alpha \in \Delta$ için $U_\alpha = \mathbb{R} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha = \mathbb{R} \in \tau$

$\Delta = \emptyset$ veya $\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha = \emptyset$ ise yine $\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau_{st}$

Bu özel durumların dışında $x_0 \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ olsun

$\exists \alpha_{x_0} \in \Delta : x_0 \in U_{\alpha_{x_0}} \in \tau_{st} \Rightarrow \exists (a,b) : x_0 \in (a,b) \subseteq U_{\alpha_{x_0}} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$

10.10.22

Salı

$\Rightarrow x_0 \in (a,b) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$

$\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha \in \tau_{st}$

↱ standart topoloji

Ör: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'den hareketle $\tau^* = \{ U \cup F \mid U \in \tau_{st}$ ve $F \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \}$ ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde topoloji midir?

$\longrightarrow$ i) $(\mathbb{R} \in \tau_{st}) \wedge (\emptyset \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$?

$\Rightarrow \underset{\in\tau_{st}}{\mathbb{R}} \cup \underset{\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}{\emptyset} = \mathbb{R} \in \tau^*$

$(\emptyset \in \tau_{st}) \wedge (\emptyset \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \Rightarrow \underset{\in\tau_{st}}{\emptyset} \cup \underset{\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}{\emptyset} = \emptyset \in \tau^*$

ii) $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \subseteq \tau^* \Rightarrow \forall \alpha \in \Delta$ için

$(\exists U_\alpha \in \tau_{st}) \wedge (\exists F_\alpha \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) : A_\alpha = U_\alpha \cup F_\alpha$

$$\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Delta} (U_\alpha \cup F_\alpha) = \underbrace{\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha\right)}_{\in\tau_{st}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} F_\alpha\right)}_{\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \in \tau^*$$

iii) $A_1, A_2 \in \tau^* \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau^*$?

$A_1, A_2 \in \tau^* \Rightarrow (\exists U_1, U_2 \in \tau_{st}) \wedge (\exists F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) :$

$A_1 = U_1 \cup F_1 \qquad A_2 = U_2 \cup F_2$

$$A_1 \cap A_2 = (U_1 \cup F_1) \cap (U_2 \cup F_2)$$

$$= (U_1 \cap (U_2 \cup F_2)) \cup (F_1 \cap (U_2 \cup F_2))$$

$$= \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\in\tau_{st}} \cup \underbrace{\underbrace{(U_1 \cap F_2)}_{\subseteq F_2 \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \cup \underbrace{(F_1 \cap U_2)}_{\subseteq F_1 \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \cup \underbrace{(F_1 \cap F_2)}_{\subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}_{\subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$$

$\in \tau^*$

10.10.23
Salı

Ör: $x_1 \notin \mathbb{N}$, $x_2 \in \mathbb{N}$ ve $X = \mathbb{N} \cup \{x_1, x_2\}$ olsun.

$\tau = \{U \subseteq X : U \subseteq \mathbb{N}$ veya $C_X U$ sonlu$\}$ ailesi X üzerinde topolojidir ?

i) $\emptyset \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \emptyset \in \tau$ ve $C_X X = \emptyset$ sonlu $X \in \tau$

ii) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $U_\alpha \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau$

Aksi durumda $\exists \alpha^* \in \Delta$ için $C_X U_{\alpha^*}$ sonludur.

$$\underbrace{C_X\left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha\right)}_{\text{sonlu}} = \bigcap_{\alpha \in \Delta} C_X U_\alpha \subseteq \underbrace{C_X U_{\alpha^*}}_{\text{sonlu}}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau$$

2. yol $U_{\alpha^*} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \Rightarrow \underbrace{C_X\left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha\right)}_{\text{sonlu}} \subseteq \underbrace{C_X U_{\alpha^*}}_{\text{sonlu}}$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau$$

iii) $\{U_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$?

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $C_X U_i$ sonlu

$$C_X\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{C_X U_i}_{\text{sonlu}}}_{} \Rightarrow \underbrace{C_X\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right)}_{\text{sonlu}}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$$

Aksi durumda $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$ $U_{i_0} \subseteq \mathbb{N}$ ve $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq U_{i_0} \subseteq \mathbb{N}$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$

Ör: (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) birer topolojik uzay ise

$\tau = \{U \subseteq X \cup Y \mid (U \cap X \in \tau_X) \wedge (U \cap Y \in \tau_Y)\}$

$X \cup Y$ üzerinde topolojidir. Gösteriniz.

i) $\emptyset \subseteq X \cup Y$, $\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau_X$ ve $\emptyset \cap Y = \emptyset \in \tau_y$

$\Rightarrow \emptyset \in \tau$

$X \cup Y \subseteq X \cup Y$, $(X \cup Y) \cap (X) = X \in \tau_X$, $(X \cup Y) \cap (Y) = Y \in \tau_y$ $\Rightarrow X \cup Y \in \tau$

ii) $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} W_\alpha \in \tau$?

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} W_\alpha\right) \cap X = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in \Delta} \underbrace{(W_\alpha \cap X)}_{\in \tau_X}}_{\in \tau_X} \in \tau_X$$

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} W_\alpha\right) \cap Y = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in \Delta} \underbrace{(W_\alpha \cap Y)}_{\in \tau_y}}_{\in \tau_y} \in \tau_y$$

$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} W_\alpha \in \tau$

iii) $W_1, W_2 \in \tau \Rightarrow W_1 \cap W_2 \in \tau$?

$$(W_1 \cap W_2) \cap X = \underbrace{(W_1 \cap X)}_{\in \tau_X} \cap \underbrace{(W_2 \cap X)}_{\in \tau_X} \in \tau_X$$

$$(W_1 \cap W_2) \cap Y = \underbrace{(W_1 \cap Y)}_{\in \tau_y} \cap \underbrace{(W_2 \cap Y)}_{\in \tau_y} \in \tau_y$$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2 \in \tau$

Ör: $\mathbb{N}$ üzerinde $\emptyset$ ve $U \subseteq \mathbb{N}$ için $(n \in U) \wedge (m \mid n) \Rightarrow m \in U$ koşulunu gerçekleyen kümelerin ailesi topoloji mi ?

i) $\emptyset \in \tau$ verilmiş $\forall n \in \mathbb{N}$ için n bölenleri $\mathbb{N}$ o halde $\mathbb{N} \in \tau$

ii) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$?

U veya $V = \emptyset \Rightarrow U \cap V = \emptyset \in \tau$

$(U \neq \emptyset) \wedge (V \neq \emptyset) \wedge (n \in U \cap V)$ $m \mid n$ ise $U \cap V \subseteq U \in \tau$, $\subseteq V \in \tau$

olduğunda $m \in U$ ve $m \in V$ dolayısıyla $\in U \cap V \Rightarrow U \cap V \in \tau$

iii) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha \in \tau$?

$\forall \alpha\in\Delta$ için $U_\alpha = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha = \emptyset \in \tau$

Aksi durumda $\exists \alpha_0 \in \Delta$ için $U_{\alpha_0} \neq \emptyset$ dur.

$n \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$ ise bu birleşimde n içeren en az bir

$\emptyset \neq U_{\alpha(n)} \in \tau$ vardır. $U_{\alpha(n)} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$ ise n'nin bütün bölenleri

$U_{\alpha(n)}$ dolayısıyla $\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$ 'dadır.

Ör: (X,τ) bir topolojik uzay $A \subseteq X$ olsun

$$\tau_A = \{A\cap U \mid U\in\tau\}$$

A üzerinde topoloji midir?

i) $\emptyset = \emptyset \cap A \in \tau_A$

$$A\cap \underset{\in\tau}{X} = A \in \tau_A$$

ii) $\{U_\alpha^*\}_{\alpha\in\Delta} \subseteq \tau_A \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha^* \in \tau_A$?

$\forall \alpha\in\Delta$ için $\exists U_\alpha \in\tau$! $U_\alpha^* = U_\alpha \cap A$ gerçeklenir.

$$\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha^* = \bigcup_{\alpha\in\Delta} (U_\alpha\cap A) = \underbrace{\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha\right)}_{\in\tau} \cap A \in \tau_A$$

iii) $U_{\alpha_1}^*, U_{\alpha_2}^* \in \tau_A \Rightarrow U_{\alpha_1}^* \cap U_{\alpha_2}^* \in \tau_A$?

$U_{\alpha_1}^*, U_{\alpha_2}^* \in \tau_A \Rightarrow \exists U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2} \in \tau : U_{\alpha_1}^* = U_{\alpha_1}\cap A \quad U_{\alpha_2}^* = U_{\alpha_2}\cap A$

gerçeklenir.

$$U_{\alpha_1}^* \cap U_{\alpha_2}^* = (U_{\alpha_1}\cap A) \cap (U_{\alpha_2}\cap A) = \underbrace{(U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2})}_{\in\tau} \cap A \in \tau_A$$

Tanım: Eğer τ ve τ' aynı X kümesi üzerinde tanımlı birer topoloji iseler τ topolojisinin τ' topolojisinden daha kuvvetli veya τ' topolojisinin τ topolojisinden daha

GIPTA

zayıf olması için g.y.k $\tau' \subseteq \tau$ olmasıdır.

$\tau' \subseteq \tau$ olması halinde $\tau' < \tau$ yazılır.

Örnekler:

a) Her $X (\neq \emptyset)$ kümesi üzerinde tanımlanabilen en kuvetli topoloji $P(X)$ yani ayrık topolojidir.

b) Her $X (\neq \emptyset)$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X\}$ ayrık olmayan topolojisi tanımlanabilecek en zayıf topolojidir.

c) Bir $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi verilmiş olsun.

$$\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, X\} \quad \text{ve}$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}\ X\}$$

X üzerinde birer topolojidir. $\tau_2 \subseteq \tau_1$ olduğundan τ_2, τ_1'dan daha zayıf yani $\tau_2 < \tau_1$ geçerlidir.

$$\tau_3 = \{\emptyset, \{c\}, \{c,d\}, X\}$$

ailesi de X üzerinde bir topolojidir. τ_1 ve τ_2'yi alt küme olarak kabul etmediği gibi, τ_1 ve τ_2'nin alt kümesi de değildir.

τ_3 topolojisi τ_1 ve τ_2 ile karşılaştırılamaz bir topolojidir.

Teorem! Eğer $\forall \alpha \in \Delta$ için τ_α, X üzerinde bir topoloji ise $\tau^* = \bigcap_{\alpha \in \Delta} \tau_\alpha$ ailesi de X üzerinde bir topolojidir.

İspat: i) $\forall \alpha \in \Delta$ için τ_α, X üzerinde topoloji olduğundan $\forall \alpha \in \Delta$ için $\emptyset \in \tau_\alpha$ ve $X \in \tau_\alpha$ olur. O halde $X \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} \tau_\alpha = \tau^*$ ve $\emptyset \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} \tau_\alpha = \tau^*$ gerçeklenir.

ii) $\forall \beta \in \Omega$ için $G_\beta \in \tau^*$ olmak üzere $\{G_\beta\}_{\beta \in \Omega} = \mathcal{G} \subseteq \tau$ olsun. $\{G_\beta\}_{\beta\in\Omega} \subseteq \tau^* = \bigcap_{\alpha \in \Delta} \tau_\alpha \subseteq \tau_\gamma$
$(\forall \gamma \in \Delta)$

O halde $\forall \beta \in \Omega$ ve $\forall \gamma \in \Delta$ için $G_\beta \in \bigcap_{\alpha\in\Delta} \tau_\alpha = \tau^* \in \tau_\gamma$

$\Rightarrow \forall \gamma \in \Delta$ için $\{G_\beta\}_{\beta \in \Delta} \subseteq \tau_\gamma$ ve τ_γ topoloji olduğu için $\bigcup_{\beta\in\Omega} G_\beta \in \tau_\gamma$ $\forall \gamma \in \Delta$ için doğru. O halde $\bigcup_{\beta \in \Omega} G_\beta \in \bigcap_{\gamma \in \Delta} \tau_\gamma \in \tau^*$

$G_1, G_2 \in \tau^*$ olsun. $\forall i \in \{1,2\}$ için $G_i \in \tau^* = \bigcap_{\alpha\in\Delta} \tau_\alpha \subseteq \tau_\gamma$ $(\forall \gamma \in \Delta$ için doğru$)$.

Her τ_γ topoloji olduğundan $\forall \gamma \in \Delta$ için $G_1 \cap G_2 \in \bigcap_{\gamma\in\Delta} \tau_\gamma$

Yani τ^* X üzerinde topolojidir.

Birleşimleri için aynı şey söylenemez.

Örn $X = \{a,b,c\}$ üzerinde $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ ve $\tau_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ birer topolojidir?

$\longrightarrow$ $\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$

$\{a,b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2 \Rightarrow \tau_1 \cup \tau_2$ topoloji değil X

Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay $C \subseteq X$ olsun. C'nin X'in kapalı alt kümesi olması için g.y.k. $C_X C \in \tau$ olmasıdır.
Tümleyeni açık olmalı

Örn $X = \{a,b,c\}$ üzerinde $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ topolojisinin kapalı kümeleri $X, \emptyset, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}$ olur.

Teorem: (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

a) Kapalı kümelerin her sonlu ailesinin birleşimi kapalıdır.

b) kapalı kümelerin (göz önüne) alınabilecek her ailesinin kesişimi kapalıdır.

İspat: a.) (X, τ) topolojik uzay $\{K_i\}_{i=1}^{n}$ sonlu bir kapalı küme ailesi olsun. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ için $C_X K_i \in \tau$ olur. $\{C_X K_i\}_{i=1}^{n}$ sonlu açık küme ailesidir. O halde $\bigcap_{i=1}^{n} C_X K_i \in \tau$

O halde $C_X(\bigcap_{i=1}^{n} C_X K_i)$ kümesi kapalıdır. De-Morgandan

$$C_X\left(\bigcap_{i=1}^{n} C_X K_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} C_X C_X K_i = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

b.) $\{K_\beta\}_{\beta \in \Omega}$ τ-kapalı kümelerin bir ailesi olsun. $\forall \beta \in \Omega$ için $C_X K_\beta \in \tau$ 'dır. $\{C_X K_\beta\}_{\beta \in \Omega}$ $(\subseteq \tau)$ keyfi açık küme ailesidir. ve $\bigcup_{\beta \in \Omega} C_X K_\beta \in \tau$ olur. Bu durumda $C_X(\bigcup_{\beta \in \Omega} C_X K_\beta)$ kapalıdır.

$$C_X\left(\bigcup_{\beta \in \Omega} C_X K_\beta\right) = \bigcap_{\beta \in \Omega} C_X C_X K_\beta = \bigcap_{\beta \in \Omega} K_\beta$$

12.10.23
Perşembe

Uyarı: Bir topolojik uzayda aynı zamanda hem açık hemde kapalı kümeler bulunabilir. Örneğin her topolojik uzayda $\emptyset$ ve X hem açık hem de kapalı olan kümelerdir. Bir X topolojik uzayında $\emptyset$ ve X'in dışında hem açık hem kapalı olan kümeler varsa bu topolojik uzaya bağlantılı değildir.

Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ verilsin. Bu uzayın kapalı kümeleri $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[a, \infty)$ formunda kümeler kapalı kümeler

Ör: $\mathbb{N}$ üzerinde $n \in \mathbb{N}$ için $E_n = \{n, n+1, \dots\}$ olmak üzere $\tau = \{\emptyset\} \cup \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ topolojisinin kapalı kümeleri

$\emptyset$, $E_1 = \mathbb{N}$, $C_{\mathbb{N}} E_n = \{1, \dots, n-1\}$

→ $\{1, 3, 5, 7\}$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme

$C_{\mathbb{N}} E_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

→ $\mathbb{N}_G$ = (çift doğal sayılar) kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $E_1 = \mathbb{N}$

Ör: $X = [-1, 1]$ olsun. $\tau = \{U \subseteq X : \underline{0 \notin U} \text{ veya } \underline{(-1,1) \subseteq U}\}$ küme ailesi X üzerinde topolojidir. Bu topolojinin kapalı kümelerini belirleyin.

→ i) $0 \notin \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \tau$

$(-1,1) \subseteq [-1,1] = X \Rightarrow X \in \tau$

ii) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $0 \notin U_\alpha \Rightarrow 0 \notin \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau$

Aksi durumda $\exists \alpha_0 \in \Delta : (-1,1) \subseteq U_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$

$\Rightarrow (-1,1) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha_0} \in \tau$

iii) $\{U_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$?

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $(-1,1) \subseteq U_i \Rightarrow (-1,1) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$

Aksi durumda $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\} : 0 \notin U_{i_0} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \; (\subseteq U_{i_0})$

$\Rightarrow 0 \notin \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$

→ sıfırı içeriyorsa kapalı küme ✓

τ, X üzerinde topoloji $A \subseteq X$ olsun.

Bu durumda A τ'da kapalıdır $\iff C_X A \in \tau$

$\iff (-1,1) \subseteq C_X A$ veya $0 \notin C_X A$

$\iff A \subseteq C_X(-1,1)$ veya $0 \in A$

$\iff A = \emptyset$ veya $\{1\}$ veya $\{-1\}$ veya $\{-1,1\}$ veya $0 \in A$

Ör: Yukarıda verilen topoloji de $(-1,1) \cap \mathbb{Q}$ kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeyi belirleyin.

→ $0 \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}$ olduğundan kümenin kendisi aradığımız cevap → $(-1,1) \cap \mathbb{Q}$ ✓

→ $(-1,1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ için ise aynı sorunun cevabı

$(-1,1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$ ✓

Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} \mid C_{\mathbb{R}} U$ sayılabilir$\}$ verilsin $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$'yu içeren en küçük kapalı kümeleri bulun.

→ Bu topolojinin kapalı kümeleri $\emptyset$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}$'nin sayılabilir alt kümeleridir ✓

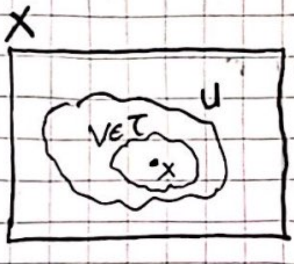
$\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan $\mathbb{Q}$'nun en küçük kapalı üst kümesi kendisi, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$'nun ise $\mathbb{R}$'dir.

* Bütünleyeni sonlu deseydi eğer ikisi de $\mathbb{R}$ olurdu.

Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay $x \in X$ olsun. $x \in V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \tau$ varsa $U (\subseteq X)$ alt kümesine x noktasının civarı veya komşuluğu denir. x noktasının herhangi bir civarı N_x veya U_x ile gösterilir. x noktasının komşuluklarının ailesi ise $\mathcal{N}_x$ veya $\mathcal{U}_x$ ile gösterilir yani

$$\mathcal{N}_x = \{ U \subseteq X : \exists V \in \tau \text{ ve } x \in V \subseteq U \}$$

ile verilir. $U \in \mathcal{N}_x$ ise $V_x \in \tau$, $x \in V_x \subseteq U$ gerçeklenecek üzere vardır. $V_x \in \mathcal{N}_x$ $y \in V_x (\in \tau)$ ise $y \in V_x \subseteq U$ gerçeklendiğinden $U \in \mathcal{N}_y$



Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

1) $\forall x \in X$ için $\mathcal{N}_x \neq \emptyset$ ve $\forall U \in \mathcal{N}_x$ için $x \in U$ geçerlidir.

2.) Bir noktanın herhangi iki komşuluğunun ara kesiti yine o noktanın bir komşuluğudur.

3.) Bir noktanın komşuluğunu kapsayan her küme o noktanın bir komşuluğudur.

4) Eğer $U \in \mathcal{N}_x$ ise x noktasının bir V komşuluğu U, V kümesinin noktalarının her birinin bir komşuluğu olacak şekilde vardır. Yani $U \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists V \in \mathcal{N}_x$, $\forall y \in V$ için $U \in \mathcal{N}_y$

İspat: 1.) $X \in \tau$ olduğundan $\forall x \in X$ için $x \in X \subseteq X \in \mathcal{N}_x$ gerçeklenir, yani $\forall x \in X$ için $\mathcal{N}_x \neq \emptyset$ geçerlidir.

2.) $N_x(1)$ ve $N_x(2)$ x noktasının iki komşuluğu ise $N_x(1) \cap N_x(2)$ kümeside x noktasının komşuluğu mudur?

$$\left.\begin{aligned} N_x(1) \in \mathcal{N}_x &\Rightarrow \exists G_1 \in \tau : x \in G_1 \subseteq N_x(1) \\ N_x(2) \in \mathcal{N}_x &\Rightarrow \exists G_2 : \tau : x \in G_2 \subseteq N_x(2) \end{aligned}\right\} x \in G_1 \cap G_2 \in \tau$$

$$\Rightarrow \quad x \in G_1 \cap G_2 \subseteq G_1 \subseteq N_x(1)$$

$$x \in G_1 \cap G_2 \subseteq G_2 \subseteq N_x(2)$$

$$\Rightarrow x \in \underbrace{G_1 \cap G_2}_{\in \tau} \subseteq N_x(1) \cap N_x(2) \in \mathcal{N}_x$$

3.) $N_x \in \mathcal{N}_x$ ve $N_x \subseteq M (C_x)$ olsun

$$N_x \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists V \in \tau : x \in V \subseteq N_x \subseteq M$$

$$\Rightarrow x \in \underbrace{V}_{\in \tau} \subseteq M \Rightarrow M \in \mathcal{N}_x$$

4) $U \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists V \in \tau : x \in V \subseteq U$ gerçeklenir. V açık olduğundan her bir noktasının bir komşuluğudur. Fakat $V \subseteq U$ old. 3.'den U, V'nin noktalarının her birinin komşuluğudur.

Teorem: (X, τ) topolojik uzayı göz önüne alınsın $A \subseteq \tau$ için g.y.k $\forall x \in A$ için $\exists N_x \in \mathcal{N}_x : x \in N_x \subseteq A$ gerçeklenmesidir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \in \tau$, $\forall x \in A$ için $x \in \underset{\in \tau}{A} \subseteq A$ olduğundan A noktalarının her birinin komşuluğudur.

$(\Leftarrow)$ $\forall x \in A$ için bir $\exists N_x \in \mathcal{N}_x : N_x \subseteq A$ gerçeklensin

O halde $\forall x \in A$ için $x \in A_x \subseteq N_x \subseteq A$ olacak şekilde $A_x \in \tau$ vardır

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} A_x \subseteq \bigcup_{x \in A} N_x \subseteq A$$

$$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} A_x \in \tau$$

17.10.23
Salı

Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. A kümesini kapsayan bütün kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin kapanışı denir ve $\bar{A}$ (yada $cl(A)$) ile gösterilir.

Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve, $\bar{A}$ kümesi A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümedir.

İspat: $A \subseteq X$ $\mathcal{C}_A = \{K \subseteq X : A \subseteq K$ ve K kapalı yani $C_X K \in \tau\}$

$$\bar{A} = \bigcap_{K \in \mathcal{C}_A} K \quad \text{geçerlidir.}$$

ve keyfi kapalı küme ailesinin arakesiti kapalı olduğundan

$$(A \subseteq) \bigcap_{K \in \mathcal{C}_A} K = \bar{A} \in \mathcal{C}_A \text{ kapalıdır.}$$

$\forall K^* \in \mathcal{C}_A$ için $\bar{A} \left(= \bigcap_{K \in \mathcal{C}_A} K\right) \subseteq K^*$ olduğundan $\bar{A}$, $\mathcal{C}_A$'nın en küçük elemanı dolayısıyla en küçük kapalı üst kümesidir

Ör: $X = \{a, b, c, d, e\}$ üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ ile verilsin

GIPTA

→ X'in kapalı (τ-kapalı) alt kümeleri

$\emptyset$, X, $\{b,c,d,e\}$, $\{a,b,e\}$, $\{b,e\}$, $\{a\}$ dur.

$\{a\}$, $\{b,c,d,e\}$ $\emptyset$'den ve X'den farklı hem açık hem de kapalı alt kümesidir.

$\{a,b\}(\subseteq X)$ alt kümesi ne açık ne de kapalıdır.

$\overline{\{b\}} = X \cap \{b,c,d,e\} \cap \{a,b,e\} \cap \{b,e\} = \{b,e\}$

$\overline{\{a,c\}} = X$

$\overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\}$

Ör. X sonsuz kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : C_X U \text{ sonlu}\}$ topolojisi göz önüne alınsın.

→ Sonlu kümelerin bütünleyenleri, $\emptyset$ ve X bu topolojide kapalı kümelerdir. $C_X C_X U$

$A \subseteq X$ $\overline{A} = ?$

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & A \text{ sonlu ise} \\ X, & A \text{ sonsuz ise} \end{cases}$$

Önerme: (X,τ) bir topolojik uzay, $A, B \subseteq X$ ve $A \subseteq B$ ise $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ geçerlidir.

İspat: $A \subseteq B$ $\mathcal{C}_A = \{K : A \subseteq K \text{ ve } K \text{ kapalı}\}$

$\mathcal{C}_B = \{K : B \subseteq K \text{ ve } K \text{ kapalı}\}$

$$A \subseteq B \subseteq F \in \mathcal{C}_B \Rightarrow F \in \mathcal{C}_A \Rightarrow \mathcal{C}_B \subseteq \mathcal{C}_A$$

$$\overline{A} = \bigcap_{K \in \mathcal{C}_A} K = \bigcap_{K \in (\mathcal{C}_A \setminus \mathcal{C}_B) \cup \mathcal{C}_B} K = \left(\bigcap_{K \in \mathcal{C}_A \setminus \mathcal{C}_B} K\right) \cap \underbrace{\left(\bigcap_{K \in \mathcal{C}_B} K\right)}_{=\overline{B}}$$

$$= \bigcap_{K \in \mathcal{C}_A \setminus \mathcal{C}_B} K \cap \overline{B} \subseteq \overline{B}$$

$\Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

Ya da kısaca

$(A \subseteq B \subseteq \bar{B}) \cap (\bar{B}$ kapalı$)$ ve $\bar{A} = \bigcap_{K \in \tau_A} K \subseteq \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

$(\bar{B} \in \tau_A)$

Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. A'nın kapalı olması için g.y.k $A = \bar{A}$ olmasıdır.

İspat: A kapalı olsun $A \subseteq \bar{A} = \bigcap_{K \in \tau_A} K \subseteq A \Rightarrow \bar{A} = A$ verir.

Tersine $A = \bar{A} = \bigcap_{K \in \tau_A} K$ ve $\bigcap_{K \in \tau_A} K$ kapalı olduğundan A kapalı kümedir.

Soru

Önerme: (X, τ) topolojik uzay, $A, B \subseteq X$ ise

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ geçerlidir.}$$

İspat:

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B} \\ B \subseteq A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \end{array}\right\} \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \quad (1)$$

$A \cup B \subseteq \underbrace{\underset{\text{kapalı}}{\bar{A}} \cup \underset{\text{kapalı}}{\bar{B}}}_{\text{kapalı}}$ kapalı bir kümedir.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A \cup B} = \bigcap_{K \in \tau_{A \cup B}} K \subseteq \bar{A} \cup \bar{B} \\ (\bar{A} \cup \bar{B} \in \tau_{A \cup B}) \\ \Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B} \quad (2) \end{array}\right\} ?$$

(1) ve (2)'den $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ olur.

Uyarı: $\underbrace{\overline{A\cap B} \subseteq \overline{A}\cap\overline{B}}$ geçerlidir ama ters kapsama doğru olmak zorunda değildir.

Örn: $X=[-1,1]$ üzerinde $\tau=\{U\subseteq X : 0\notin U$ veya $(-1,1)\subseteq U\}$ göz önüne alınsın. $\emptyset, \{1\}, \{-1\}, \{-1,1\}$ ✓

$A=(-1,1)\cap\mathbb{Q}$

$B=(-1,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$

$\overline{A}=A$

$\overline{B}=B\cup\{0\}$

$\{0\}=\overline{A}\cap\overline{B}\not\subseteq\overline{A\cap B}=\overline{\emptyset}=\emptyset$

$(-1,1)$

Teorem: (X,τ) bir topolojik uzay, $A\subseteq X$ olsun. $x\in\overline{A}$ olması için g.y.k $\forall U\in\underbrace{\tau\cap\mathcal{N}_x}_{\text{x noktasını içeren açık kümelerin ailesi}}$ için $A\cap U\neq\emptyset$ olmasıdır.

İspat: $(p\Leftrightarrow q)\equiv(\neg q\Leftrightarrow\neg p)$ ispatlamamız gereken ifade "$x\in\overline{A}\Leftrightarrow\exists U\in\tau\cap\mathcal{N}_x : A\cap U=\emptyset$" ifadesine denktir.

$x\notin\overline{A}\Rightarrow x\in C_X\overline{A}\in\tau\cap\mathcal{N}_x$

$A\subseteq\overline{A}\Rightarrow A\cap C_X\overline{A}\subseteq C_XA\cap A=\emptyset$

$\Rightarrow A\cap C_X\overline{A}=\emptyset$

$\exists U\in\tau\cap\mathcal{N}_x : A\cap U=\emptyset$

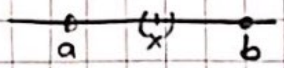
$A\subseteq C_XU\Rightarrow A\subseteq\overline{A}\subseteq C_XU\Rightarrow x\notin\overline{A}$

Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun

Bir $x \in A$, $\exists G \in \tau \cap \mathcal{N}_x$ $(\subseteq \tau)$; $x \in G \subseteq A$ gerçeklenirse

yani $x \in G \subseteq A$ gerçekleyen A açık kümesi var ise

x noktasına A kümesinin iç noktası denir.



x, $[a,b]$'nin iç noktası denir.

A'nın iç noktaların kümesi A ile gösterilir ve $\mathring{A}$

A kümesinin içi olarak isimlendirilir.

Bu tanım komşuluk kavramı aracılığıyla da verilebilir.

$$x \in A \iff \exists N_x \in \mathcal{N}_x \quad N_x \subseteq A$$

Örn: $X = \{a,b,c,d,e\}$ üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\},$

$\{b,c,d,e\}\}$ verilsin

$A = \{b,c,d\}$

$c,d \in \{c,d\} \subseteq A \Rightarrow c,d \in A^\circ$ → iç nokta

$b \notin A^\circ$ → b iç nokta değil

b'yi içerip A'da kapsanan açık küme yok.

$\emptyset$, $\mathbb{R}$ $[a,\infty)$

Örn: $\mathbb{R}$ üzerinde, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}$

sol ışın topolojisi gözönüne alınsın, $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$, $(-\infty,x]$

$[0,1]$ ve $\mathbb{N}$ kümelerinin içini ve kapanışını bulun.

→ kapalı kümeler $\emptyset, \mathbb{R}, [a,\infty), (a \in \mathbb{R})$ olur.

$\{x\}^\circ = \emptyset$ $\quad$ $[0,1]^\circ = \emptyset$

$\overline{\{x\}} = [x,\infty)$ $\quad$ $\overline{[0,1]} = [0,\infty)$

$(-\infty,x]^\circ = (-\infty,x)$ $\quad$ $\mathbb{N}^\circ = \emptyset$

19.10.23
Perşembe

Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun

i) A° kümesi $A (\subseteq X)$ alt kümesinin kapsadığı bütün açık kümelerin birleşimine eşittir, yani

$$A^\circ = \cup \{ G \mid (G \subseteq A) \wedge (G \in \tau) \}$$

ii) A°, A da kapsanan en büyük açık kümedir.

iii) $A = A^\circ \iff A \in \tau$ → açık kümedir.

İspat:

i) A'da kapsanan açık kümelerin ailesi

$\mathcal{M}_A = \{ G \subseteq X \mid (G \subseteq A) \wedge (G \in \tau) \}$ olsun.

$$x \in \bigcup_{G \in \mathcal{M}_A} G \Rightarrow \exists G_x \in \mathcal{M}_A : (x \in G_x \subseteq A) \wedge (G_x \in \tau) \Rightarrow x \in A$$

$$\Rightarrow \bigcup_{G \in \mathcal{M}_A} G \subseteq A^\circ \quad (1)$$

Tersine $x \in A^\circ$, ise $G_x \in \tau$, $x \in G_x \subseteq A$ olacak şekilde vardır. Bu $G \in \mathcal{M}_A$ ve $A^\circ \subseteq \bigcup_{G \in \mathcal{M}_A} G$ (2)

(1) ve (2)'den $A^\circ = \bigcup_{G \in \mathcal{M}_A} G$

ii) (A.2) $\Rightarrow A^\circ = \bigcup_{G \in \mathcal{M}_A} G \in \tau \Rightarrow A^\circ \subseteq A$ yani A°, A da kapsanan topolojiye ait en büyük açık kümedir.

iii) $A = A^\circ \iff A \in \tau$

$$A = A^\circ = \bigcup_{G \in \mathcal{M}_A} G \quad (\mathcal{M}_A \subseteq \tau) \Rightarrow A = A^\circ \in \tau$$

$$A \in \tau \Rightarrow A^\circ = A \in \tau$$

$\mathbb{R}$'nin Standart Topolojisinin İncelenmesi :

Teorem: $\mathbb{R}$ üzerindeki her açık aralık $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ topolojik uzayında açıktır.

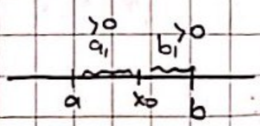
İspat: $\mathbb{R}$'deki açık aralıklar aşağıda sıralanan 4 tipe ayrılırlar

$(a,b) = \{p \in \mathbb{R} \mid a < p < b\}$

$(a,\infty) = \{p \in \mathbb{R} \mid a < p\}$

$(-\infty, b) = \{p \in \mathbb{R} \mid p < b\}$

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$



Bu tiplerden her biri için τ_{st}'ye ait olma koşulunun gerçeklendiği gösterilmeli. Örneğin $x_0 \in (a,b)$ ise

$x_0 - a > 0 \quad , \quad b - x_0 > 0$ olduğundan

$a_1 = a + \frac{1}{2}(x_0 - a)$

$b_1 = b - \frac{1}{2}(b - x_0)$ sayıları • $x_0 - a_1 = x_0 - a - \frac{1}{2}(x_0 - a) = \frac{1}{2}(x_0 - a)$

• $b_1 - x_0 = b - \frac{1}{2}(b - x_0) - x_0 = \frac{1}{2}(b - x_0) > 0$ yani

$x_0 \in (a_1, b_1) \subseteq (a,b)$ gerçeklenir.

$(a,b) \in \tau_{st}$'dir. Diğer tiplerde benzer şekilde gösterilebilir.

Not: $a \in \mathbb{R}$ için $A = (-\infty, a) \cup (a, \infty) \in \tau \Rightarrow C_{\mathbb{R}} A = \{a\}$

τ_{st} kapalıdır. O halde standart topolojide tek nokta kümeleri kapalıdır.

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olsun

$B = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \in \tau_{st} \Rightarrow C_{\mathbb{R}} B = [a,b]$ τ_{st} kapalıdır

$C = (a, \infty) \in \tau_{st} \Rightarrow C_{\mathbb{R}} C = (-\infty, a]$ τ_{st} kapalıdır

$D = (-\infty, b) \in \tau_{st} \Rightarrow C_{\mathbb{R}} D = [b, \infty)$ τ_{st} kapalıdır

Ör: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ de

$A = (0,1) \cup (1,2) \cup \{3\}$

$B = \{0\} \cup (1,2) \cup \{3\}$

$C = \mathbb{N}$

kümelerinin kapanışı ve içini bulun

$\longrightarrow \quad \overline{A} = \overline{(0,1) \cup (1,2) \cup \{3\}} = \overline{(0,1)} \cup \overline{(1,2)} \cup \overline{\{3\}}$

$= [0,1] \cup [1,2] \cup \{3\}$

$= [0,2] \cup \{3\}$

$A^\circ = (0,1) \cup (1,2)$

$\overline{B} = \overline{\{0\} \cup (1,2) \cup \{3\}} = \overline{\{0\}} \cup \overline{(1,2)} \cup \overline{\{3\}}$

$= \{0\} \cup [1,2] \cup \{3\}$

$B^\circ = (1,2)$

$C_{\mathbb{R}}\mathbb{N} = (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup \dots \in \tau_{st}$ → Tümleyeni açık kümelerin birleşimi olduğu için açık küme kapalı oldu

$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \qquad \mathbb{N}^\circ = \emptyset$

Ör: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ yapmıştık.

Teorem: i) (Arşimet Özelliği);

a ve b pozitif reel sayı olsun $\exists n \in \mathbb{N} : na > b$ gerçeklenir

ii) $c < d$ gerçekleyen her $c, d \in \mathbb{R}$ reel sayı çifti arasında daima bir $q \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı $c < q < d$ gerçeklenmek üzere vardır.

ör) $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'de $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ olduğunu gösteriniz.

→ $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$ farz edelim. Bu durumda $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ ve

$\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} \in \tau_{st}$ olduğundan $a<b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$

$x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} \; (\subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ olacak şekilde vardır

Her (a,b) aralığında bir q rasyonel sayısı seçilebildiğinden

$q \in (a,b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ çelişki elde edilir.

O halde $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ geçerlidir.

*rasyonel sayı irrasyonel sayının elemanı olamaz

$(\mathbb{R}, \tau_{st})$, $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ çünkü $\mathbb{R} \setminus (\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus (\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}) \in \tau_{st} \Rightarrow \exists (c,d) : x \in (c,d) \subseteq \mathbb{R} \setminus (\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}})$

α: irrasyonel sayı

$\subseteq \underbrace{\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}_{\mathbb{Q}}$

Not: a) $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ ayrık açık aralıkların ailesi ise $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ ailesi sayılabilirdir.

b) $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ ailesi $\forall \alpha \in \Delta$ için $p \in \mathbb{R}$ noktasını içeren açık aralıkların ailesi ise $\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$, p noktasını içeren açık aralıktır.

Sonuç: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'de bir $A \; (\subseteq \mathbb{R})$ alt kümesinin açık olması için g.y.k A'nın sayılabilir sayıda ayrık açık aralıkların birleşimi olarak yazılabilmesidir.

Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay $A, B \subseteq X$ olsun

I1) $X^\circ = X$

I2.) $A^\circ \subseteq A$

I3.) $A^{\circ\circ} = A^\circ$

I4.) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ gerçeklenir.

ispat:

I1.) $X^\circ = X$ çünkü X'de kapsanan topolojiye ait en büyük açık küme X'in kendisidir.

I2.) $A^\circ = \bigcup_{G \in M_A} G \in \tau \Rightarrow A^\circ \subseteq A$

I3.) $A^\circ \in \tau \Rightarrow \overset{\circ\circ}{A} = A^\circ$

I4.) $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_1}$ ve $\{B_\beta\}_{\beta \in \Delta_2}$ iki küme ailesi ise

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \Delta_1} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in \Delta_2} B_\beta\right) = \bigcup_\alpha \bigcup_\beta (A_\alpha \cap B_\beta)$$

bilgisinden hareketle

$$A^\circ \cap B^\circ = \left(\bigcup_{(U \subseteq A) \wedge (U \in \tau)} U\right) \cap \left(\bigcup_{(V \subseteq B) \wedge (V \in \tau)} V\right) = \bigcup_{(U \subseteq A \cap B) \wedge (W = U \cap V)} W$$

$$= (A \cap B)^\circ$$

Sonuç! a) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

b) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$ $\rightarrow$ $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$

ispat! a) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ ve $A^\circ = (A \cap B)^\circ \overset{(I4)}{=} A^\circ \cap B^\circ \subseteq B^\circ$

$\Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

b.) $\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \Rightarrow A^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ \\ B \subseteq A \cup B \Rightarrow B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$

ör: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ $A = [0,1]$, $B = [1,2]$

$A^\circ = (0,1)$, $B^\circ = (1,2)$, $(A \cup B)^\circ = ([0,2])^\circ = (0,2)$

$(0,2) = (A \cup B)^\circ \not\subseteq A^\circ \cup B^\circ = (0,1) \cup (1,2)$

Ör: $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$ için tertli bir ispat verin ve bu özellikten hareketle $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ olduğunu gösterin

$\rightarrow A^\circ \subseteq A \subseteq B$

$B^\circ = \bigcup_{G\in M_B} G = \bigcup \{G \subseteq X \mid (G \subseteq B) \wedge (G \in \tau)\}$

$A^\circ \in M_B$ ve $A^\circ \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

$(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$?

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B \subseteq A \Rightarrow (A\cap B)^\circ \subseteq A^\circ \\ A\cap B \subseteq B \Rightarrow (A\cap B)^\circ \subseteq B^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow (A\cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ \quad (1)$$

$A^\circ \cap B^\circ = (A\cap B)^\circ$?

$(\mathring{A} \subseteq A) \wedge (\mathring{B} \subseteq B) \Rightarrow \underbrace{\mathring{A}\cap\mathring{B}}_{\in\tau} \subseteq A\cap B \Rightarrow \mathring{A}\cap\mathring{B} \subseteq (A\cap B)^\circ$

$\mathring{A}\cap\mathring{B} \in M_{A\cap B}$ $\quad (A\cap B)^\circ = \bigcup_{G\in M_{A\cap B}} G \Rightarrow \mathring{A}\cap\mathring{B} \subseteq (A\cap B)^\circ \quad (2)$

(1) ve (2)'den eşitlik gelir.

Teorem: (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun

$\overline{A} = C_X((C_X A)^\circ)$ gerçeklenir.

İspat: $A \subseteq \overline{A} \Rightarrow C_X\overline{A} \subseteq C_X A \Rightarrow C_X\overline{A} = (C_X\overline{A})^\circ \subseteq (C_X A)^\circ$

Açıksa içi kendisine eşit

$\Rightarrow C_X\overline{A} \subseteq (C_X A)^\circ$

$\Rightarrow C_X(C_X A)^\circ \subseteq \overline{A} \quad (1)$

$(C_X A)^\circ \subseteq C_X A \Rightarrow A \subseteq C_X(C_X A)^\circ \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{C_X(C_X A)^\circ}$

$= C_X(C_X A)^\circ \Rightarrow \overline{A} \subseteq C_X(C_X A)^\circ \quad (2)$

(1) ve (2)'den $\overline{A} = C_X(C_X A)^\circ$

Önerme: $A^\circ = C_X \overline{C_X A}$

İspat: $A^\circ \subseteq A \Rightarrow C_X A \subseteq C_X A^\circ \Rightarrow \overline{C_X A} \subseteq \overline{C_X A^\circ} = C_X A^\circ$

$\Rightarrow A^\circ \subseteq C_X \overline{C_X A} \quad (1)$

$C_X A \subseteq \overline{C_X A} \Rightarrow C_X \overline{C_X A} \subseteq A \Rightarrow C_X (\overline{C_X A}) = (C_X (\overline{C_X A}))^\circ$

$\subseteq A^\circ \Rightarrow C_X (\overline{C_X A}) \subseteq A^\circ \quad (2)$

(1) ve (2) den $\mathring{A} = C_X (\overline{C_X A})$

Ör: Yukarıdaki formulden hareketle $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ olduğunu gösterin

$\longrightarrow (A \cap B)^\circ = C_X \overline{C_X (A \cap B)} = C_X (\overline{C_X A \cup C_X B})$

$= C_X (\overline{C_X A} \cup \overline{C_X B})$

$= C_X (\overline{C_X A}) \cap C_X (\overline{C_X B})$

$= \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Sordu

Ödev: $(A \setminus B)^\circ \subseteq \mathring{A} \setminus \mathring{B}$

$\longrightarrow (A \cap C_X B)^\circ \subseteq \mathring{A} \cap (C_X \mathring{B}) = ?$

$A \cap C_X B \subseteq A \overset{\text{iç alınırsa}}{\Longrightarrow} (A \cap C_X B)^\circ \subseteq \mathring{A} \quad (1)$

$\mathring{B} \subseteq B \Rightarrow (A \cap C_X B)^\circ \subseteq A \cap C_X B \subseteq C_X B \subseteq C_X (\mathring{B})$

$\Rightarrow (A \cap C_X B)^\circ \subseteq C_X (\mathring{B}) \quad (2)$

$(1) + (2) \Rightarrow (A \setminus B)^\circ = (A \cap C_X B)^\circ \subseteq \mathring{A} \cap C_X (\mathring{B}) = \mathring{A} \setminus \mathring{B}$

26.10.23
Salı

ör) $\overline{A}\setminus\overline{B} \subseteq \overline{A\setminus\overline{B}} = \overline{\overline{A}\setminus\overline{B}} \subseteq \overline{A\setminus B}$ olduğunu gösterin

$\longrightarrow (A\setminus B)\cup B = (A\cap C_X B)\cup B = (A\cup B)\cap(\underbrace{B\cup C_X B}_{=X})$

$= (A\cup B)\cap X = A\cup B$

O halde

$A \subseteq (A\setminus B)\cup B$

$\overline{A} \subseteq \overline{(A\setminus B)\cup B} = \overline{A\setminus B}\cup\overline{B}$

• $\overline{A}\setminus\overline{B} = \overline{A}\cap C_X\overline{B} \subseteq \left(\overline{(A\setminus B)}\cup\overline{B}\right)\cap C_X\overline{B}$

$= (\overline{A\setminus B}\cap C_X\overline{B}) \cup (\underbrace{\overline{B}\cap C_X\overline{B}}_{\emptyset})$

$= (\overline{A\setminus B}\cap C_X\overline{B}) \subseteq \overline{A\setminus B}$

$\Rightarrow \overline{A}\setminus\overline{B} \subseteq \overline{A\setminus B}$

$\Rightarrow \overline{\overline{A}\setminus\overline{B}} \subseteq \overline{\overline{A\setminus B}} = \overline{A\setminus B}$ ✓

• $\overline{A\setminus\overline{B}} \subseteq \overline{A\setminus B}$?

$B\subseteq\overline{B} \Rightarrow C_X\overline{B}\subseteq C_X B \Rightarrow A\setminus\overline{B} = A\cap C_X\overline{B} \subseteq A\cap C_X B$

$= A\setminus B \Rightarrow A\setminus\overline{B} \subseteq A\setminus B$

$\Rightarrow \overline{A\setminus\overline{B}} \subseteq \overline{A\setminus B}$ ✓

• $\overline{A}\setminus\overline{B} \subseteq \overline{A\setminus\overline{B}}$?

$A \subseteq A\setminus\overline{B}\cup\overline{B} \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{A\setminus\overline{B}\cup\overline{\overline{B}}} = \overline{A\setminus\overline{B}}\cup\overline{B}$

$\overline{A}\setminus\overline{B} = \overline{A}\cap C_X\overline{B} \subseteq (\overline{A\setminus\overline{B}}\cup\overline{B})\cap C_X\overline{B}$

$= \overline{A\setminus\overline{B}}\cap C_X\overline{B} \subseteq \overline{A\setminus\overline{B}}$

$\Rightarrow \overline{A}\setminus\overline{B} \subseteq \overline{A\setminus\overline{B}}$

$\Rightarrow \overline{\overline{A}\setminus\overline{B}} \subseteq \overline{\overline{A\setminus\overline{B}}} = \overline{A\setminus\overline{B}}$ (1)

$(\bar{A}\setminus\bar{B}) \subseteq (\overline{A\setminus B})$

- $\overline{A\setminus\bar{B}} \subseteq \overline{\bar{A}\setminus\bar{B}}$?

$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow A\setminus\bar{B} = A \cap C_X\bar{B} \subseteq \bar{A}\cap C_X\bar{B}$

$\Rightarrow \bar{A}\setminus\bar{B}$

$\Rightarrow A\setminus\bar{B} \subseteq \bar{A}\setminus\bar{B}$

$\Rightarrow \overline{A\cap\bar{B}} \subseteq \overline{\bar{A}\setminus\bar{B}}$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow \overline{A\setminus\bar{B}} = \overline{\bar{A}\setminus\bar{B}}$ ✓

Soru Eğer G açık ise keyfi A kümesi için $G\cap\bar{A} \subseteq \overline{G\cap A}$ olduğundan gösterin.

$\rightarrow$ $G = \mathring{G}$ ↷ açık küme olduğu için

$G = \mathring{G} = C_X\overline{C_X G}$

$G\cap\bar{A} = C_X\overline{C_X G} \cap \bar{A} = \bar{A}\cap C_X\overline{C_X G}$

$= \bar{A}\setminus\overline{C_X G} \subseteq \overline{A\setminus C_X G}$

$= \overline{A\cap C_X C_X G} = \overline{A\cap G} = \overline{G\cap A}$

Soru a) $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$

b) $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$ olduğunu gösterin

$\rightarrow$ $\mathring{C} \subseteq C \subseteq \bar{C}$

a) $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subseteq \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \subseteq \overline{\overline{\mathring{A}}} = \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \subseteq \overline{\mathring{A}}$ (1)

$\mathring{A} \subseteq \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \mathring{A} = \mathring{\mathring{A}} \subseteq \mathring{\overline{\mathring{A}}} \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subseteq \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ ✓

b) $\mathring{\overline{A}} \subseteq \overline{\mathring{\overline{A}}} \Rightarrow \mathring{\overline{A}} = \mathring{\mathring{\overline{A}}} \subseteq \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \Rightarrow \mathring{\overline{A}} \subseteq \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$ (3)

$\mathring{\overline{A}} \subseteq \overline{A} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{A}}} \subseteq \overline{\overline{A}} = \overline{A} \Rightarrow \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \subseteq \mathring{\overline{A}}$ (4)

(3) + (4) $\Rightarrow \mathring{\overline{A}} = \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$ ✓

Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. Bir $p \in X$ noktasının A kümesinin yığılma noktası olması için g.y.k. $\forall G \in \tau \cap N_p$ için G'nin A'nın p'den farklı bir noktasını içermesidir. A'nın yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir ve A'nın türev kümesi olarak isimlendirilir.

$$p \in A' \iff \forall G \in \tau \cap N_p \text{ için } (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

$p \in A'$

$\Updownarrow$

$\forall G \in \tau \cap N_p$ için $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$

$\Updownarrow$

$\forall G \in \tau \cap N_p$ için $G \cap (A \setminus \{p\}) \neq \emptyset$

$\Updownarrow$

$p \in A \setminus \{p\}$

Ör: $X = \{a,b,c,d,e\}$ üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ topolojisini göz önüne alınsın. $A = \{a,b,c\}$ için $b \in A'$ olur mu?

$\rightarrow \tau \cap N_b = \{X, \{b,c,d,e\}\}$

$(\{b,c,d,e\} \setminus \{b\}) \cap A = \{c\} \neq \emptyset$

$(X \setminus \{b\}) \cap A = \{a,c\} \neq \emptyset$

$\forall G \in \tau \cap \mathcal{N}_b \Rightarrow (G \setminus \{b\}) \cap A \neq \emptyset$ $\quad b \in A'$

$a \in A'$?

$\tau \cap \mathcal{N}_a = \{\{a\}, \{a,c,d\}, X\}$

$(\{a\} \setminus \{a\}) \cap A' = \emptyset \Rightarrow a \notin A'$

<u>Ödev</u> $d, e \in A'$, $c \notin A'$?

Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid 1 \in U\} \cup \{\emptyset\}$

$A = \{1\}$ ise $A' = ?$

$\rightarrow$ $\emptyset$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}$'nin 1'i içeren alt kümeleri açık

$1 \in A' = ?$ $\quad (A = \{1\} \in \tau) \wedge (\{1\} \setminus \{1\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow 1 \notin A'$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ için $x \in A'$?

x'in komşuluklarını içeren açık küme

$\forall (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \wedge (G \in \tau \cap \mathcal{N}_x) \Rightarrow \{1, x\} \subseteq G \Rightarrow$

$\Rightarrow \{1, x\} \setminus \{x\} \subseteq G \setminus \{x\}$

$\emptyset \neq \{1\} \Rightarrow (\{1,x\} \setminus \{x\}) \cap A \subseteq (G \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in A' \Rightarrow \boxed{A' = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$

Önerme: $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

İspat: $p \in A' \Leftrightarrow \forall G \in \tau \cap \mathcal{N}_p$ için

$(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ idi. $p \in A'$ olsun.

$B \supseteq A \Rightarrow (G \setminus \{p\}) \cap B \supseteq (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$

O halde $p \in A' \Rightarrow p \in B'$

Yani $A' \subseteq B'$ gerçeklenir.

Önerme! (X,τ) bir topolojik uzay $A,B\subseteq X$ ise

$(A\cup B)' = A' \cup B'$ gerçeklenir.

İspat! $A \subseteq A\cup B \Rightarrow A' \subseteq (A\cup B)'$

$B \subseteq A\cup B \Rightarrow B' \subseteq (A\cup B)'$

$A'\cup B' \subseteq (A\cup B)' \quad (1)$

$(A\cup B)' \subseteq A'\cup B'$?

Bu ispat için kontrapozisyon kuralını kullandım.

Yani $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

$A\subseteq B \equiv [(\neg(x\in B) \Rightarrow \neg(x\in A)]$

$\equiv [(x\notin B) \Rightarrow x\notin A)]$

$\equiv (C_X B \subseteq C_X A)$

$p\notin A'\cup B' \Rightarrow p\notin (A\cup B)'$?

$p\notin A'\cup B' \Rightarrow \exists G,H \in \tau \cap \mathcal{N}_p :$

$: G\cap A \subseteq \{p\} \;\wedge\; H\cap A \subseteq \{p\}$

$\Rightarrow G\cap H \in \tau \cap \mathcal{N}_p$

$\Rightarrow (G\cap H)\cap(A\cup B) = (G\cap H\cap A)\cup(G\cap H\cap B)$

$\subseteq \{p\}\cup\{p\} = \{p\}$

$\Rightarrow [(G\cap H)\setminus\{p\})\cap(A\cup B) = \emptyset \;\wedge\; p\notin(A\cup B)'$

$(A\cup B)' \subseteq A'\cup B' \quad (2)$

2. yol

$p\in C' \Leftrightarrow p\in \overline{C\setminus\{p\}}$

$p\in(A\cup B)' \Leftrightarrow p\in \overline{\{(A\cup B)\setminus \{p\}}$

$= \overline{(A\setminus\{p\})\cup(B\setminus\{p\})}$

$= \overline{A\setminus\{p\}} \cup \overline{B\setminus\{p\}}$

Önerme: (X,τ) bir topolojik uzay $A \subseteq X$ olsun.

(A kapalıdır) $\Longleftrightarrow$ ($A' \subseteq A$) geçerlidir.

İspat: ($\Rightarrow$) A kapalı ve $p \in \underbrace{C_X A}_{açık}$ olsun.

$C_X A \in \tau$ 'dur.

Bu $p \notin A'$ dır çünkü $p \in C_X A$ ve $C_X A \cap A = \emptyset$

Böylece A kapalı ise $A' \subseteq A$ gerçeklenir.

($\Leftarrow$) $A' \subseteq A$ olsun. $C_X A \in \tau$?

$p \in C_X A \Rightarrow p \notin A' \Rightarrow \exists G_p \in \tau \cap \mathcal{N}_p$:

$: (G_p \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset$

$p \notin A$ olduğundan $G_p \cap A = (G_p \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset$

O halde $G_p \subseteq C_X A$ yani $p \in (C_X A)^\circ$ olur.

Nokta keyfi seçildiğinden bu $C_X A$ kümesinden alınan her nokta için doğrudur. O halde $C_X A = (C_X A)^\circ$ ve A kapalıdır.

→ İleride çözümü var

Ödev: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$: $S' = ?$

26.10.23
Perşembe

Ör: (X,τ) bir topolojik uzay $A, B \subseteq X$, $X = A \cup B$ ise $X = \bar{A} \cup \overset{\circ}{B}$ olduğunu eleman almadan gösterin

→ $X = A \cup B$

$C_X A = C_X A \cap X$
$= C_X A \cap (A \cup B)$
$= \emptyset \cup C_X A \cap B$

$C_X B = C_X B \cap X$
$= C_X B \cap (A \cup B)$
$= \emptyset \cup C_X B \cup A$
→ $= C_X B \cup A \subseteq A$

Benzer şekilde $C_X B \subseteq A$ olur.

$$C_X B \subseteq A \Rightarrow \overline{C_X B} \subseteq \overline{A} \checkmark$$

$$\Rightarrow C_X \overline{A} \subseteq C_X(\overline{C_X B}) = B^\circ$$

$$\Rightarrow C_X \overline{A} \subseteq B^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{A} \cup C_X \overline{A} \subseteq \overline{A} \cup B^\circ$$

$$\Rightarrow X \subseteq \overline{A} \cup B^\circ \subseteq X$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \overline{A} \cup B^\circ}$$

ör (X, τ) topolojik uzay $U \in \tau$ olsun $\quad \underline{U = U^\circ}$

$\overline{X \setminus \overline{X \setminus \overline{U}}} = \overline{U}$ olduğunu gösterin

$$\longrightarrow \overline{X \setminus \overline{X \setminus \overline{U}}} = \overline{\overset{\circ}{\overline{U}}}$$

- $\overset{\circ}{\overline{U}} \subseteq \overline{U} \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} \subseteq \overline{\overline{U}} = \overline{U} \qquad (1)$
- $U \subseteq \overline{U} \Rightarrow U = U^\circ \subseteq \overset{\circ}{\overline{U}}$

$$\Rightarrow U \subseteq \overset{\circ}{\overline{U}} \Rightarrow \overline{U} \subseteq \overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} \qquad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \overline{U} = \overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} \quad \text{olur.}$$

ör $(X \setminus (\overline{X \setminus \overline{A}}) = \emptyset) \Rightarrow A \subseteq \overline{X \setminus \overline{A}}$ olduğunu göster

$$\longrightarrow X \setminus (\overline{X \setminus \overline{A}}) = \emptyset$$

$$\Rightarrow X \setminus (X \setminus (\overline{X \setminus \overline{A}})) = X \setminus \emptyset$$

$$\Rightarrow A \subseteq \underbrace{\overline{X \setminus \overline{A}} = X}$$

?

Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay $A \subseteq X$ olsun bir $x \in A$ noktasının A'nın izole noktası olması için g.y.k $x \in A \setminus A'$ gerçeklenmesidir. A'nın izole noktalarının kümesi $izl(A)$ gösterilir.

$x \in izl(A) \iff \exists G \in \tau \cap \mathcal{N}_x : G \cap A = \{x\}$ olmasıdır

$x \in izl(A) = A \setminus A' \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A')$

$\iff (x \in A) \wedge (x \in A') \Rightarrow \exists G \in \tau \cap \mathcal{N}_x :$

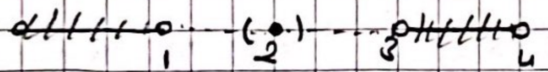
$(G \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$

$\iff (x \in A) \wedge (G \cap A \subseteq \{x\})$

$(x \in A) \wedge (x \in G) \iff G \cap A = \{x\}$

Örn: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'de $A = (0,1) \cup \{2\} \cup (3,4)$ kümesi için 2 izolenmektedir.

$2 \in (2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \in \tau_{st}$ ve $A \cap (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = \{2\}$



Bir $x \in X$ noktasının X'in izole noktası olması için g.y.k $\forall x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesinin açık olmasıdır.

$x \in izl(X) \iff x \in X \setminus X' \iff x \notin X' \iff x \notin \overline{X \setminus \{x\}}$

$\iff x \in X \setminus (\overline{X \setminus \{x\}}) = \{x\}^\circ$

$\iff \{x\} \subseteq \{x\}^\circ \subseteq \{x\}$

$\iff \{x\} = \{x\}^\circ$

O halde nokta uzayın izole elemanı ise her tek nokta kümesi açıktır.

Teorem: (X,τ) bir topolojik uzay $A, B \subseteq X$ olsun.
Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

i) $\text{izl}(\emptyset) = \emptyset$

ii) $\text{izl}(\text{izl}(A)) = \text{izl}(A)$

iii) $\text{izl}(A) \cap \text{izl}(B) \subseteq \text{izl}(A \cap B)$

iv) $\text{izl}(A \cup B) \subseteq \text{izl}(A) \cup \text{izl}(B)$

İspat:

i) Tanımdan açıktır. $\emptyset$ kümenin elemanı yok

ii) $x \in \text{izl}(\text{izl}(A)) \Rightarrow \exists G \in \tau \cap \mathcal{N}_x : G \cap \text{izl}(A) = \{x\}$

$\Rightarrow x \in \text{izl}(A) \Rightarrow \text{izl}(\text{izl}(A)) \subseteq \text{izl}(A)$

$x \in \text{izl}(A) \Rightarrow \exists G \in \tau \cap \mathcal{N}_x : G \cap A = \{x\}$

$\Rightarrow (x \in G) \wedge (\text{izl}(A)) \subseteq A$

$\Rightarrow x \in G \cap \text{izl}(A) \subseteq G \cap A = \{x\}$

$\Rightarrow G \cap \text{izl}(A) = \{x\} \Rightarrow x \in \text{izl}(\text{izl}(A))$

$\Rightarrow \text{izl}(A) \subseteq \text{izl}(\text{izl}(A))$ (2)

$(1) + (2) \Rightarrow \text{izl}(A) = \text{izl}(\text{izl}(A))$

iii) $x \in \text{izl}(A) \cap \text{izl}(B) \Rightarrow (x \in \text{izl}(A)) \wedge (x \in \text{izl}(B))$

$\Rightarrow \exists G, H \in \tau \cap \mathcal{N}_x : (G \cap A = \{x\}) \wedge (H \cap B = \{x\})$

$(x \in G \cap H \in \tau \cap \mathcal{N}_x) \wedge (G \cap H) \cap (A \cap B)$

$= ((G \cap H) \cap A) \cap ((G \cap H) \cap B)$

$= \{x\} \Rightarrow x \in \text{izl}(A \cap B)$

$\text{izl}(A) \cap \text{izl}(B) \subseteq \text{izl}(A \cap B)$

GIPTA

iv) $x \in iel(A \cup B) \Rightarrow \exists G \in \tau \cap \mathcal{N}_x :$

$$G \cap (A \cup B) = ((G \cap A) \cup (G \cap B)) = \{x\}$$

$$\Rightarrow (G \cap A = \{x\}) \vee (G \cap B = \{x\})$$

$$\Rightarrow x \in iel(A) \vee x \in iel(B)$$

$$\Rightarrow x \in iel(A) \cup iel(B)$$

$$\Rightarrow iel(A \cup B) \subseteq iel(A) \cup iel(B)$$

Hatırlatma: (A kapalıdır) $\Leftrightarrow$ ($A' \subseteq A$)

Önerme: Eğer F herhangi bir A kümesinin kapalı üst kümesi ise $A' \subseteq F$ gerçeklenir.

İspat: $A \subseteq F$, F kapalı olsun.

$$A \subseteq F \Rightarrow A' \subseteq F' \subseteq F \Rightarrow A' \subseteq F$$

Önerme: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. $A \cup A'$ kapalı bir kümedir. $\bar{A} = A \cup A'$

İspat: $p \in X \setminus (A \cup A')$ olsun

$p \notin A' \Rightarrow \exists G_p \in \tau \cap \mathcal{N}_p : G \cap A = \emptyset \vee \{p\}$ dur.

Fakat $p \notin A$ olduğundan $G_p \cap A = \emptyset$

Ayrıca $G_p \cap A' = \emptyset$ olur, zira $g \in G_p \setminus \{p\}$ ise $g \in G_p$ ve $G_p \cap A = \emptyset \Rightarrow g \notin A'$ ve sonuçta $G_p \cap A' = \emptyset$

$$G_p \cap (A \cup A') = (G_p \cap A) \cup (G_p \cap A')$$

$$= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \Rightarrow G_p \subseteq C_X(A \cup A')$$

O halde p, $C_X(A \cup A')$'nün iç nokta. Yani $C_X(A \cup A')$ açık. $A \cup A'$ kapalıdır.

GIPTA

Teorem: $\bar{A} = A \cup A'$

İspatı: $A \subseteq A'$ ve $\bar{A}$ kapalı olduğundan $A' \subseteq (\bar{A})' \subseteq \bar{A}$

ve böylece $A \cup A' \subseteq \bar{A}$ (1)

Ayrıca $A \cup A'$, A kümesini kapsayan kapalı bir kümedir.

$$A \subseteq \bar{A} = \bigcap_{K \in \mathcal{C}_A} K \subseteq A \cup A'$$

($\mathcal{C}_A$, A'yı kapsayan kapalı küme ailesidir)

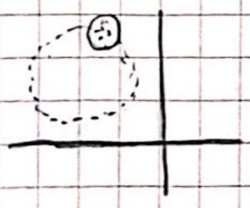
$\bar{A} \subseteq A \cup A$ (2)

(1) ve (2)'den $\bar{A} = A \cup A'$

Sonuç: $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$ çünkü $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

$\Rightarrow \bar{A} = A \cup A' \subseteq B \cup B' = \bar{B}$

Tanım: Bir $x \in X$ noktasının A kümesinin sınır noktası olması için g.y.k. x noktasını içeren her açık kümenin hem A hem de $C_X A$ ile boştan farklı arakesite sahip olmasıdır.



A'nın sınır noktalarının oluşturduğu kümeye A kümesinin sınırı denir ve ∂A ile gösterilir. ($Fr(A)$, $Bd(A)$, $Bdry(A)$

(X, τ) bir topolojik uzay $A \subseteq X$ ise ∂A ne A'nın ne de $C_X A$ kümesinin iç noktaları olmayan noktaların kümesidir. O halde tanımdan

$$\partial A = C_X\left[A^\circ \cup (C_X A)^\circ\right]$$
$$= C_X(C_X A)^\circ \cap C_X A^\circ$$
$$= \overline{A} \cap C_X A^\circ$$
$$= \overline{A} \setminus A^\circ$$
$$= \overline{A} \cap \overline{C_X A}$$

Örn $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ uzayında $A = (0,1) \cup (1,2) \cup \{3\}$

$\partial A = ?$

$\longrightarrow$ $\overline{A} = [0,2] \cup \{3\}$

$\mathring{A} = (0,1) \cup (1,2)$

$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{0,1,2,3\}$

2.11.23
Perşembe

Örn $(A \setminus A^\circ)^\circ = \emptyset$?

$$\longrightarrow (A \setminus A^\circ)^\circ = (A \cap C_X A^\circ)^\circ$$
$$= A^\circ \cap \underbrace{(C_X A^\circ)^\circ}_{\subseteq C_X A^\circ}$$
$$\subseteq A^\circ \cap C_X A^\circ = \emptyset$$

Örn $(\overline{A} \setminus A)^\circ = \emptyset$?

$$\longrightarrow (\overline{A} \setminus A)^\circ = (\overline{A} \cap C_X A)^\circ$$
$$= \mathring{\overline{A}} \cap (C_X A)^\circ$$
$$= \underbrace{\mathring{\overline{A}}}_{\subseteq \overline{A}} \cap (C_X \overline{A})$$
$$\subseteq \overline{A} \cap C_X \overline{A} = \emptyset$$

Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} \mid U^c$ sayılabilir$\}$

$A = \mathbb{Q}$ ve $B = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ için ∂A ve ∂B kümelerini belirleyiniz

→ kapalı kümeler $\emptyset$, $\mathbb{R}$ ve sayılabilir kümeler

$\mathbb{Q}$ sayılabilir o halde $\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}}$ kapanışı kendine eşit

$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$

$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\setminus\emptyset = \mathbb{Q}$

$\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\qquad$ $\partial B = \partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$

$= \mathbb{R}\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$

(Bütünleyeni sonlu için de çöz)

~~Teorem:~~

Ör: $A \subseteq B$ ise $\partial A \subseteq \partial B$ olur mu?

$(\mathbb{R}, \tau_{st})$ de $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}\setminus\emptyset = \mathbb{R}$ → $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$

$\partial\mathbb{R} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$ → $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ama $\mathbb{R} = \partial\mathbb{Q} \not\subseteq \partial\mathbb{R} = \emptyset$

Ör: $(\partial A)^\circ = \emptyset$ olmak zorunda mı?

$(\mathbb{R}, \tau_{st})$ de $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ ve $(\partial\mathbb{Q})^\circ = \mathbb{R} \neq \emptyset$

Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay, $A, B \subseteq X$ olsun

i) $A^\circ = A \setminus \partial A$

ii) $\overline{A} = A \cup \partial A$, $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$

iii) $\partial(A\cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$

5i) $\partial A = \partial(C_X A)$

6i) $A = A^\circ \Rightarrow \partial A = \bar{A} \setminus A$

7i) $\partial A = \emptyset$ için g.y.k $\bar{A} = A = A^\circ$ olmasıdır.

İspat:

1.) $A \setminus \partial A = A \setminus (\bar{A} \setminus A^\circ) = A \cap C_X(\bar{A} \cap C_X A^\circ)$

$$= A \cap (C_X \bar{A} \cup A^\circ) = \underbrace{(A \cap C_X \bar{A})}_{\emptyset} \cup \underbrace{(A \cap A^\circ)}_{A^\circ}$$

$$= \emptyset \cup A^\circ = A^\circ$$

$(A \subseteq \bar{A} \Rightarrow \emptyset \subseteq A \cap C_X \bar{A} \subseteq C_X A \cap A = \emptyset \Rightarrow A \cap C_X \bar{A} = \emptyset$

2.) $A \cup \partial A = A \cup (\bar{A} \setminus A^\circ) = A \cup (\bar{A} \cap C_X A^\circ)$

$$= \underbrace{(A \cup \bar{A})}_{\bar{A}} \cap \underbrace{(A \cup C_X A^\circ)}_{= X}$$

$$= \bar{A} \cap X = \bar{A} \checkmark$$

$(A^\circ \subseteq A \Rightarrow X = A \cup C_X A \subseteq C_X A^\circ \cup A \subseteq X)$

$A^\circ \cup \partial A = A^\circ \cup (\bar{A} \setminus A^\circ)$

$$= A^\circ \cup (\bar{A} \cap C_X A^\circ)$$

$$= (A^\circ \cup \bar{A}) \cap (A^\circ \cup C_X A^\circ) = \bar{A} \cap X = \bar{A} \checkmark$$

3.) $\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \cap \overline{C_X(A \cup B)}$ ↓ De morgan

$$= (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\underbrace{\overline{C_X A \cap C_X B}}_{\subseteq \overline{C_X A} \cap \overline{C_X B}})$$

$$\subseteq (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\overline{C_X A} \cap \overline{C_X B})$$

$$= (\underbrace{\bar{A} \cap \overline{C_X A}}_{\subseteq \bar{A} \cap \overline{C_X A} = \partial A} \cap \overline{C_X B}) \cup (\underbrace{\bar{B} \cap \overline{C_X A} \cap \overline{C_X B}}_{\subseteq \bar{B} \cap \overline{C_X B} = \partial B})$$

$$\subseteq (\bar{A} \cap \overline{C_X A}) \cup (\bar{B} \cap \overline{C_X B}) = \partial A \cap \partial B$$

$\Rightarrow \partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$

4.) $\partial(A\cap B) = \overline{A\cap B} \cap \overline{C_X(A\cap B)} = \overline{A\cap B} \cap \overline{C_X A \cup C_X B}$

$= \overline{A\cap B} \cap (\overline{C_X A} \cup \overline{C_X B})$

$\subseteq (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (\overline{C_X A} \cup \overline{C_X B})$

$= (\bar{A} \cap \overline{C_X A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{B} \cap \overline{C_X B} \cap \bar{A})$

$\subseteq (\bar{A} \cap \overline{C_X A}) \cup (\bar{B} \cap \overline{C_X B}) = \partial A \cup \partial B$

$\Rightarrow \partial(A\cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$

5.) $\partial(C_X A) = \overline{C_X A} \cap \overline{C_X(C_X A)}$

$= \bar{A} \cap \overline{C_X A} = \partial A$

$\partial(A\setminus B) = \partial(A \cap C_X B) \subseteq \partial A \cup \partial(C_X B) = \partial A \cup \partial B$

6) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{C_X A} = \bar{A} \cap C_X A = \bar{A} \setminus A$

7.) $\partial A = \emptyset \iff \bar{A} = A = A^\circ$

$\bar{A} = A = A^\circ \Rightarrow \partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$

$= A \setminus A = \emptyset$

$\partial A = \emptyset \Rightarrow \partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \emptyset$

$\Rightarrow \bar{A} \cap C_X A^\circ = \emptyset$

$\Rightarrow \bar{A} \subseteq C_X C_X A^\circ = A^\circ$

$A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A} \subseteq A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$

$\Rightarrow \bar{A} = A = A^\circ$

Soru $\partial\partial\partial A = \partial\partial A$?

$\rightarrow \partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap \overline{C_X A}$ kapalı

$\partial A = \overline{\partial A}$

- Sınırların kapanışı kapalıdır.

$$\partial\partial A = \overline{\partial A} \cap \overline{C_X \partial A}$$
$$= \partial A \cap \overline{C_X \partial A}$$

$$\partial\partial\partial A = \underbrace{\overline{\partial\partial A}} \cap \underbrace{\overline{C_X \partial\partial A}}$$
$$= \partial\partial A \cap \underline{\overline{C_X(\partial A \cap \overline{C_X \partial A})}}$$
$$= \partial\partial A \cap (C_X \partial A \cup C_X \overline{C_X \partial A})$$
$$= \partial\partial A \cap (\overline{C_X \partial A} \cup \overline{C_X \overline{C_X \partial A}})$$
$$= \partial\partial A \cap (C_X(\partial A)^\circ \cup \overline{(\partial A)^\circ})$$

Bütünleyenin kapanışı içinin bütünleyenine eşit.

$$= \partial\partial A \cap X$$
$$= \partial\partial A \checkmark$$

Alıştırma: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ de $A = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \cup (1,2)$ için $\partial\partial A = \partial A$?

$\overline{A} = [0,2]$ $\qquad\qquad$ $\partial A = [0,2] \setminus (1,2)$

(iç) $A^\circ = (1,2)$ $\qquad\qquad$ $= [0,1] \cup \{2\}$

$\overline{\partial A} = \partial A$ $\qquad$ $(\partial A)^\circ = (0,1)$ $\qquad$ $\neq$ eşit değil

$$\partial\partial A = ([0,1] \cup \{2\}) \setminus (0,1) = \{0, 1, 2\}$$

Tanım: Bir A kümesinin dışı $C_X A$ kümesindeki iç noktaların kümesidir ve $Ext(A)$ ile gösterilir.

Tanımdan $Ext(A) = (C_X A)^\circ$ geçerlidir. $Ext(C_X A) = A^\circ$

Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay $A, B \subseteq X$ olsun.

E1) $Ext(\emptyset) = X$

E2) $Ext(A) \subseteq C_X A$

E3.) $Ext(A) = Ext(C_X Ext(A))$

E4.) $Ext(A \cup B) = Ext A \cap Ext B$

$\longrightarrow$ E1) $Ext(\emptyset) = (C_X \emptyset)^\circ = X^\circ = X$

E2.) $Ext(A) = (C_X A)^\circ \subseteq C_X A$

E3) $Ext(C_X Ext(A)) = (C_X(C_X(C_X A)^\circ))^\circ = ((C_X A)^\circ)^\circ$

$= (C_X A)^\circ = Ext(A)$

E4) $Ext(A \cup B) = (C_X(A \cup B))^\circ$

$= (C_X A \cap C_X B)^\circ = (C_X A)^\circ \cap (C_X B)^\circ$

$= Ext(A) \cap Ext(B)$

Sınav Ör. A kapalıysa $\partial A \cap B \subseteq \partial(A \cap B)$ olur mu?

$\longrightarrow$ $\partial A \cap B = \overline{A} \cap \overline{C_X A} \cap B$

$\overline{A} = A$

$= A \cap B \cap \overline{C_X A}$

$\subseteq \overline{A \cap B} \cap (\overline{C_X A} \cup \overline{C_X B})$

$= \overline{A \cap B} \cap \overline{C_X A \cup C_X B}$

$= \overline{A \cap B} \cap \overline{C_X(A \cap B)}$

$= \partial(A \cap B)$

7.11.23
Salı

Tanım: Bir A kümesinin kendi içinde yoğun olması için g.y.k. $A \subseteq A'$ olmasıdır.

Tanım: Bir A kümesinin mükemmel olması için g.y.k. $A = A'$ olmasıdır.

Teorem: Bir $A(\subseteq X)$ alt kümesinin mükemmel olması için g.y.k kendi içinde yoğun ve kapalı olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: $A = A' \Rightarrow (A \subseteq A') \wedge (A' \subseteq A) \Rightarrow A$ kendi içinde yoğun ve kapalıdır.

$(\Leftarrow)$: A kendi içinde yoğun ve kapalı küme ise $A \subseteq A'$ ve $A' \subseteq A$ geçerlidir, yani $A = A'$ A mükemmeldir.

Tanım: Bir $B(\subseteq X)$ alt kümesinin X'de ya da her yerde yoğun olması için g.y.k $\overline{B} = X$ olmasıdır. $\overline{B} = X$, B X'de yoğun bir B kümesinin A kümesinde her yerde yoğun olması için g.y.k. $A \subseteq \overline{B}$ gerçeklenmesidir.

Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay olsun, aşağıdaki ifadeler denktir.

a) D, X'de yoğundur $(\overline{D} = X)$

b) Eğer G kapalı bir küme ve $D \subseteq G$ ise $G = X$

c) X'de boştan farklı her açık alt küme D'nin en az bir elemanını içerir.

d) $(C_X D)^\circ = \emptyset$

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b) $\overline{D} = X$ olsun. $D \subseteq G$ ve G kapalı ise

$X = \overline{D} \subseteq \overline{G} = G \Rightarrow G \subseteq X \Rightarrow G = X$

(b) $\Rightarrow$ (c) $U \neq \emptyset$ ve açık olsun. $C_X U = X$ geçerli

$U \cap D = \emptyset$ farzedelim. Bu $D \subseteq X \setminus U \neq X$

ve $X \setminus U$ kapalı bu (b) ile çelişir $U \cap D = \emptyset$ varsayımı yanlış.

(c) $\Rightarrow$ (d) $(C_X D)^\circ \neq \emptyset$ farzedelim $(C_X D)^\circ$ açık bir kümedir ve boştan farklı bir V kümesini kapsar

$$V \subseteq (C_X D)^\circ \subseteq C_X D \Rightarrow V \subseteq C_X D$$

$(\emptyset \subseteq) V \cap D \subseteq C_X D \cap D = \emptyset \Rightarrow V \cap D = \emptyset$ elde edilir.

Bu ise (c) ile çelişir. $(C_X D)^\circ \neq \emptyset$ varsayımı yanlıştır.

$$(C_X D)^\circ = \emptyset$$

(d) $(C_X D)^\circ = C_X \overline{C_X (C_X D)}$

$$C_X \overline{D} = \emptyset \Rightarrow \overline{D} = X$$

Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay $A \subseteq X$ olsun $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$ ise A hiç bir yerde yoğun olmayan alt küme olarak isimlendirilir.

Ör: $X \neq \emptyset$ üzerinde $\tau = P(X)$ ayrık topolojisi gözönüne alınsın. Bu topolojide hiç bir yerde yoğun olmayan alt kümelerini belirleyin.

$\rightarrow$ Bu topolojide $\emptyset$'dan farklı her açık küme hem açık hem de kapalı ve $\mathring{\overline{A}} = A$

$$\mathring{\overline{\emptyset}} = \emptyset$$

Sadece $\underline{\emptyset}$ tek bir yerde yoğun olmayan alt küme

Teorem: (X,τ) bir topolojik uzay $A \subseteq X$ olsun. A'nın hiçbir yerde yoğun olmayan alt küme olması için g.y.k. boştan farklı her açık kümenin A ile arakesiti boş küme olan boştan farklı bir açık küme kapsamasıdır.

$$\mathring{\overline{A}} = \emptyset \iff \forall G \in \tau \setminus \{\emptyset\}, \quad \exists U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$$

$$(U \subseteq G) \wedge (A \cap U = \emptyset)$$

İspat: $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$, $G \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ olsun

$G \setminus \overline{A} \subseteq G$ ve $G \setminus \overline{A} \in \tau$ olur.

$G \setminus \overline{A} = \emptyset$ farzedelim. Bu $G \setminus \overline{A} = \emptyset \Rightarrow G \cap C_X \overline{A} = \emptyset$

$\Rightarrow G \subseteq C_X C_X \overline{A} = \overline{A}$

$\Rightarrow G \subseteq \overline{A} \overset{G \in \tau}{\Rightarrow} G = \mathring{G} \subseteq \mathring{\overline{A}} = \emptyset \Rightarrow G = \emptyset$ verir

çelişki $G \setminus \overline{A} \neq \emptyset$

O halde $G \setminus \overline{A}$ G'de kapsanan boştan farklı açık küme

$(G \setminus \overline{A}) \cap A = G \cap (C_X \overline{A}) \cap A = \emptyset$

$(A \subseteq \overline{A} \Rightarrow C_X \overline{A} \subseteq C_X A \Rightarrow \emptyset \subseteq A \cap C_X \overline{A} \subseteq (C_X A) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow C_X \overline{A} \cap A = 0)$

$\forall G \in \tau \setminus \{\emptyset\}, \exists U \in \tau \setminus \{\emptyset\} : (U \subseteq G) \wedge (U \cap A = \emptyset)$

Gerçeklesin $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$?

$\mathring{\overline{A}} \neq \emptyset$ farzedelim $\mathring{\overline{A}} \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ Hipotezden bir

$U (\neq \emptyset)$ açık kümesi $U \subseteq \mathring{\overline{A}}$ ve $U \cap A = \emptyset$ olacak

şekilde vardır. Bu $U \cap \overline{A} = \emptyset \Rightarrow U \cap \mathring{\overline{A}} = \emptyset$ $\rightarrow$

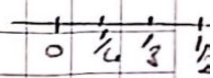
$U \cap \mathring{A} = U \neq \emptyset$ idi çelişki ! $\mathring{A} = \emptyset$

Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bir $C (\subseteq X)$ alt kümesinin birinci katagoriden olması için g.y.k. C'nin X'in hiç bir yerde yoğun olmayan alt kümelerinin sayılabilir bir birleşimi olarak yazılabilmesidir. Eğer bu mümkün değilse C'ye 2. katagoriden denir.

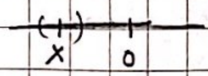
* $X \neq \emptyset$ $(X, P(X))$ için X 1. katagoriden mi?

1. katogori değil 2. katogoridendir.

Ör: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'de $S = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ için $S' = ?$

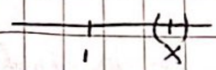


→ • $x \in (-\infty, 0)$



$\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ için $(S \setminus \{x\}) \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \emptyset$ $\quad x \notin S'$

• $x \in (1, \infty)$ yani $x > 1$ ise



$\varepsilon = \frac{|x-1|}{2}$ için $(S \setminus \{x\}) \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \emptyset$ $\quad x \notin S'$

• $x = 1$ için

$\varepsilon = \frac{1}{3}$ olursa $(S \setminus \{x\}) \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \emptyset$ $\quad x \in S'$

$m \neq 1$ için $x = \frac{1}{m} \in S$

$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)$ için $(S \setminus \{1/m\}) \cap \left(\frac{1}{m} - \varepsilon, \frac{1}{m} + \varepsilon\right) = \emptyset$

$\Rightarrow$ $m \neq 1$ için $x = \frac{1}{m} \notin S'$

T_{st} de $\mathbb{Q}$ 1. kategoriden
($\mathbb{Q}$ sayılabilir) $\to$ $\mathring{\overline{\mathbb{Q}}} = \varnothing$ } Tanıma örnek

$(0<x<1) \wedge (x \notin S)$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{ |x - \frac{1}{m}| : m \in \mathbb{N} \}$ olmak üzere

$(S \setminus \{x\}) \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \varnothing$

$x = 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$ için

$0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ve $\exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{m} \in (S \setminus \{0\}) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow (S \setminus \{0\}) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \neq \varnothing$

$\Rightarrow 0 \in S'$ $\qquad S' = \{0\}$

$\Rightarrow \overline{S} = S \cup S' = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$,

Kapanış Operatörü

Tanım: X verilmiş bir küme olsun

$k : P(X) \to P(X)$

fonksiyonu her $C \subseteq X$'e $k(C)$ ile gösterilecek olan bir alt kümeyi karşı getirsin

k fonksiyonunun bir kapanış operatörü olması için gyk aşağıda verilen dört aksiyomun gerçeklenmesidir.

(k1) $\quad k(\varnothing) = \varnothing$

(k2) $\quad \forall C \subseteq X$ için $C \subseteq k(C)$

(k3) $\quad \forall C \subseteq X$ için $k(k(C)) \subseteq k(C)$

(k4) $\quad \forall C_1, C_2 \subseteq X$ için $k(C_1) \cup k(C_2) = k(C_1 \cup C_2)$

Uyarı: Yukarıda verilen aksiyom sistemi Kuratowski kapanış aksiyomları olarak isimlendirilir.

Teorem! k, X üzerinde tanımlı kapanış operatörü ise

$\forall C_1, C_2 \subseteq X$ için $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow k(C_1) \subseteq k(C_2)$

ve $\forall C \subseteq X$ için $k(k(C)) = k(C)$

İspat: $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_2 = C_2 \setminus C_1 \cup C_1$

$k(C_1) = k(C_2 \setminus C_1) \cup k(C_1)$ olduğu açıktır.

$k4$'den $k(C_1) \subseteq k(C_2 \setminus C_1) \cup k(C_1) = k(C_2 \setminus C_1 \cup C_1) = k(C_2)$

$K2$'de C'ye $k(C)$ yazılırsa $k(C) \subseteq k(k(C))$ ve

$k3$'den $k(C) = k(k(C))$ elde edilir.

Teorem: k, X üzerinde tanımlı kapanış operatörü olsun $\mathcal{C} = \{C : k(C) = C\}$ ve $\tau = \{C_x C : k(C) = C\}$ olsun, τ, X üzerinde topolojidir ve $\forall C \subseteq X$ için $k(C) =$ C kümesinin τ topolojisine göre kapanışı $\overline{C}$ kümesine eşittir.

İspat:

$k1$'den $\emptyset \in \mathcal{C}$

$k2$'den $X \subseteq k(X) (\subseteq X)$ $X = k(X) \Rightarrow X \in \mathcal{C}$

$k4$'den $C_1 = k(C_1)$ $C_2 = k(C_2) \xRightarrow{k4'den} k(C_1 \cup C_2) = k(C_1) \cup k(C_2)$

$= C_1 \cup C_2$

$(\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}) \wedge (B = \bigcap_{G \in \mathcal{A}} G)$

B, $\forall G \in \mathcal{A}$ için $B \subseteq G$ gerçekler ve $G = k(G)$ olduğundan

$B \subseteq k(G)$

Teoremden $B \subseteq G \Rightarrow k(B) \subseteq k(G)$ gerçeklenir

$k(B) \subseteq \bigcap_{G \in \mathcal{A}} k(G) = \bigcap_{G \in \mathcal{A}} G = B$

GIPTA

ve K2'den $B \subseteq k(B)$ old.dan $B = k(B)$ olur.

O halde $B \in \mathcal{C}$

$G_1, G_2 \in \tau$

$\Downarrow$

$\exists\, C_1, C_2 \in \mathcal{C} : (G_1 = C_X C_1) \wedge (G_2 = C_X C_2)$

$\Downarrow$

$G_1 \cap G_2 = C_X C_1 \cap C_X C_2$

$= C_X \underbrace{(C_1 \cup C_2)}_{\in \mathcal{C}} \in \tau$

$\mathcal{G} \in \tau \Rightarrow \left(\mathcal{C}_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{C} : \bigcup \mathcal{G} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_{\mathcal{G}}} C_X C = C_X \overbrace{\bigcap_{C \in \mathcal{C}_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{C}} C}^{\in \mathcal{C}} \right) \in \tau$

9.11.23
Perşembe

$\mathcal{C} = \{ C \subseteq X : k(C) = C \}$

$\tau = \{ C_X C : k(C) = C \}$

$A \subseteq X \qquad \overline{A} = k(A)$?

τ'nun X üzerinde belirlediği topolojide kapalı kümeler $\mathcal{C}$'de bulunan kümeler

$k(A) = \overline{A}$?

$\overline{A}$ kümesi $\mathcal{C}$ ailesinde bulunan ve A'yı kapsayan bütün kümelerin arakesitidir

$$\overline{A} = \bigcap_{(A \subseteq) F \in \mathcal{C}} F$$

K.3'den $k(k(A)) = k(A)$

olduğundan $(A \subseteq k(A)) \wedge (k(A) \in \mathcal{C})$ geçerlidir. $\longrightarrow$

O halde $\overline{A} = \bigcap_{A \subseteq F \in \mathcal{C}} F \subseteq k(A) \Rightarrow \overline{A} \subseteq k(A)$ (1)

X'in A'yı kapsayan her kapalı $(F = k(F))$ alt kümesi

için $A \subseteq F \Rightarrow k(A) \subseteq k(F) = F$

$$k(A) \subseteq \bigcap_{A \subseteq F \in \mathcal{C}} F = \overline{A} \Rightarrow k(A) \subseteq \overline{A} \quad (2)$$

$$\overline{A} = k(A)$$

Uyarı: Kuratowski kapanış aksiyomları aracılığıyla yukarıda tanımlanan topoloji k kapanış operatörünün ürettiği topoloji olarak isimlendirilir.

Fonksiyonlar Tarafından Üretilen Topolojiler

Soru

Teorem: $f : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon olsun X kümesi üzerinde τ_X topolojisi verilsin.

$$\tau_Y = \{ V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \tau_X \}$$

ile verilen küme ailesi Y üzerinde bir topolojidir.

İspat: i) $\emptyset \subseteq Y$ ve $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_X$

$Y \subseteq Y$ ve $f^{-1}(Y) = X \in \tau_X$

ii) V_1 ve $V_2 \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2) \in \tau_X$

τ_X topoloji olduğundan $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \in \tau_X$

$f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) \in \tau_X$

$\Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \tau_Y$

iii) $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau_Y$ olsun $\bigcup_{\alpha \in \Delta} V_\alpha \in \tau_Y$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $f^{-1}(V_\alpha) \in \tau_X$

$\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau_X$ ve τ_X topoloji olduğundan $\bigcup_{\alpha \in \Delta} f^{-1}(V_\alpha) \in \tau_X$

(X,τ) $X^* = X \cup \{p\}$ $\tau^* \{ U \cup \{p\} : U \in \tau \} \cup \{\emptyset\}$ ...

(X^*, τ^*)

$\bigcup_{\alpha\in\Delta} f^{-1}(V_\alpha) = f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\Delta} V_\alpha) \in \tau_x \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Delta} V_\alpha \in \tau_y$

τ_y, Y üzerinde bir topolojidir.

Uyarı: Yukarıdaki teoremde $Y \setminus f(X) \neq \emptyset \Rightarrow \forall M \subseteq Y \setminus f(X)$ için $f^{-1}(M) = \emptyset \in \tau_x \Rightarrow M \in \tau_y$

Yine her $M \in Y \setminus f(X)$ için $f^{-1}(Y \setminus M) = X \setminus \overbrace{f^{-1}(M)}^{\emptyset} = X \in \tau_x$

$\Rightarrow Y \setminus M \in \tau_y$

Gerçeklendiğinden M aynı zamanda τ_y'de kapalıdır.

O halde $\forall M \subseteq Y \setminus f(X)$ hem τ_y'de açık hem de kapalıdır.

Bu durumdan kaçınmak için f'e üzerinelik şartı konur.

Uyarı: Yukarıda tanımlanan τ_y topolojisi f fonksiyonu ve (X, τ_x) tarafından Y üzerinde üretilmiş topoloji olarak isimlendirilir.

Teorem: $f: X \to Y$ herhangi bir fonksiyon ve τ_y ise Y üzerinde bir topoloji olsun.

$\tau_x = \{ f^{-1}(U) \subseteq X \mid V \in \tau_y \}$ ile tanımlı aile X üzerinde bir topolojidir.

İspat: i) $\emptyset, Y \in \tau_y$

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X \in \tau_x$

ii) $U_1, U_2 \in \tau_x \Rightarrow \exists V_1, V_2 \in \tau_y : U_1 = f^{-1}(V_1), U_2 = f^{-1}(V_2)$

olur $V_1, V_2 \in \tau_y \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \tau_y \Rightarrow f^{-1}(V_1 \cap V_2) \in \tau_x$ olur

$f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = U_1 \cap U_2 \in \tau_x$

GIPTA

iii) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \subseteq \tau_X \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha \in \tau_X$?

Bu durumda $\forall \alpha\in\Delta$ için $f^{-1}(V_\alpha) = V_\alpha$ olacak şekilde

$V_\alpha \in \tau_Y$ vardır. τ_Y topoloji olduğundan $\bigcup_{\alpha\in\Delta} V_\alpha \in \tau_Y$ 'dir.

Bu durumda $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\Delta} V_\alpha) \in \tau_X$ olur.

$$f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\Delta} V_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Delta} f^{-1}(V_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha \in \tau_X$$

Tanım: $A \subseteq X$ olsun $\forall x\in A$ için $f(x) = x$ ile tanımlı

$f: A \to X$ fonksiyonunun içerme fonksiyonu denir.

Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay, $A\subseteq X$ olsun. A üzerinde

$f: A \to X$ içerme fonksiyonunun ürettiği

$$\tau_A = \{\underbrace{f^{-1}(V)}_{=A\cap V} \subseteq A : V\in\tau\}$$

topolojisi A üzerinde alt uzay topolojisi olarak isimlendirilir.

Teorem: (X,τ) topolojik uzay, $A\subseteq X$ olsun $U(\subseteq A)$ alt kümesinin τ_A alt uzay topolojisine ait olması için g.y.k $U = A\cap V$ gerçekleyen bir $V\in\tau$ bulunabilmesidir.

İspat: $f: A\to X$ içerme fonksiyonu $B\subseteq X$ olsun.

$$f^{-1}(B) = \{x\in A \mid f(x) = x\in B\} = A\cap B$$

$U\subseteq A$ için $U\in\tau_A$ ise τ_A 'nın tanımından

$$\exists V\in\tau : U = f^{-1}(V) = V\cap A \text{ gerçeklenir.}$$

Tersine $U\subseteq A$ ve $U = V\cap A$ gerçekleyen bir $V\in\tau$ var olsun.

Bu durumda $f: A\to X$ içerme fonksiyonu olmak üzere

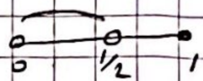
$U = f^{-1}(V)$ $(= V\cap A)$ yazılabilir.

Yani $U\in\tau_A$ geçerlidir.

Örnekler:

a) $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ topolojik uzayında $A=[0,1]$ alt kümesi gözönüne alınsın. $V=(1/2,3)\in\tau_{st}$. $A\cap V=(1/2,1]\in\tau_A$

$K=[0,1/2] = C_A(1/2,1] = A\setminus(1/2,1]$



kümesi alt uzayda kapalıdır.

$(0,1/2)\in\tau \quad A\cap(0,1/2) = (0,1/2)\in\tau_A$ açık

b) $(\mathbb{R},\tau_{st})$'nin $\mathbb{N}$ üzerinde belirlediği alt uzay topolojisi için $\tau_{\mathbb{N}}=P(\mathbb{N})$ $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$(n-1/2,\ n+1/2)\cap\mathbb{N}=\{n\}\in\tau_{\mathbb{N}}$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $\{n\}\in\tau_{\mathbb{N}} \Rightarrow \tau_{\mathbb{N}}=P(\mathbb{N})$

•

Önerme: (X,τ) topolojik uzayı ve A üzerindeki alt uzay topolojisi τ_A olsun. Bir $B(\subseteq A)$ alt kümesinin τ_A kapalı olması için g.y.k τ_X-kapalı bir $D\subseteq X$ için $B=A\cap D$ yazılabilmesidir.

İspat: $B(\subseteq A)$ τ_A-kapalı olsun. Bu durumda bir

$(\Rightarrow)$ $H\in\tau_A$ için $B=A\setminus H$ gerçeklenir. O halde

$\exists G\in\tau : H=A\cap G$ ve buradan

$$\begin{aligned}
B = A\setminus H &= A\setminus(A\cap G)\\
&= A\cap C_X(A\cap G)\\
&= A\cap(C_XA\cup C_XG)\\
&= A\cap \underbrace{C_XG}_{\tau \text{ kapalı}}
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ D, τ kapalı olsun. $B = A \cap D$ gerçeklesin

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap D)$$

$$= A \cap C_X D \in \tau_A$$

$$\Rightarrow B,\ \tau_A\text{-kapalıdır.}$$

14.11.23
Salı

Ör: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'nin $A = [0,1] \cup \{3\}$ üzerinde belirlediği τ_A alt uzay topolojisi için $\{3\} \in \tau_A$?

$\rightarrow (2,4) \in \tau_{st}$ → keyfi seçtik

$A \cap (2,4) = \{3\} \in \tau_A$

Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} \mid 1 \in \mathbb{R}\}$ verilsin $(\mathbb{R}, \tau)$'nun $A = [2,5]$ üzerinde belirlediği τ_A alt uzay topolojisi için $\tau_A = P(A)$?

$\rightarrow \forall x \in A$ için $\{1, x\} \in \tau$ ve $\{1, x\} \cap A = \{x\} \in \tau_A$

$\forall x \in A$ için $\{x\} \in \tau_A \Rightarrow \tau_A = P(A)$

Ör: $X = \{a, b, c\}$ üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$ için $A = \{a, c\}$ üzerinde (X, τ)'nun belirlediği alt uzay topolojisi τ_A'yı belirleyiniz.

$\rightarrow \tau_A = \{A, \emptyset, \{a\}\} = A \cap \tau$

Ör: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'nin $A = [0,1] \cup (2,3)$ üzerinde belirlediği alt uzay topolojisine göre $[0,1]$ ve $(2,3)$ τ_A alt uzayda açık mı?

$\rightarrow (-1,2) \in \tau_{st}$ $\quad A \cap (-1,2) = [0,1] \in \tau_A$

$(2,3) \in \tau_{st}$ $\quad A \cap (2,3) = (2,3)$

Ör, (X,τ) bir topolojik uzay $A,B \subset X$ ve $X = A\cup B$ olsun. M, $A\cap B$ kümesinin hem τ_A - açık hem de τ_B açık alt kümesi ise $M \in \tau$'dur. Gösterin.

$$\rightarrow M \in \tau_A \Rightarrow \exists U \in \tau : M = A\cap U$$
$$M \in \tau_B \Rightarrow \exists V \in \tau : M = B\cap V$$

$$\Rightarrow A\cap U = B\cap V = M$$

$$A\cap U\cap V = B\cap V\cap V = B\cap V = M$$

$$B\cap V\cap U = A\cap U\cap U = A\cap U = M$$

$$M = M\cup M = (A\cap U\cap V)\cup(B\cap U\cap V)$$
$$= \underbrace{(A\cup B)}_{X}\cap(U\cap V)$$
$$= X\cap(U\cap V)$$
$$M = U\cap V \in \tau \Rightarrow M \in \tau$$

- Açıkları kapalı olarak yazarsak M'de kapalı olur farklı te

Önerme: (X,τ) bir topolojik uzay $A\ (\subseteq X)$ üzerinde belirlediği alt uzay topolojisi τ_A ise $S \subseteq A$ için

$$\overline{S}^A = \overline{S}\cap A$$

S'nin alt uzayında kapanışı geçerlidir

İspat: $\overline{S}^A$, τ_A - kapalı olduğundan X'de τ - kapalı H kümesi $\overline{S}^A = A\cap H$ olacak şekilde vardır.

GIPTA

$S \subseteq \overline{S}^A = A \cap H \subseteq H \Rightarrow S \subseteq H \Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{H} = H$

$\Rightarrow \overline{S} \subseteq H \Rightarrow \overline{S} \cap A \subseteq H \cap A$

$= \overline{S}^A \Rightarrow \overline{S} \cap A \subseteq \overline{S}^A \quad (1)$

$\overline{S} \cap A$, alt uzayda S'yi kapsayan kapalı bir kümedir

O halde $\overline{S}^A \subseteq \overline{S} \cap A \quad (2)$

(1) + (2) 'den $\boxed{\overline{S}^A = \overline{S} \cap A}$

Önerme: (X, τ) bir topolojik uzay, τ_A bu topolojinin $A (\subseteq X)$ üzerinde belirlediği alt uzay topolojisi olsun $S \subseteq A$ olmak üzere $int_A(S)$, $Ext_A(S)$ $\partial_A(S)$ ve $(S)'^A$ için aşağıdakiler geçerlidir.

a.) $A \cap S^\circ \subseteq int_A(S)$

b.) $Ext_A(S) = A \cap Ext(S)$

c.) $\partial_A(S) \subseteq A \cap \partial S$

d.) $(S)'^A = A \cap S'$

İspat: a.) $x \in A \cap S^\circ \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in S^\circ)$

$\Rightarrow (x \in A) \wedge (\exists U \in \tau : x \in U \subseteq S)$

$\Rightarrow x \in \underbrace{U \cap A}_{\in \tau_A} \subseteq S$

$\Rightarrow x \in int_A(S)$

$A \cap S^\circ \subseteq int_A(S)$

b.) $A \setminus int_A(A \setminus S) = A \setminus Ext_A(S) = \overline{S}^A = \overline{S} \cap A$

$= (X \setminus Ext\, S) \cap A$

$= A \setminus (Ext(S) \cap A)$

$= A \cap [X \setminus Ext(S) \cup (X \setminus A)]$

$\Rightarrow Ext_A(S) = A \cap Ext(S)$

c.) $A \setminus (A \cap \partial S) \subseteq A \setminus \partial_A(S)$?

$A \setminus \partial_A(S) = int_A(S) \cup int_A(A \setminus S)$

$= int_A(S) \cup Ext_A(S)$

$\supseteq (A \cap \mathring{S}) \cup (A \cap Ext(S))$

$= A \cap (\mathring{S} \cup Ext(S))$

$= A \cap (X \setminus \partial S)$

$A \setminus (A \setminus \partial_A S)$

$= A \setminus (A \cap \partial S) \subseteq A \setminus \partial_A S$

$\Rightarrow \partial_A S = A \setminus (int_A(S) \cup Ext_A(S))$

$\subseteq A \setminus (A \setminus (A \cap \partial S))$

$= A \cap \partial S$

Ör. $\tau = \{\mathbb{R}\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} : U \cap [0,1] = \emptyset\}$ olsun

$A = [-1,1]$ için $\partial A = ?$ Benzer Sorular

→ kapalı kümeler $\emptyset, \mathbb{R}, [0,1]$; kapsayan kümeler

$\bar{A} = A$

$\mathring{A} = [-1,0)$

$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = [-1,1] \setminus [-1,0)$

$= [0,1]$

d.) $x \in (S)'^A$, $G \in \tau \cap \mathcal{N}_x \Rightarrow x \in G \cap A \in \tau_A$ ve

$\emptyset \neq (G \cap A) \cap (S \setminus \{x\}) \subseteq G \cap (S \setminus \{x\}) \Rightarrow G \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

$x \in S' \cap A$

$= (S)'^A \subseteq S' \cap A$ (1)

Tersine $x \in S' \cap A$ olsun x'i içeren $H \in \tau_A$ gözönüne alınsın

Bu durumda $\exists U \in \tau : H = U \cap A$ gerçeklenir

Hipotezden $U \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

$$S \subseteq A \Rightarrow U \cap (S \setminus \{x\}) \cap A = U \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow H \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow x \in (S)'^{A}$$

Örn (X, τ) bir topolojik uzay $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun

A üzerindeki alt uzay topolojisi τ_A için

$$\underbrace{\tau_A = P(A)}_{\text{Her tek nokta kümesi açık demek}} \iff A' \subseteq C_X A$$

$(\Rightarrow)$ $x \in A \Rightarrow \exists U \in \tau : U \cap A = \{x\}$

$$\Rightarrow U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \quad \text{ve} \quad x \notin A'$$

$$\Rightarrow A \cap A' = \emptyset \quad \Rightarrow A' \subseteq C_X A$$

$(\Leftarrow)$ $x \in A$ olsun Hipotezden

$$x \notin A' \text{ ve } \exists U \in \tau : (x \in U) \wedge U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$$

$$(U \cap A) \cap C_X\{x\} = \emptyset \Rightarrow U \cap A \subseteq C_X C_X\{x\} = \{x\}$$

$$= \{x\} \subseteq U \cap A = \{x\}$$

$$= U \cap A = \{x\} \in \tau_A$$

$$\Rightarrow \tau_A = P(A)$$

Ör $Z \subseteq Y \subseteq X$ ve (X,τ) topolojik uzay ise

$$\tau_{Y_Z} = \tau_Z$$

geçerlidir. Gösterin.

$\rightarrow$ • $A \in \tau_{Y_Z} \Rightarrow \exists U \in \tau_Y : A = Z \cap U$

$U \in \tau_Y \Rightarrow \exists V \in \tau : U = Y \cap V$

$\Rightarrow A = Z \cap U = \overbrace{Z \cap Y}^{Z} \cap V = Z \cap V$

$\Rightarrow A \in \tau_Z$

$\Rightarrow \tau_{Y_Z} \subseteq \tau_Z \quad (1)$

• $A \in \tau_Z$ olsun $\Rightarrow \exists W \in \tau : A = Z \cap W$

$Y \cap W \in \tau_Y \Rightarrow Z \cap (Y \cap W) \in \tau_{Y_Z}$

$\Rightarrow Z \cap (Y \cap W) = Z \cap W = A \in \tau_{Y_Z}$

$\Rightarrow \tau_Z \subseteq \tau_{Y_Z} \quad (2)$

$(1) + (2) \Rightarrow \boxed{\tau_{Y_Z} = \tau_Z}$

Ör $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} : U \text{ sonsuz}\}$ ailesi verilsin. $(\mathbb{R}, \tau)$ topolojik uzay mı?

$\rightarrow \mathbb{R} \in \tau$

$U = (-\infty, -1) \cup \{0\} \in \tau$

$V = \{0\} \cup (1, \infty) \in \tau$

$\Rightarrow U \cap V = \{0\} \notin \tau$ ⌒ kesişimler sonlu oldu

Ör. (X,τ) topolojik uzay $p \notin X$, $X^* = X \cup \{p\}$ olmak üzere

$\tau^* = \{U \cup \{p\} : U \in \tau\} \cup \{\emptyset\}$

$\rightarrow$ i) $\emptyset \in \tau^*$

$X \in \tau \Rightarrow X \cup \{p\} = X^* \in \tau^*$

ii) $\forall \alpha \in \Delta$ için $U_\alpha^* \in \tau^*$ olmak üzere

$\{U_\alpha\}^*_{\alpha\in\Delta} \subseteq \tau^*$ ise $\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha^* \in \tau^*$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $U_\alpha^* = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha^* = \emptyset \in \tau^*$

Aksi durumda $\exists \alpha_0 \in \Delta$: $U_{\alpha_0}^* \neq \emptyset$, $U_\alpha^* \neq \emptyset$ gerçekleyen

her $\alpha \in \Delta' (\subseteq \Delta)$ için $\exists U_\alpha \in \tau$: $U_\alpha^* = U_\alpha \cup \{p\}$

$$\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha^* = \bigcup_{\alpha\in\Delta'} U_\alpha^* = \bigcup_{\alpha\in\Delta'} (U_\alpha \cup \{p\}) = \underbrace{\Big(\underbrace{\bigcup_{\alpha\in\Delta'} U_\alpha}_{\in\tau}\Big)}_{\in\tau} \cup \{p\} \in \tau^*$$

iii) $U_1^*, U_2^* \in \tau^* \Rightarrow U_1^* \cap U_2^* \in \tau^*$?

$\forall i \in \{1,2\}$ için $U_i^* \neq \emptyset \Rightarrow \exists U_1, U_2 \in \tau$: $U_1^* = U_1 \cup \{p\}$ ve

$U_2^* = U_2 \cup \{p\}$

$$U_1^* \cap U_2^* = (U_1 \cup \{p\}) \cap (U_2 \cup \{p\}) = [(U_1 \cup \{p\}) \cap U_2] \cup [(U_1 \cup \{p\}) \cap \{p\}]$$
$$= (U_1 \cap U_2) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{p\}$$
$$= \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\in\tau} \cup \{p\} \in \tau^*$$

Aksi durumda $\exists i_0 \in \{1,2\}$: $U_{i_0}^* = \emptyset \Rightarrow U_1^* \cap U_2^* = \emptyset \in \tau^*$

Ör) $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ topolojik uzayından hareketle

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \exists V \in \tau_{st} : U \cap \mathbb{Q} = V \cap \mathbb{Q}\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde topoloji mi?

→ i) $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ ve $\emptyset \in \tau_{st}$ $\quad \emptyset \cap \mathbb{Q} = \emptyset \cap \mathbb{Q} = \emptyset$

$\Rightarrow \emptyset \in \tau$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \in \tau_{st}$ $\quad \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \in \tau$

ii) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau$?

$\forall \alpha \in \Delta$ için $\exists V_\alpha \in \tau_{st} : U_\alpha \cap \mathbb{Q} = V_\alpha \cap \mathbb{Q}$

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha\right) \cap \mathbb{Q} = \bigcup_{\alpha \in \Delta} (U_\alpha \cap \mathbb{Q}) = \bigcup_{\alpha \in \Delta} (V_\alpha \cap \mathbb{Q}) = \Big(\underbrace{\bigcup_{\alpha \in \Delta} V_\alpha}_{\in \tau_{st}}\Big) \cap \mathbb{Q}$$

$$= \bigcup_{\alpha \in \Delta} V_\alpha \in \tau$$

iii) $\{U_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau$?

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $\exists V_i \in \tau_{st} : U_i \cap \mathbb{Q} = V_i \cap \mathbb{Q}$ gerçeklenir

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap \mathbb{Q}) = \bigcap_{i=1}^{n} (V_i \cap \mathbb{Q}) = \Big(\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} V_i}_{\in \tau_{st}}\Big) \cap \mathbb{Q}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau$$

Soru Ör) (X, τ) topolojik uzay, $A \subset X$ olsun $\alpha A = \mathring{\overline{A}}$ tanımlansın. Aşağıdakileri gösterin

1.) $A \subseteq B \Rightarrow \alpha A \subseteq \alpha B$

2.) $A \in \tau \Rightarrow A \subset \alpha A$

3.) $\forall A \subseteq X$ için $\alpha \alpha A = \alpha A$ $\qquad \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$ gösterdik daha önce

4.) $(A \cap B = \emptyset) \wedge (A, B \in \tau) \Rightarrow \alpha A \cap \alpha B = \emptyset$

$\rightarrow$ 1.) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$ $\quad \alpha A = \mathring{\bar{A}} \subseteq \mathring{\bar{B}} = \alpha B$

2.) $A \in \tau \Rightarrow A \subseteq \bar{A} \Rightarrow A = \mathring{A} \subseteq \mathring{\bar{A}} = \alpha A$

4.) $(A \cap B = \emptyset) \wedge (A, B \in \tau)$ olsun.

$\alpha A \cap \alpha B \neq \emptyset$ farzedelim $\exists t \in \alpha A \cap \alpha B$

$\Rightarrow t \in \alpha A = \mathring{\bar{A}} \subseteq \bar{A}$ geçerli olduğundan $\forall G \in \tau \cap \mathcal{N}_t$

için $A \cap G \neq \emptyset$ gerçeklenir.

Dolayısıyla $\alpha B \cap A \neq \emptyset$ $(\alpha B \in \tau \cap \mathcal{N}_t)$

$w \in \alpha B \cap A^{\in \tau}$ olsun $w \in \alpha B = \mathring{\bar{B}} \subseteq \bar{B}$

O halde $\forall U \in \tau \cap \mathcal{N}_w$ için $U \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ çelişki elde edilir

Tanım: (X, τ) topolojik uzay $A \subseteq X$ ve $A = \alpha A = \mathring{\bar{A}}$ ise

A düzgün açık küme ya da regüler açık küme

olarak isimlendirilir.

Ör: Sonlu sayıda regüler açık kümenin arakesiti regüler açıktır

gösteriniz.

- $A = (0, 1/2)$, $B = (1/2, 1)$ regüler açıktır ama $A \cup B$ regüler açık değildir.

$\rightarrow \{U_i\}_{i=1}^{n}$ regüler açık küme ailesi gözönüne alınsın

$\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ açıktır

Önceki sorunun 2. şıkkında $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq \alpha\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right)$ (1)

$\forall j \in \{1, \dots, n\}$ için $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq U_j \Rightarrow \alpha\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \subseteq \alpha U_j$

$\forall j \in \{1, \dots, n\}$ için $\alpha U_j = U_j$ olduğundan $\alpha\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} U_j = \bigcap U$

(1) + (2) 'den $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ regüler açıktır.

$(\mathbb{R}, \tau_{st})$ de $\overline{A} = [0, 1/2] \Rightarrow \alpha A = \mathring{\overline{A}} = (0, 1/2) = A$

$\alpha B = (1/2, 1) = B$

$\alpha(A \cup B) = (0,1) \neq A \cup B$

$A \cup B$ regüler açık değil

★ **Örn** $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ de $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup (1,2)$ için $\partial A = ?$

$\overline{A} = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup [1,2]$

$\mathring{A} = (1,2)$

$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{0, 2\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$

★ **Örn** Yukarıda verilen kümenin sol ışın topolojisindeki sınırı?

→ $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}, \emptyset, [a, \infty)$ kapalı kümeler

$$\left.\begin{aligned} \overline{A} &= [0, \infty) \\ \mathring{A} &= \emptyset \end{aligned}\right\} \quad \partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = [0,\infty) \setminus \emptyset = [0, \infty)$$

Sağ ışın için çözün

$\emptyset, \mathbb{R}, (a, \infty)$ açık

$\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, a]$ kapalı

$$\left.\begin{aligned} \overline{A} &= (-\infty, 2] \\ \mathring{A} &= \emptyset \end{aligned}\right\} \quad \partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = (-\infty, 2]$$

30.11.23
Perşembe

Taban Kavramı

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. τ'nun $\mathcal{B}$ tabanı X'in alt kümelerinin aşağıdaki iki koşulu gerçekleyen bir topolojidir.

a.) $\mathcal{B} \subseteq \tau$, yani $\mathcal{B}$'nin her elemanı τ'nun da elemanıdır.

b.) $\forall u \in \tau \setminus \{\emptyset\}$, $\exists \mathcal{B}_u \subseteq \mathcal{B}$: $u = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_u} B$ geçerlidir.

Uyarı! $\mathcal{B}$'nin her elemanı τ'nun elemanı old. $\mathcal{B}$ açık kümelerden oluşur. Bu sebeple $\mathcal{B}$'nin elemanları temel açık kümeler olarak da isimlendirilir.

Uyarı: Yukarıdaki tanımdan verilen (a) koşulu ve τ'nun her alt ailesinin yine τ'da kalması göz önüne alınırsa (b) koşulu aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

(b') $\emptyset \neq u \subseteq X$ ise $u \in \tau \iff \exists \mathcal{B}_u \subseteq \mathcal{B}$: $u = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_u} B$ geç.

Sonuçta τ'nun $\mathcal{B}$ tabanı, τ topolojisini tamamen belirler. Üstelik herhangi bir topoloji kendisi için bir tabandır. O halde her topoloji en az bir tabana sahiptir.

* Topolojinin tabanı topoloji olmak zorunda değildir.

Örnekler:

a) $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ standart topolojisi göz önüne alınsın $\mathcal{B} = \{(a,b) : a, b$ ... $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ için tabandır.

$\mathcal{B}^* = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$'da τ_{st} için tabandır.

GIPTA

b.) $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ olsun

τ topolojisinin kendinden farklı tabanları

$\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$

$\mathcal{B}_2 = \{\{b\}, \{a\}, X\}$

Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{B}$ ise τ'nun bir tabanı olsun. Bir $\emptyset \neq U (\subseteq X)$ alt kümesi için

$(U \in \tau \iff \forall x \in U, \exists \mathcal{B}_x \in \mathcal{B} : x \in \mathcal{B}_x \subseteq U\}$ gerçeklenir.

İspat: $(\Rightarrow)$: $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ ise $\exists \mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B} : U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B$

gerçeklenir. $\forall x \in U$ için $x \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B$ olduğundan

$\exists \mathcal{B}_x \in \mathcal{B}_U (\subseteq \mathcal{B}) : x \in \mathcal{B}_x \subseteq U$ gerçeklenir. Koşul gerçeklenir.

$(\Leftarrow)$: $\emptyset \neq U \subseteq X$, $\forall x \in U$ için $\exists \mathcal{B}_x \in \mathcal{B} (\subseteq U) : x \in \mathcal{B}_x \subseteq$

gerçekleniyorsa $\mathcal{B}_x \in \tau$ olduğundan $x \in U^{\circ}$ olur. Bu da

$U \subseteq U^{\circ} (\subseteq U)$ yani $U = U^{\circ}$ ve $U \in \tau$ demektir.

Teorem: Bir $\mathcal{B} (\subseteq \tau)$ ailesinin τ'nun tabanı olması için

g.y.k $\emptyset \neq U \in \tau$ gerçekleyen her U ve $\forall x \in U$ için

$x \in \mathcal{B}_x \subseteq U$ o.ş. bir $\mathcal{B}_x \in \mathcal{B}$'nin bulunmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: $\mathcal{B}$ taban olsun. $\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ için

$\exists \mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B} : U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B$ gerçeklenir. $\forall x \in U$ için $\exists \mathcal{B}_x \in \mathcal{B}_U$:

$: x \in \mathcal{B}_x \subseteq U$

$(\Leftarrow)$: Tersine $\forall U \in \tau$ ve $\forall x \in U$ için $x \in \mathcal{B}_x \subseteq U$ o.ş.

$\mathcal{B}_x \in \mathcal{B}$ bulunabilsin.

$\longrightarrow$

GIPTA

$\mathcal{B} \subseteq \tau$ verilmiş. $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ olsun $\forall x \in U$ için

$\exists \mathcal{B}_x \in \mathcal{B}$: $x \in \mathcal{B}_x \subseteq U$ gerçeklenir.

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} \mathcal{B}_x \subseteq U$$

$$\Rightarrow \exists \{\mathcal{B}_x : x \in U\} \subseteq \mathcal{B} : \bigcup_{x \in U} \mathcal{B}_x = U$$

5.12.23
Salı

Sonuç: $\mathcal{B} \subseteq \tau$'nun bir taban olabilmesi için g.y.k $\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ ve $\forall x \in U$ için $\exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq U$ gerçeklenmesidir.

İspat: $(\Rightarrow)$: $\mathcal{B}$ taban olsun $U \in \tau \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow (\exists \mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$: $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B) \wedge (x \in U) \Rightarrow \exists B_x \in \mathcal{B}_U : x \in B_x \subseteq U$

$(\Leftarrow)$: $\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ ve $\forall x \in U$ için $x \in B_x \subseteq U$ gerçekleyen $B_x \in \mathcal{B}$ var olsun

$\mathcal{B} \subseteq \tau$ verilsin. $U \in \tau \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow \forall x \in U$, $x \in B_x \subseteq U$ gerçekleyen $B_x \in \mathcal{B}$ var olsun.

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} B_x \subseteq U \Rightarrow \exists \{B_x : x \in U\} \subseteq \mathcal{B}$$

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x$$

Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{B}$ de τ'nun bir tabanı olsun. $A \subseteq X$ için $\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ ailesi A üzerinde τ_A alt uzay topolojisi için bir tabandır.

İspat: 1) $\mathcal{B}_A \subseteq \tau_A$?

$G \in \mathcal{B}_A$ olsun $\mathcal{B}_A$'nın tanımından $\exists B \in \mathcal{B} : G = B \cap A$ gerçeklenir.

$\mathcal{B} \in \mathcal{B} \subseteq \tau \Rightarrow \mathcal{B} \in \tau$

$G = \underset{\in \tau}{B} \cap A \in \tau_A \Rightarrow \mathcal{B}_A \subseteq \tau_A$

ii) $H \in \tau_A$ olsun. H, $\mathcal{B}_A$'nın bir alt ailesinin birleşimi olarak yazılabilir mi?

$H \in \tau_A \Rightarrow \exists\, u \in \tau : H = A \cap U$

ve $\mathcal{B}$, τ için taban olduğundan $\exists\, \mathcal{B}_u \subseteq \mathcal{B} : U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_u} B$ geçerlidir.

$H = A \cap U = A \cap \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_u} B\right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_u} \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{B}_A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_u} \mathcal{B}_A$

$\Rightarrow \underline{\{A \cap B : B \in \mathcal{B}_u\}} \subseteq \mathcal{B}_A$ için

$H = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_u} (A \cap B)$

Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{R} : 1 \in U\}$ verilsin.

$A = [2,5]$ için $\tau_A = P(A)$?

$\rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ için $\mathcal{B} = \{\{1\} \cup \{\{1, x\} : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}\}$

$\forall x \in A$ için $\{1, x\} \in \mathcal{B} \subseteq \tau$

$\{x\} = \{1, x\} \cap A \in \mathcal{B}_A \Rightarrow \tau_A = P(A)$

Teorem: $\mathcal{B}$, boştan farklı bir X kümesinin bazı alt kümelerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{B}$'nin X üzerindeki bir topolojinin tabanı olması için g.y.k aşağıdaki iki şartın gerçeklenmesidir.

i) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

ii) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $p \in B_1 \cap B_2$ ise $\exists\, B_p \in \mathcal{B} : p \in B_p \subseteq B_1 \cap B_2$ gerçeklenir.

İspat: $\mathcal{B}$, X üzerinde bir topolojinin tabanı olsun

X bu topolojide açık olduğundan $\mathcal{B}$'nin uygun bir alt

ailesinin birleşimi olarak yazılabilir.

Yani $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ 'dir (i) gerçeklenir

$B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \tau \Rightarrow B_1, B_2 \in \tau$ ve $B_1 \cap B_2 \in \tau$

$\mathcal{B}$ taban olduğundan her açık küme tabanın uygun

bir alt ailesinin birleşimine eşittir.

$\exists \mathcal{B}_{B_1 \cap B_2} \subseteq \mathcal{B} : B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{B_1 \cap B_2}} B$ ise

$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{B_1 \cap B_2}} B$ ve $p \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_p \in \mathcal{B}_{B_1 \cap B_2}$

$p \in B_p \subseteq B_1 \cap B_2$ (ii) gerçeklendi

Tersine $\mathcal{B}$, (i) ve (ii) koşullarını gerçekleyen bir küme ailesi

olsun τ ise, $\mathcal{B}$'nin elemanlarının mümkün bütün birleşimlerinin

ailesi olsun. τ, X üzerinde topolojidir? (i) koşulundan

$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \Rightarrow X \in \tau$

$\emptyset$, $\mathcal{B}$ ailesinin boş alt ailesinin birleşimi olarak gözönüne

alınabilir. $\emptyset = \bigcup_{B \in \emptyset \subseteq \mathcal{B}} B \Rightarrow \emptyset \in \tau$

$\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \tau \Rightarrow \forall \alpha \in \Delta$ için $\exists \mathcal{B}_{G_\alpha} \subseteq \mathcal{B} : G_\alpha = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{G_\alpha}} B$

geçerlidir.

$\bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Delta} \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{G_\alpha}} B \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \in \tau$

$G, H \in \tau \Rightarrow \exists \mathcal{B}_G, \mathcal{B}_H \subseteq \mathcal{B} : G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_G} B$, $H = \bigcup_{\tilde{B} \in \mathcal{B}_H} \tilde{B} \Rightarrow$

$G \cap H = \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_G} B\right) \cap \left(\bigcup_{\tilde{B} \in \mathcal{B}_H} \tilde{B}\right) = \bigcup_{(B \in \mathcal{B}_G)(\tilde{B} \in \mathcal{B}_H)} (B \cap \tilde{B})$

GIPTA

(ii) koşulunda $B \cap \tilde{B}$, $\mathcal{B}$ ailesinin bir $\mathcal{B}_{B\cap\tilde{B}} (\subseteq \mathcal{B})$ alt ailesinin birleşimi olarak yazılabilir.

$$B \cap \tilde{B} = \bigcup_{B^* \in \mathcal{B}_{B\cap\tilde{B}}} B^*$$ ve sonuçta

$$G \cap H = \bigcup_{(B \in \mathcal{B}_G) \wedge (\tilde{B} \in \mathcal{B}_H)} \left(\bigcup_{B^* \in \mathcal{B}_{B\cap\tilde{B}}} B^* \right) \Rightarrow G \cap H \in \tau$$

Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde açık-kapalı aralıkların ailesi

$\mathcal{B} = \{ (a,b] : a,b \in \mathbb{R},\ a<b \}$ bir topoloji için tabandır.

(i) $$\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\} \subseteq \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \underbrace{(x-1, x]}_{\in \mathcal{B}} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} (x-1, x]$$

(ii) $(a,b], (c,d] \in \mathcal{B}$ olsun. $(a,b] \cap (c,d]$ ya $= \emptyset$ ya da $(\max\{a,c\}, \min\{b,d\}] \in \mathcal{B}$

O halde $\mathcal{B}$ ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji için taban oluşturur. Bu topolojide $\mathbb{R}$ üzerinde üst limit topolojisi olarak isimlendirilir.

Not: $\mathbb{R}$ üzerinde kapalı-açık aralıkların ailesi $\mathcal{B}^* = \{ [a,b) : a,b \in \mathbb{R} \}$, $\mathbb{R}$ üzerinde alt limit topolojisi için taban oluşturur.

Ör: (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ise $\mathcal{B} = \{ G\times H : G\in\tau \wedge H\in\sigma \}$, $X\times Y$ üzerinde tabandır?

→ i) $X \in \tau$, $Y \in \sigma$ ⟹ $X \times Y \in \mathcal{B}$

ii) $G_1, G_2 \in \tau$, $H_1, H_2 \in \sigma$ için $G_1 \times H_1$, $G_2 \times H_2 \in \mathcal{B}$

$$(G_1 \times H_1) \cap (G_2 \times H_2) = \underset{\in \tau}{(G_1 \cap G_2)} \times \underset{\in \sigma}{(H_1 \cap H_2)} \in \mathcal{B}$$

iki koşulda gerçeklendi tabandır.

Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde $K = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ ve $\mathcal{B}_K = \{ U : U = (a,b)$ veya $U = (a,b) \setminus K \}$ ailesi verilsin. $\mathcal{B}_K$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji için taban mıdır?

→ $\mathcal{B}_K$, $\mathbb{R}$'deki açık aralıklardan ve $\mathbb{R}$'nin K kümesi çıkarılmış açık aralıkların topluluğundan oluşur. Bazı aralıklar içinde $(a,b) \setminus K = (a,b)$

i) $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x-1, x+1) \subseteq \mathbb{R}$ ⟹ $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \underbrace{(x-1, x+1)}_{\in \mathcal{B}_K} = \mathbb{R}$

ii) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_K$ olsun $x \in B_1 \cap B_2$ tercih edelim

$B_3 \in \mathcal{B}_K$, $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ gerçeklenmek üzere var mı

B_1 ve B_2 $(a,b) \setminus K$ formunda değilse ikisi de açık aralıkta olur. $B_1 = (a,b)$ ve $B_2 = (c,d)$ olsun. Bu durumda $p = \max\{a,c\}$, $q = \min\{b,d\}$ için $x \in (p,q) \subseteq B_1 \cap B_2$ elde edilir.

Eğer $B_1 = (a,b) \setminus K$ $B_2 = (c,d)$ ise $x \in (a,b) \cap (c,d) \setminus K$ olur. p ve q önceki gibi seçilerek $x \in (p,q) \setminus K \subseteq B_1 \cap B_2$ elde edilir.

GIPTA

$B_1 = (a,b)\setminus K$, $B_2 = (c,d)\setminus K$ ise benzer şekilde

$B_3 \in \mathcal{B}_K$ elde edilir.

İki koşul gerçeklendi tabandır.

7.12.23
Perşembe

Önerme: $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}^*$ aileleri aynı X kümesi üzerinde τ ve τ^*'ın tabanı olsun ($\mathcal{B}$, τ'nun $\mathcal{B}^*$, τ^*'ın tabanı) $\forall B \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$'ın uygun bir alt ailesinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa τ, τ^*'dan daha $\boxed{\text{kabadır}}$ yani $\tau \subseteq \tau^*$ geçerlidir.

İspat: $G \in \tau$ olsun $\exists \mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B} : G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_G} B$ yazılabilir.
Hipotezden her $B \in \mathcal{B}$ için $\mathcal{B}^*_B \subseteq \mathcal{B}^* : B = \bigcup_{B^* \in \mathcal{B}^*_B} B^*$ geçerlidir.

$$G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_G} B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_G} \bigcup_{B^* \in \mathcal{B}^*_B} B^* \Rightarrow G \in \tau^* \Rightarrow \tau \subseteq \tau^*$$

Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde standart topoloji τ_{st}, $\mathbb{R}$ üzerinde üst limit topolojisi $\tau_{(\,]}$'dan daha kabadır?

$\rightarrow$ $\mathcal{B} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ τ_{st} için tabandır.
$\tau_{(\,]}$ üst limit topolojisinin $\mathcal{B}^* = \{(c,d] : c,d \in \mathbb{R}\}$ tabanın bir alt ailesi aracılığıyla (a,b) ($\in \mathcal{B} \subset \tau_{st}$) yazılabilir mi?

$$(a,b) = \bigcup \left\{ \left(a, b - \frac{b-a}{2^n}\right] : n \in \mathbb{N} \right\}$$

? Neden böyle seçtik

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left(a, b - \frac{b-a}{2^n}\right] \subseteq (a,b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(a, b - \frac{b-a}{2^n}\right] \subseteq (a,b)$$

$x \in (a,b) = \{x : a < x < b\} \Rightarrow$

$a \quad x \quad b$

$\Rightarrow (b-a>0) \wedge (\exists \varepsilon > 0 : a < x < x+\varepsilon < b-\varepsilon < b)$

Arşimet özelliğinden

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon \Rightarrow -\frac{b-a}{2^{n_0}} > -\varepsilon$$

$$\Rightarrow b - \frac{b-a}{2^{n_0}} > b - \varepsilon$$

$$\Rightarrow a < x < x+\varepsilon < b-\varepsilon < b - \frac{b-a}{2^{n_0}} < b$$

$$\Rightarrow x \in \left(a, b - \frac{b-a}{2^{n_0}}\right] \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(a, b - \frac{b-a}{2^n}\right]$$

$$(a,b) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(a, b - \frac{b-a}{2^n}\right]$$

Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathcal{B} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$ tabanının belirlediği üst limit topolojisi τ gözönüne alınsın.

i) $(4,\infty)$, $(-\infty,2] \in \tau$

ii) Keyfi $a,b \in \mathbb{R}$ için (a,∞), $(-\infty,b] \in \tau$

iii) $\forall (a,b] \in \mathcal{B}$, τ'da hem açık hem kapalıdır.

$\rightarrow$ i) $(4,5] \cup (4,6] \cup (4,7] \cup \dots = (4,\infty) \in \tau$

$(0,2] \cup (-1,2] \cup (-2,2] \cup \dots = (-\infty,2] \in \tau$

ii) $(a,a+1] \cup (a,a+2] \cup (a,a+3] \cup \dots = (a,\infty) \in \tau$

$(b-1,b] \cup (b-2,b] \cup (b-3,b] \cup \dots = (-\infty,b] \in \tau$

iii) $(a,b] \in \mathcal{B}\ (\subseteq \tau)$, hem τ-açık hem τ-kapalı mı?

$(a,b] \in \tau \Rightarrow \tau$-açık

Tümleyeni açık kendisi kapalı

$C_{\mathbb{R}}(a,b] = \underset{\in \tau}{(-\infty,a]} \cup \underset{\in \tau}{(b,\infty)} \in \tau \Rightarrow (a,b]$ aynı zamanda

Ör: (X_1, τ_{X_1}) ve (X_2, τ_{X_2}) iki topolojik uzay, X bir küme olsun. $f: X \to X_1$, $g: X \to X_2$ iki fonksiyon olsun. $\mathcal{B} = \{ f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) : U \in \tau_{X_1}, V \in \tau_{X_2} \}$ ailesi X üzerinde bir topoloji için taban mıdır?

→ i) $f^{-1}(X_1) = X$ ve $g^{-1}(X_2) = X \Rightarrow f^{-1}(X_1) \cap g^{-1}(X_2) = X \in \mathcal{B}$

ii) $U_1, U_2 \in \tau_{X_1}$, $V_1, V_2 \in \tau_{X_2}$ için

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(U_1) \cap g^{-1}(V_1) \in \mathcal{B} \\ f^{-1}(U_2) \cap g^{-1}(V_2) \in \mathcal{B} \end{array}\right\} \Rightarrow [f^{-1}(U_1) \cap g^{-1}(V_1)] \cap [f^{-1}(U_2) \cap g^{-1}(V_2)]$$

$$= [f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)] \cap [g^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)]$$

$$= f^{-1}(\underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in \tau_{X_1}}) \cap g^{-1}(\underbrace{V_1 \cap V_2}_{\in \tau_{X_2}}) \in \mathcal{B}$$

Hatırlatma: X boştan farklı bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir fonksiyon olsun.

(i) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (üçgen eşitsizliği)

Bu durumda d, X üzerinde bir metrik olarak isimlendirilir.

- Üzerinde d metriği tanımlı X kümesi metrik uzay olarak isimlendirilir ve (X,d) notasyonu ile gösterilir.
- Bazı kaynaklar bu listeye "Her $x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$" koşulunu da ekler. Ama bu yukarıdaki üç şıktan elde edilebilir.

İspat: (iii). Koşulda $z=x$ alınır, (ii) ve (i) kullanılırsa

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2(x,y) \Rightarrow d(x,y) \geq 0$$

Tanım: $X \neq \emptyset$, $d: X \times X \to \mathbb{R}$ her $x,y \in X$ için

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \text{ ise} \\ 1, & x \neq y \text{ ise} \end{cases}$$

tanımlansın. Bu X üzerinde ayrık metrik olarak isimlendirilir.

Ör: Yukarıda tanımlı d metriğinin metrik olma koşullarını gerçeklendiğini gösterin.

→ Açık olmayan tek durum üçgen eşitsizliği

$x,y,z \in X$ için üçgen eşitsizliği gerçeklenmesin

$$1 = d(x,z) > d(x,y) + d(y,z) = 0+0$$

Bu ifadenin gerçeklenmesi için

$$(x \neq z) \wedge [(x=y) \wedge (y=z)]$$

bağdaşmaz durumlarını verir. O halde kabulümüz yanlış.

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Üçgen eşitsizliği sağlanır.

Tanım: (X,d) metrik uzayında $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$B_d(x,\varepsilon) = \{ y \in X : d(x,y) < \varepsilon \}$$

kümesi ile tanımlı $B_d(x,\varepsilon)$ x merkezli ve ε yarıçaplı açık yuvar olarak isimlendirilir.

Tanım: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ üzerinde üç metrik tanımlayacağız

1) d_e = öklidyen ya da l_2 metriği

$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_e((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

ii) $d_1 = l_1$ metriği, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$

Taxi-cab metriği diğer adı.

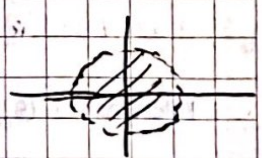
iii) d_∞ = supremum metriği (l_∞ metriği)

$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

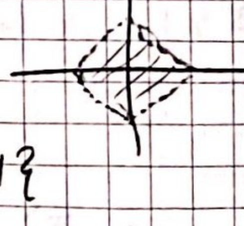
$$d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$

Bu üç metriğe göre düzlemde orjinin birim yarıçaplı açık yuvarı sırasıyla

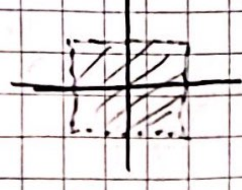
$$B_{d_e}((0,0),1) = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$$



$$B_{d_1}((0,0),1) = \{(x,y) : |x|+|y| < 1\}$$



$$B_{d_\infty}((0,0),1) = \{(x,y) : \max\{|x|, |y|\} < 1\}$$



Tanım: (X,d) bir metrik uzay ve $U \subseteq X$ olsun. Bir $x \in U$, noktasının U kümesinin bir iç noktası olması için g.y.k. $\exists \varepsilon > 0 \; ; \; B_d(x,\varepsilon) \subseteq U$

U'nun iç noktaları kümesi yine $\overset{\circ}{U}$ ile gösterilir.

$U = \overset{\circ}{U}$ ise U kümesi X'in açık alt kümesi olarak isimlendirilir. O halde U açık ise

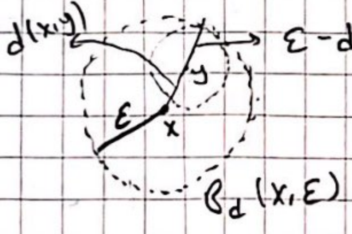
$\forall x \in U, \; \exists \varepsilon_x > 0 \; ; \; B_d(x,\varepsilon_x) \subseteq U$ gerçeklenir.

Teorem: (X,d) bir metrik uzay, $x \in X$, $\varepsilon > 0$ olsun.

$y \in B_d(x,\varepsilon) \Rightarrow \exists \delta > 0 : B_d(y,\delta) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$ gerçeklenir.

İspat: $y \in B_d(x,\varepsilon)$ olsun.

O halde $d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon - d(x,y) > 0$



$\rightarrow \varepsilon - d(x,y) > 0$ $\qquad \delta = \varepsilon - d(x,y)$ tanımlansın

iddia $B_d(y,\delta) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$?

$z \in B_d(y,\delta) \Rightarrow d(z,y) < \delta = \varepsilon - d(x,y)$

$\Rightarrow d(z,y) < \varepsilon - d(x,y)$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \varepsilon$

$\Rightarrow d(x,z) < \varepsilon \Rightarrow z \in B_d(x,\varepsilon)$

$\Rightarrow B_d(y,\delta) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$

12.12.23
Salı

Tanım: (X,d) metrik uzayının bütün açık alt kümelerinin topluluğu X üzerinde d tarafından üretilen topoloji olarak isimlendirilir (τ_d)

Tanım: Bir $X\,(\neq \emptyset)$ kümesi üzerinde iki farklı metrik aynı topolojiyi üretirse bu metrikler denk metrikler olarak isimlendrilir.

Lemma: Eğer d ve ρ aynı $X\,(\neq \emptyset)$ kümesi üzerinde iki farklı metrik ise ve bir k pozitif reel sayısı $(k\in\mathbb{R}^+)$, $\forall x,y\in X$ için $d(x,y)\leq k\,\rho(x,y)$ gerçeklenecek şekilde varsa d metriğinin ürettiği topoloji τ_d, ρ metriğinin ürettiği topoloji τ_ρ'nun alt ailesidir.
Yani $\tau_d \subseteq \tau_\rho$ gerçeklenir.

İspat: U kümesi (X,d) metrik uzayında açık $(U\in\tau_d)$ ve $x\in U$ olsun. Bu durumda $\exists \varepsilon>0 : B_d(x,\varepsilon)\subseteq U$ gerçeklenir. iddia $B_\rho(x,\varepsilon/k)\subseteq B_d(x,\varepsilon)$?
Keyfi $y\in B_\rho(x,\varepsilon/k)$ için. $y\in B_\rho(x,\varepsilon/k) \Rightarrow \rho(x,y)<\varepsilon/k$

$$d(x,y)\leq k\,\rho(x,y) < \cancel{k}\,\varepsilon/\cancel{k}$$

$$\Rightarrow d(x,y)<\varepsilon$$

$\Rightarrow y\in B_d(x,\varepsilon)$ ve y keyfi olduğundan

$$B_\rho(x,\varepsilon/k)\subseteq B_d(x,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow U\in\tau_\rho \Rightarrow \tau_d\subseteq\tau_\rho$$

Ör: d_e, d_1 ve d_∞ $\mathbb{R}^2$ üzerinde denk metriklerdir. Gösteriniz.

$\rightarrow$ $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun

$$|x_1 - y_1| \leq \sqrt{|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2} = d_e(\bar{x},\bar{y})$$
$$|x_2 - y_2| \leq d_e(\bar{x},\bar{y})$$
$$d_1(\bar{x},\bar{y}) \leq d_e(\bar{x},\bar{y}) \; ?$$

$$d_\infty(\bar{x},\bar{y}) = d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$
$$\leq d_e(\bar{x},\bar{y})$$
$$\Rightarrow d_\infty(\bar{x},\bar{y}) \leq d_e(\bar{x},\bar{y})$$

$$d_e(\bar{x},\bar{y}) \leq d_e(\bar{x},(y_1,x_2)) + d_e((y_1,x_2),\bar{y})$$
$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-x_2)^2} + \sqrt{(y_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$
$$= |x_1-y_1| + |x_2-y_2| = d_1(\bar{x},\bar{y})$$
$$\Rightarrow d_e(\bar{x},\bar{y}) \leq d_1(\bar{x},\bar{y})$$

$$d_1(\bar{x},\bar{y}) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$
$$\leq \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} + \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$
$$= 2\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$
$$= 2\, d_\infty(\bar{x},\bar{y})$$

Sonuçta

$$d_\infty(\bar{x},\bar{y}) \leq d_e(\bar{x},\bar{y}) \leq d_1(\bar{x},\bar{y}) \leq 2\, d_\infty(\bar{x},\bar{y})$$

Buradan denk oldukları görülür. ✓

Teorem: (X,d) bir metrik uzay olsun.

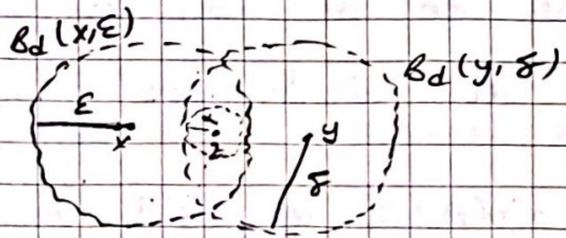
$\mathcal{B} = \{B_d(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ ailesi X üzerinde bir topoloji için tabandır.

GIPTA

İspat: $\bigcup \{ B_d(x,\varepsilon) : x \in X ,\ \varepsilon > 0 \} \subseteq X$

i.) $X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup \{ B_d(x,\varepsilon) : x \in X ,\ \varepsilon > 0 \} \subseteq X$

ii) $B_d(x,\varepsilon)$, $B_d(y,\delta) \in \mathcal{B}$ ve $z \in B_d(x,\varepsilon) \cap B_d(y,\delta)$ olsun



$\alpha = \min \{ \varepsilon - d(x,z) ,\ \delta - d(y,z) \}$ olsun

$d(x,z) < \varepsilon$, $d(y,z) < \delta$ olduğundan $\alpha > 0$ geçerli

İddia $B_d(z,\alpha) \subseteq B_d(x,\varepsilon) \cap B_d(y,\delta)$

$q \in B_d(z,\alpha) \Rightarrow d(z,q) < \alpha$

$$\begin{aligned} d(x,q) &\leq d(x,z) + d(z,q) \\ &< d(x,z) + \alpha \\ &\leq \cancel{d(x,z)} + \varepsilon - \cancel{d(x,z)} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow d(x,q) < \varepsilon$

$\Rightarrow B_d(z,\alpha) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$

$$\begin{aligned} d(y,q) &\leq d(y,z) + d(z,q) \\ &< d(y,z) + \alpha \\ &\leq d(y,z) + \delta - d(y,z) \end{aligned}$$

$\Rightarrow d(y,q) < \delta$

$\Rightarrow B_d(z,\alpha) \subseteq B_d(y,\delta)$

$\Rightarrow B_d(z,\alpha) \subseteq B_d(x,\varepsilon) \cap B_d(y,\delta)$

Alt Taban Kavramı

Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{S} \subseteq \tau$ olsun. $\mathcal{S}$'nin sonlu alt ailelerinin kesişimlerinden oluşan

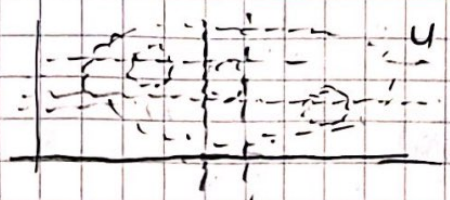
$$\mathcal{B} = \{ S_1 \cap \ldots \cap S_q ,\ (S_1, S_2, \ldots S_q \in \mathcal{S}) \}$$

ailesi τ topolojisi için bir taban ise $\mathcal{S}$ ailesine τ topolojisi için bir alt tabandır denir.

Diğer bir deyişle $\forall A \in \tau$ ve $x \in A$ için $\exists \{S_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{S}$:
$x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq A$ gerçeklenmeli

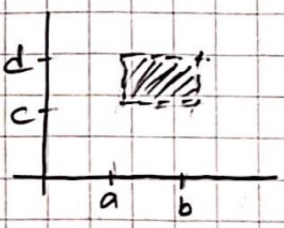
Ör: $\mathbb{R}$ üzerinde standart topoloji τ_{st} gözönüne alınsın
$\mathcal{S} = \{ (-\infty, b) : b \in \mathbb{R} \} \cup \{ (a, \infty) : a \in \mathbb{R} \}$ olsun.
$r \leq s$ olmak üzere $\mathbb{R}$'nin her (r, s) açık aralığı $(-\infty, s) \cap (r, \infty)$ şeklinde yazılabildiğinden $\mathcal{S}$, $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ için alt tabandır.
$\mathcal{S}$ bir taban değildir. (r, s) açık aralığı $\mathcal{S}$'nin bir alt ailesinin birleşimi olarak yazılamaz.

Ör: $\mathbb{R}^2$ üzerinde standart topoloji gözönüne alınsın



Koordinat eksenlerine paralel açık şeritlerin ailesi $\mathbb{R}^2$ üzerinde standart topoloji için alt tabandır.

$((a,b)\times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times (c,d)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a<x<b,\ c<y<d\}$



Ör $\mathcal{S}$, X üzerinde τ topoloji için bir alt taban $A \subseteq X$ olsun.

$$\mathcal{S}_A = \{A \cap S : S \in \mathcal{S}\}$$

ailesi, A üzerindeki alt uzay topolojisi τ_A için bir alt tabandır, gösteriniz.

$\longrightarrow$ i) $\mathcal{S}_A \subseteq \tau_A$?

$S \cap A \in \mathcal{S}_A \Rightarrow S \in \mathcal{S} \subseteq \tau$

$\Rightarrow S \in \tau \Rightarrow \underset{\in \tau}{S} \cap A \in \tau_A$

$\Rightarrow \mathcal{S}_A \subseteq \tau_A$ ✓

ii) $H \in \tau_A \Rightarrow \exists G \in \tau : H = G \cap A$

Hipotezden $\mathcal{S}$, τ için alt taban olduğundan $S_{i_k} \in \mathcal{S}$ olmak üzere $G = \bigcup_i (S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_{n_i}})$

$$\Rightarrow H = A \cap G$$
$$= A \cap \left(\bigcup_i (S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_{n_i}})\right)$$
$$= \bigcup_i \big(\underbrace{(A \cap S_{i_1})}_{\in \mathcal{S}_A} \cap \underbrace{(A \cap S_{i_2})}_{\in \mathcal{S}_A} \cap \dots \cap \underbrace{(A \cap S_{i_{n_i}})}_{\in \mathcal{S}_A}\big)$$

O halde $\mathcal{S}_A$, (A, τ_A) için alt tabandır.

14.12.23
Perşembe

Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay; $x \in X$ olsun. x noktasının komşulukların ailesi

$$\mathcal{N}_x = \{ U \subseteq X \mid \exists V \in \tau : x \in V \subseteq U \}$$

ile verildiğini biliyoruz.

$\mathcal{N}_x$'in bir $\mathcal{B}_x$ alt ailesi $\forall U \in \mathcal{N}_x$ için bir $B \in \mathcal{B}_x$, $B \subseteq U$ olmak üzere x noktasındaki komşuluk tabanı olarak isimlendirilir.

x noktasındaki komşuluk tabanı bütün elemanları açık ise yerel taban olarak isimlendirilir.

$\delta \in \mathbb{R}$, reel sayılar sayılabilir değil

$(\mathbb{R}, \tau_{st})$'de $x \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{B}_x = \{ (x-\delta, x+\delta) : \delta > 0 \}$ yerel tabandır

$\mathcal{B}_x^* = \{ (x - 1/n, x + 1/n) : n \in \mathbb{N} \}$ bir yerel taban (Aynı zamanda bu sayılabilir)

Teorem: (X,τ) bir topolojik uzay. $\mathcal{B}$ bu topolojinin bir tabanı olsun. $A \subseteq X$ için aşağıdakiler geçerlidir

a.) $x \in \bar{A}$ olması için g.y.k $\forall B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{N}_x$ için $A \cap B \neq \emptyset$ olmasıdır

b.) $x \in \mathring{A} \iff \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq A$

İspat:

a.) $x \in \bar{A} \iff \forall G \in \tau \cap \mathcal{N}_x : A \cap G \neq \emptyset$ olduğu biliniyor

$(\Rightarrow)$: $x \in \bar{A}$ ise $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olduğundan $\forall B \in \underbrace{\mathcal{B} \cap \mathcal{N}_x}_{\subseteq \mathcal{B} \subseteq \tau}$ için $B \in \tau$ olduğundan

$A \cap B \neq \emptyset$

$(\Leftarrow)$: $\forall B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{N}_x$ için $A \cap B \neq \emptyset$ gerçeklesin

$x \in U \in \tau$ gerçekleyen keyfi bir U açık kümesi göz önüne alınsın

$\exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq U$ $\qquad A \cap B_x \subseteq A \cap U$

b) $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists G_x \in \tau : x \in G_x \subseteq A$ olduğunu biliyoruz.

$(\Rightarrow)$: $(\exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq G_x \subseteq A)$

$\Rightarrow (\exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq A)$

$(\Leftarrow)$: $\exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq A \quad (\mathcal{B} \subseteq \tau) \Rightarrow x \in \mathring{A}$

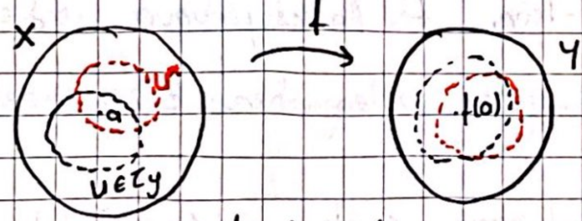
$\hookrightarrow (B_x \in \mathcal{B} \subseteq \tau \Rightarrow B_x \in \tau)$

Süreklilik

Sürekli Fonksiyon Kavramı:

Tanım:

i) (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) birer topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonk. olsun. f fonksiyonunun bir $a \in X$ noktasında sürekli olması için g.y.k $f(a)$'yı içeren her bir $\mathcal{U} (\subseteq Y)$ açık alt kümesine karşılık $f(U) \subseteq \mathcal{U}$ gerçeklenmek üzere a noktasını içeren bir U açık alt kümesinin bulunmasıdır.



$f(U) \subseteq \mathcal{U}$

$(f(U) \subseteq \mathcal{U}$ o.ş. var olmalı$)$

$f(U^*) \subseteq \mathcal{U}^*$

(Her komşuluk için)

f, a noktasında sürekli ise $\forall \mathcal{U} \in \tau_Y(f(a)) = \tau_Y \cap \mathcal{N}_{f(a)}$

(Yani, Y'de $f(a)$'yı içeren açık küme ailesi)

$$\forall \mathcal{U} \in \underbrace{\tau_Y(f(a))}_{\tau_Y \cap \mathcal{N}_{f(a)}}, \quad \exists U \in \underbrace{\tau_X(a)}_{\tau_X \cap \mathcal{N}_a} : f(U) \subseteq \mathcal{U}$$

(Noktanın görüntüsünün her bir açık komşuluğuna noktayı içerecek bir açık

ii) f fonksiyonu X kümesinin her bir noktasında sürekli ise f fonksiyonuna X üzerinde sürekli fonksiyon denir.

Uyarı: f fonksiyonu a noktasında sürekli değil ise

$$\exists \mathcal{V} \in \tau_Y \cap \mathcal{N}_{f(a)} : \forall U \in \tau_X \cap \mathcal{N}_a : f(U) \not\subseteq \mathcal{V}$$

ve bu da her bir $U \in \tau_X \cap \mathcal{N}_a$ için $f(U) \setminus \mathcal{V} \neq \emptyset$ ifadesini ve

Çünkü

$$f(U) \subseteq Y = \mathcal{V} \cup C_Y \mathcal{V} \Rightarrow$$

$$f(U) = f(U) \cap Y = f(U) \cap (\mathcal{V} \cup C_Y \mathcal{V})$$

$$= \underbrace{(\underbrace{f(U) \cap \mathcal{V}}_{\neq f(U)}) \cup (\underbrace{f(U) \cap C_Y \mathcal{V}}_{f(U) \setminus \mathcal{V}})}$$

$f(U) \setminus \mathcal{V} \neq \emptyset$ olmalı

Çünkü boş olsa $f(U)$'ya eşit olmazdı üstteki ikisinin birleşimi

Uyarı: Klasik analizdeki süreklilik tanımı, yukarıda verilen tanımın özel bir şeklidir. Gerçekten f, (a,b) üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $x_0 \in (a,b)$ noktasında sürekli olması için verilen her $\varepsilon > 0$ reel sayısına karşılık

$|x - x_0| < \delta$ komşuluğunu sağlayan $\forall x \in (a,b)$ için

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı bulunmasıd.

($f(x_0)$'ın her bir ε komşuluğuna karşılık x_0'ın bir δ komşuluğu varsa sürekldir.)

Yani bu $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) = \mathcal{V}$ açık kümesi için

$f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \mathcal{V}$ o.ş. bir $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ açık kümenin varlığını gösterir

Örnekler:

a.) $f: (\mathbb{R}, \tau_{st}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{st})$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x$ ile tanımlansın. f, $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.

$\rightarrow$ $x_0 \in \mathbb{R}$ keyfi seçilsin. $\mathcal{U} \in \tau_{st} \cap \mathcal{N}_{f(x_0)}$ ise $f(x_0) = x_0$ olduğundan $x_0 \in \mathcal{U}$'dir.

O halde $U = \mathcal{U}$ alınırsa $\overbrace{U = f(U)}^{\text{birim (identik) fonk olduğu için}} \subseteq U = \mathcal{U}$ $\quad (f(U) \subseteq \mathcal{U})$

ifadesi $f(x_0)$'ın, yani x_0'ın her açık komşuluğu için gerçeklendiğinden f, x_0'da süreklidir. Nokta keyfi seçildiğinden f, $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.

b.) X, üzerindeki τ topolojisi ayrık topoloji, yani $\tau = P(X)$ olsun. Y uzayı üzerinde göz önüne alınabilecek keyfi σ topolojisi için $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu süreklidir.

$\rightarrow$ $x_0 \in X$ için f, x_0'da sürekli midir?

$f(x_0) \in \mathcal{U} \in \sigma$ için $U = \overset{\in P(X)}{\{x_0\}} \in \tau$ $(= P(X) = \tau)$ olduğundan

$$f(U) = f(\{x_0\}) \subseteq \mathcal{U}$$

$\forall x_0 \in X$ için bu doğru olduğundan f, X üzerinde süreklidir.

c) Keyfi bir (X, τ) topolojik uzayından $\sigma = \{Y, \emptyset\}$ olmak üzere tanımlanarak $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu süreklidir.

$\rightarrow$ $\forall x \in X$ için $f(x) \in Y \in \sigma$ olduğundan $\forall U \in \tau \cap \mathcal{N}_x$ için

$f(U) \subseteq Y$ geçerli olduğundan f, X üzerinde süreklidir.

Teorem: $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ bir $\wedge$ topo[illegible]
topolojik uzayına resmeden bir fonk. olsun. Aşağıdakiler denktir

a) f süreklidir (X üzerinde süreklidir)

b) $\forall U \in \tau_Y$ için $f^{-1}(U) \in \tau_X$

c) (Y,τ_Y)'nin alt tabanı τ_Y'ye ait $\forall W \in \tau_Y$ için $f^{-1}(W) \in \tau_X$

d) (Y,τ_Y)'nin $\mathcal{B}_Y$ tabanına ait $\forall W \in \mathcal{B}_Y$ için $f^{-1}(W) \in \tau_X$

e) Her $K (\subseteq Y)$ τ_Y-kapalı alt kümesi için $f^{-1}(K)$, τ_X kapalıdır.

f) Her $A \subseteq X$ için $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ geçerlidir.

g) Her $B \subseteq Y$ için $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$ geçerlidir.

h) Her $B \subseteq Y$ için $f^{-1}(\mathring{B}) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$ geçerlidir.

İspat:

• (a) ⇒ (b) $U \in \tau_Y$ olsun.

i) $f^{-1}(U) = \emptyset$ ise $\emptyset \in \tau_X$ olduğundan iddia açıktır.

ii) $f^{-1}(U) \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(U)$ $\quad (x_0 \in X) \wedge (f(x_0) \in f(\underbrace{f^{-1}(U)}_{\subseteq U}))$

$x_0 \in f^{-1}(U)$

(Hatırlatma: $f: X \to Y$, $A \subseteq X$, $C \subseteq Y$ olsun

$$\underbrace{A \subseteq f^{-1}(f(A))}_{1\text{-}1 \text{ ise}} \quad \text{ve} \quad \underbrace{f(f^{-1}(C)) \subseteq C}_{\text{örtense}}$$
)

f sürekli olduğundan

$$\underbrace{\exists U_{x_0} \in \tau_X}: (x_0 \in U_{x_0}) \wedge (f(U_{x_0}) \subseteq U) \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(f(U_{x_0}))}_{U_{x_0} \subseteq f^{-1}(f(U_{x_0}))} \subseteq f^{-1}(U)$$

$$\Rightarrow U_{x_0} \subseteq f^{-1}(U)$$

Yani $x_0 \in (f^{-1}(U))^\circ$ geçerlidir. U bir boştan farklı $f^{-1}(U)$ kümesinden alınacak her nokta için doğru $(f^{-1}(U))^\circ = f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_X$

GIPTA

İspat devam,

$f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ bir fonksiyon, bu τ_Y için taban $\mathcal{S}_Y$'de $\mathcal{B}_Y$'yi üreten bir alt taban idi

• (b) => (a)

$(\forall \mathcal{U}\in\tau_Y$ için $f^{-1}(\mathcal{U})\in\tau_X) \Rightarrow (f,\ X$ üzerinde sürekli mi?

$x_0\in X$ ve $f(x_0)\in \mathcal{U}\in\tau_Y$, $x_0\in f^{-1}(\mathcal{U})\in\tau_X$, $U=f^{-1}(\mathcal{U})$

için $f(U)=f(f^{-1}(\mathcal{U}))\subseteq\mathcal{U}$ f, x_0 noktasında sürekli

nokta keyfi seçildiğinde bu iddia $\forall x\in X$ için doğru

f, X üzerinde sürekli ya da $f:X\to Y$ süreklidir.

• (b) => (c)

$(\forall \mathcal{U}\in\tau_Y$ için $f^{-1}(\mathcal{U})\in\tau_X) \Rightarrow (\forall W\in\mathcal{S}_Y$ için $f^{-1}(W)\in\tau_X)$?

$W\in\mathcal{S}_Y$ olsun $W\in\tau_Y$ ve (b)'den $f^{-1}(W)\in\tau_X$. $\forall W\in\mathcal{S}_Y$ için $f^{-1}(W)\in\tau_X$

Alt taban tanımından her eleman τ_Y'de açık

• (c) => (d)

$(\forall W\in\mathcal{S}_Y$ için $f^{-1}(W)\in\tau_X) \Rightarrow (\forall W\in\mathcal{B}_Y$ için $f^{-1}(W)\in\tau_X)$?

$W\in\mathcal{B}_Y \Rightarrow \exists\{S_i\}_{i=1}^{n}\subseteq\mathcal{S}_Y : W=\bigcap_{i=1}^{n}S_i \Rightarrow f^{-1}(W)$

$$=f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n}S_i\right)=\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n}\underbrace{f^{-1}(S_i)}_{\in\tau_X \text{ c'den}}}_{\in\tau_X}\in\tau_X$$

$\forall W\in\mathcal{B}_Y$ için $f^{-1}(W)\in\tau_X$

• (d) => (e)

$(\forall W\in\mathcal{B}_Y$ için $f^{-1}(W)\subset\tau_X) \Rightarrow ($Her τ_Y-kapalı K için $f^{-1}(K)$ τ_X-kapalıdır?)

GIPTA

K, τ_y - kapalı olsun.

$$Y \setminus K \in \tau_y \Rightarrow \exists \mathcal{B}_{Y\setminus K} \subseteq \mathcal{B}_y : Y\setminus K = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{Y\setminus K}} B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(Y\setminus K) = f^{-1}\Big(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_{Y\setminus K} \subseteq \mathcal{B}_y} B\Big) \in \tau_x$$

$$= \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{Y\setminus K}} \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \tau_x \text{ (d.)den}}$$

$$f^{-1}(Y\setminus K) \in \tau_x$$

$$f^{-1}(Y\setminus K) = X \setminus f^{-1}(K) \in \tau_x$$

$$\Rightarrow X \setminus (X \setminus f^{-1}(K)) = f^{-1}(K) \quad \tau_x \text{ kapalıdır.}$$

- (e) $\Rightarrow$ (f)

(τ_y - kapalı $K (\subseteq Y)$ alt kümesi için $f^{-1}(K)$ τ_x kapalı)

$$\Rightarrow (\forall A \subseteq X \text{ için } f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)})$$

$$f(A) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$$

$$\Rightarrow A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}). \quad \tau_x \text{ kapalı (e)den}$$

$$\Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})} = f^{-1}(\overline{f(A)})$$

$$f(\overline{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)}))$$

$$\subseteq \overline{f(A)}$$

$$\Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

- (f) $\Rightarrow$ (e)

$$(\forall A \subseteq X \text{ için } f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}) \Rightarrow (\tau_y \text{ kapalı için } f^{-1}(K), \tau_x \text{ kapalı})$$

K, τ_y kapalı olsun $A = f^{-1}(K)$ alalım.

$$f(\overline{f^{-1}(K)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(K))} \subseteq \overline{K} = K$$

$$\Rightarrow f(\overline{f^{-1}(K)}) \subseteq K$$

$$\Rightarrow \overline{f^{-1}(K)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(K)})) \subseteq f^{-1}(K) \Rightarrow \overline{f^{-1}(K)} = f^{-1}(K) \quad \tau_x \text{ kapalı}$$

• (a) $\Rightarrow$ (f)

(f, X üzerinde sürekli) $\Rightarrow$ ($\forall A \subset X$ için $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$) ?

$f: X \to Y$ sürekli , $y \in f(\overline{A})$ olsun. $\exists x \in \overline{A} \ (\in X) : f(x) = y$

f, x noktasında sürekli olduğundan $f(x)=y$ noktasını

içeren $\underline{\mathcal{V} \text{ açık}}$ kümesine $\underline{\text{karşılık}}$ X üzerinden x noktasını

içeren $\underline{U \text{ açık kümesi}}$ $\underline{f(U) \subseteq \mathcal{V}}$ gerçeklemek üzere vardır

$x \in \overline{A} \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset$, $\emptyset \neq f(A \cap U) \subseteq f(A) \cap f(U)$

$\subseteq f(A) \cap \mathcal{V}$

$\Rightarrow f(A) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ → Bunun boş olmaması kapanışının elemanı demek. ✓

$\Rightarrow y \in \overline{f(A)} \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

• (f) $\Rightarrow$ (b)

($\forall A \subset X$ için $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$) $\Rightarrow$ ($\forall \mathcal{V} \in \tau_Y$ için $f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau_X$)

$\mathcal{V} \in \tau_Y$ için $f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau_X$?)

$A = f^{-1}(Y \setminus \mathcal{V})$ (f) ifadesinde yerine konsa ?

$f(\overline{f^{-1}(Y \setminus \mathcal{V})}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(Y \setminus \mathcal{V}))} \subseteq \overline{Y \setminus \mathcal{V}} = Y \setminus \mathcal{V} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\overline{f^{-1}(Y \setminus \mathcal{V})}) \subseteq Y \setminus \mathcal{V} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(Y \setminus \mathcal{V})} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(Y \setminus \mathcal{V})})) \subseteq f^{-1}(Y \setminus \mathcal{V})$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(Y \setminus \mathcal{V})} \subseteq f^{-1}(Y \setminus \mathcal{V})$ ... (1)

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(Y \setminus \mathcal{V})} = f^{-1}(Y \setminus \mathcal{V})$ ...

$\Rightarrow f^{-1}(Y \setminus \mathcal{V}) = X \setminus f^{-1}(\mathcal{V})$ τ_X - kapalı

$\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau_X$

GIPTA

• (f) ⇒ (g)

$\left(\forall A \subseteq X \text{ için } f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}\right) \Rightarrow \left(\forall B \subseteq Y \text{ için } \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})\right)$

$B \subseteq Y \Rightarrow A = f^{-1}(B) \subseteq X$

$f(A) = f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

(f)'de $A = f^{-1}(B)$ alınırsa

$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}$

$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ ✓

• (g) ⇒ (a)

$x \in X$, $f(x) \in V \in \tau_Y$ olsun. $Y \setminus V \subseteq Y$'den hareketle

$\overline{X \setminus f^{-1}(V)} = \underbrace{\overline{f^{-1}(Y \setminus V)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus V})}_{(g)} = f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$

$\Rightarrow \overline{X \setminus f^{-1}(V)} = X \setminus f^{-1}(V) \Rightarrow X \setminus f^{-1}(V)$ τ_X kapalı ve

$f^{-1}(V) \in \tau_X \overset{\text{açık}}{\Rightarrow} x \in f^{-1}(V) = U \in \tau_X$

$f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$, $f: X \to Y$ sürekli

• (g) ⇒ (h)

$\left(\forall D \subseteq Y \text{ için } \overline{f^{-1}(D)} \subseteq f^{-1}(\overline{D})\right) \Rightarrow \left(\forall B \subseteq Y \text{ için } f^{-1}(B^{\circ}) \subseteq (f^{-1}(B))^{\circ}\right)$

$\overline{f^{-1}(D)} \subseteq f^{-1}(\overline{D}) \Rightarrow D = Y \setminus B$

$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus B})$

$f^{-1}(B^{\circ}) = f^{-1}(\underbrace{Y \setminus \overline{Y \setminus B}}_{C_Y \overline{C_Y B}}) = X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \subseteq X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)}$

$C_Y C_Y B^{\circ}$ $= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = (f^{-1}(B))^{\circ}$

- (h) $\Rightarrow$ (f)

$(\forall B \subseteq Y$ için $f^{-1}(\mathring{B}) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ \Rightarrow (\forall A \subseteq X$ için $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)})$

$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \Rightarrow X \setminus f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(Y \setminus f(A)) \subseteq X \setminus A$

$B = Y \setminus f(A)$

$f^{-1}((Y \setminus f(A))^\circ) \subseteq (f^{-1}(Y \setminus f(A)))^\circ$

$f^{-1}(Y \setminus \overline{f(A)}) = f^{-1}((Y \setminus f(A))^\circ) \subseteq (f^{-1}(Y \setminus f(A)))^\circ$

$\subseteq (X \setminus A)^\circ = X \setminus \bar{A}$

$\Rightarrow f^{-1}(Y \setminus \overline{f(A)}) \subseteq X \setminus \bar{A}$

tümleyen al

$\bar{A} \subseteq X \setminus f^{-1}(Y \setminus \overline{f(A)}) = f^{-1}(Y \setminus (Y \setminus \overline{f(A)}))$

f al

$= f^{-1}(\overline{f(A)})$

$f(\bar{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)}$

- (h) $\Rightarrow$ (a)

$x \in X$ olmak üzere $f(x) \in V \in \tau_Y$ olsun

$f^{-1}(V) = f^{-1}(V^\circ) \subseteq (f^{-1}(V))^\circ \ (\subseteq f^{-1}(V))$

$\Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau_X$ ve $x \in f^{-1}(V)$

$U = f^{-1}(V)$ için $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$

f x'de sürekli nokta keyfi seçildiği için f her noktada sürekli, yani $f: X \to Y$ sürekli

- (b) $\Rightarrow$ (h)

$B \subseteq Y$ olsun $\quad B^\circ \subseteq B \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(\mathring{B})}_{\in \tau_X \text{ b'den}} \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$

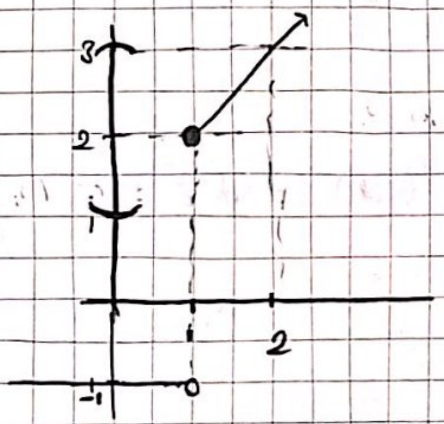
$\Rightarrow f^{-1}(\mathring{B}) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$

21.12.23
Perşembe

Not: Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonunun sürekli olmaması için g.y.k bir $V\in\sigma$ açık kümenin $f^{-1}(V)\notin\tau$ olmak üzere var olmasıdır.

Ör: $f:(\mathbb{R},\tau_{st})$, $x\in\mathbb{R}$ için

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geq 1 \text{ ise} \\ -1, & x<1 \text{ ise} \end{cases}$$ ile verilsin.



$(1,3)\in\tau_{st}$

$f^{-1}((1,3))=[1,2)\notin\tau_{st}$

$\Rightarrow f$ sürekli fonksiyon değildir.

Ör: $X=\{a,b,c,d\}$ üzerinde

$\tau=\{X,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c,d\}\}$ topolojisi ve

$f=\{(a,b),(b,d),(c,b),\underbrace{(d,c)}_{}\}$,$f(d)=c$

$f:X\to X$ fonksiyonu verilsin.

a) f, c noktasında sürekli değildir.

b) f, d noktasında süreklidir gösterin.

$\longrightarrow$ a) f, c'de sürekli değilse

$\exists V\in\tau\cap N_{f(c)}$ $\quad(f(c)=b)\quad$ $(c\in X\in\tau)\wedge(c\in\{b,c,d\}\in\tau)$

b

b'nın bulundukları
$X,\{b\},\{a,b\},\{b,c,d\}$

olduğundan $\tau\cap N_c=\{X,\{b,c,d\}\}$

GIPTA

$f(X) \setminus \{a,b\} \neq \emptyset$ ve $f\{b,c,d\} \setminus \{a,b\} \neq \emptyset$ olmalı

$\{b,c,d\} \cap \{c,d\} = \{c,d\} \neq \emptyset$ $\{b,c,d\} \cap \{c,d\} = \{c,d\} \neq \emptyset$

f, c noktasında sürekli değildir.

→ b.) $f(d) = c \in \{b,c,d\}$ $c \in X$

→ Ters görüntüsünü almak daha pratik. Al ona U'de bir daha ayrı $U \in bx$ aramaya gerek yok.

Özellik; $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$

→ örten olursa eşit

$U_1 = f^{-1}(\{b,c,d\}) = X$ $f(U_1) = f(f^{-1}\{b,c,d\}) \subseteq \{b,c,d\}$

$U_2 = f^{-1}(X) = X$ $f(U_2) \subseteq X$

f, d noktasında sürekli

Önerme: $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ ve (Z, τ_Z) topolojik uzaylar verilsin

a) $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ sürekli fonk. verilsin.

Bu durumda $g \circ f: X \to Z$ süreklidir

b) $f: X \to Y$ sürekli, $A \subseteq X$ üzerindeki alt uzay topolojisi τ_A ise f in A'ya kısıtlanmış fonksiyonu

$f|_A \to (A, \tau_A) \to (Y, \tau_Y)$ süreklidir.

c) $f: X \to Y$ sürekli ise $f: X \to f(X)$ süreklidir. Burada $f(X)$, (Y, τ_Y)'nin $f(X)$ üzerinde belirlediği $\tau_{f(X)}$ alt uzay topolojisiyle göz önüne alınmalı

İspat: a) $W \in \tau_Z$ ve

$g: Y \to Z$ sürekli olduğundan $g^{-1}(W) \in \tau_Y$ ve $f: X \to Y$ sürekli olduğundan

$$f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W) \in \tau_X$$ ve $g \circ f : X \to Z$

fonksiyonu süreklidir.

b) $H \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(H) \in \tau_X$ $\quad (f|_A)^{-1}(H) = A \cap \underbrace{f^{-1}(H)}_{A \cap \tau_X} \in \tau_A$

Yani $f|_A : (A, \tau_A) \to (Y, \tau_Y)$ süreklidir.

c) Hatırlatma: $f: X \to Y$ bir fonksiyon

(1) $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ ve $B \cap f(A) = f(f^{-1}(B) \cap A)$

(2) ve $A = X$, $B = H$ alınırsa; $B \cap f(X) = f(f^{-1}(B))$

(3) ayrıca $C \subseteq Y$ ise $f^{-1}(f(f^{-1}(C))) = f^{-1}(C)$ 'dir.

$G \subseteq f(X)$ ve $G \in \tau_{f(X)} \Rightarrow \exists H \in \tau_Y : G = H \cap f(X)$

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(H \cap f(X)) \overset{(2)}{=} f^{-1}(f(f^{-1}(H))) \overset{(3)}{=} f^{-1}(H) \in \tau_X$$

çünkü $H \in \tau_Y$

ve $f: X \to f(X)$ süreklidir.

Yapıştırma Lemması: A ve B alt kümeleri X uzayında $X = A \cup B$ gerçekleyen iki kapalı küme $f: A \to Y$, $g: B \to Y$ fonksiyonları ve her $x \in A \cap B$ için $f(x) = g(x)$ gerçekleyen sürekli fonksiyonlar olsun.

Bu durumda

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \text{ ise} \\ g(x), & x \in B \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $h: X \to Y$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: $V \subseteq Y$ alt kümesi gözönüne alınsın.
h'nin sürekli olduğunu göstermek için $h^{-1}(V)$'nin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} h^{-1}(V) &= h^{-1}(V) \cap X \\ &= h^{-1}(V) \cap (A \cup B) \\ &= (h^{-1}(V) \cap A) \cup (h^{-1}(V) \cap B) \\ &= f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V) \end{aligned}$$

f sürekli olduğundan $f^{-1}(V)$ A'nın kapalı alt kümesidir. Bu ise alt uzayda kapalı olmanın gereği olarak üst uzayda kapalı bir F kümesi için $f^{-1}(V) = A \cap F$ yazılabilmesi demektir. A alt kümesi X uzayında kapalı olduğundan $A \cap F$ $(= f^{-1}(V))$ alt kümesi X'de kapalıdır. Benzer şekilde $g^{-1}(V)$'de X'de kapalıdır. Dolayısıyla $h^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V)$ alt kümeside X'de kapalıdır.

26.12.23
Salı

Reel Değerli Sürekli Fonksiyonlar

$f: (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{st})$ sürekli bir fonksiyon ve
$\mathcal{S} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$ $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ için alt taban olduğundan $\forall V \in \mathcal{S}$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ dolayısıyla
$f^{-1}((a,\infty)) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \tau$ ve
$f^{-1}((-\infty,b)) = \{x \in X : f(x) < b\} \in \tau$ gerçeklenir.

Teorem: $f:(X,\tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{st})$ sürekli bir fonksiyon ise $x \in X$ olmak üzere $|f|^\alpha(x) = |f(x)|^\alpha$ ile tanımlı $|f|^\alpha : (X,\tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{st})$ fonksiyonu $\forall \alpha > 0$ için süreklidir.

İspat: $b \geq 0$ olsun.

Bu durumda $\{x \in X : |f(x)|^\alpha > b\} = \{x \in X : |f(x)| > b^{1/\alpha}\}$

$$= \underbrace{\{x \in X : f(x) > b^{1/\alpha}\}}_{\in \tau} \cap \underbrace{\{x \in X : f(x) < -b^{1/\alpha}\}}_{\in \tau}$$

τ'da açıktır

$b > 0$ ise

$\{x \in X : |f(x)|^\alpha < b\} = \underbrace{\{x \in X : f(x) < b^{1/\alpha}\}}_{\in \tau} \cap \underbrace{\{x \in X : f(x) > -b^{1/\alpha}\}}_{\in \tau}$

$\in \tau$ olur.

Eğer $b = 0$ ise

$\{x \in X : |f(x)|^\alpha < b\} = \emptyset \in \tau$ açık

$b < 0$ ise

$\{x \in X : |f(x)|^\alpha < b\} = \emptyset \in \tau$ açık ve

$\{x \in X : |f(x)|^\alpha > b\} = X \in \tau$

$|f|^\alpha : (X,\tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{st})$ sürekli

Teorem: $\mathbb{R}^2$ üzerinde $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'ye $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $f(x,y) = x+y$ ile verilen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ süreklidir

İspat: $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ ve W'de $f(x_1,y_1)$'in $\mathbb{R}$'deki bir açık komşuluğu olsun

Bu durumda $\exists \varepsilon > 0 : (f(x_1, y_1) - \varepsilon, f(x_1, y_1) + \varepsilon) \subseteq W$

gerçeklenir

$$|f(x,y) - f(x_1,y_1)| = |(x+y) - (x_1 + y_1)| \leq \underbrace{|x - x_1|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|y - y_1|}_{< \varepsilon/2}$$

$|x - x_1| < \varepsilon/2$, $|y - y_1| < \varepsilon/2$ için

$|f(x,y) - f(x_1,y_1)| < \varepsilon$ olur.

$U = (x_1 - \varepsilon/2 , x_1 + \varepsilon/2)$ ve $V = (y_1 - \varepsilon/2 , y_1 + \varepsilon/2)$ için

$U \times V$, $\mathbb{R}^2$'de (x_1, y_1) noktasını içeren açık kümedir

$f(U \times V) \subseteq W$

Sonuç: $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{st})$ ve $g : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{st})$ sürekli birer fonksiyon ise $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ile tanımlı $f+g : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{st})$ fonksiyonu süreklidir.

Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay, $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{st})$ sürekli ise $x \in X$ olmak üzere $(a.f)(x) = a f(x)$ ile tanımlı $a.f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{st})$ fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ için süreklidir.

İspat: $b \geq 0$, $a \neq 0$ durumu

$\{ x \in X : a.f(x) > b \} \in \tau$

$$= \begin{cases} \{ x \in X : f(x) > b/a \} & a > 0 \text{ ise } \in \tau \\ \{ x \in X : f(x) < b/a \} & a < 0 \text{ ise } \in \tau \end{cases}$$

$\Rightarrow \{ x \in X : a f(x) > b \} \in \tau$

GIPTA

$b<0$, $a\neq 0$ durumu

$\{x\in X : af(x)>b\}$

$= \{x\in X : f(x) > b/a\} \in \tau$, $a>0$ ise

$= \{x\in X : f(x) < b/a\} \in \tau$, $a<0$ ise

$\Rightarrow \{x\in X : a.f(x) > b\} \in \tau$

$b\geq 0$, $a\neq 0$ durumu

$\{x\in X : af(x) < b\}$

$= \{x\in X : f(x) < b/a\} \in \tau$, $a>0$ ise

$= \{x\in X : f(x) > b/a\} \in \tau$, $a<0$ ise

$\{x\in X : af(x) < b\} \in \tau$

$b<0$, $a\neq 0$ durumu

$\{x\in X : af(x) < b\}$

$= \{x\in X : f(x) < b/a\} \in \tau$, $a>0$ ise

$= \{x\in X : f(x) > b/a\} \in \tau$, $a<0$ ise

$\{x\in X : af(x) < b\} \in \tau$

$a\neq 0$ için $af : (X,\tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{st})$ sürekli

$a=0$ için af sabit olduğundan sabit fonksiyon sürekli

Sonuç: $f, g : (X,\tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{st})$ sürekli fonksiyonlar ise

$(a.f + b.g)(x) = a.f(x) + b\,g(x)$ ile tanımlı

$af + bg : (X,\tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{st})$ sürekli

τ (X, τ) ve (Y, σ) topoloji ise

$\mathcal{B} = \{ U \times V : U \in \tau, V \in \sigma \}$ tabanı $X \times Y$ üzerinde topoloji üretir.

$\rightarrow$ $(x,y) \in X \times Y$ için

$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ ve $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$

fonksiyonları $\pi_1(x,y) = x$, $\pi_2(x,y) = y$ ile tanımlansın.

$U \in \tau$ için $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ çarpım topolojisinde açık

$V \in \sigma$ için $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ açık.

π_1 ve π_2 izdüşüm fonksiyonları süreklidir

Sonuç: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu a, b ve c sabit reel sayılar olmak üzere $f(x,y) = ax + by + c$ ile verilsin f süreklidir.

İspat: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için $\pi_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\pi_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ izdüşüm fonksiyonları

$\pi_1(x,y) = x$, $\pi_2(x,y) = y$ ile tanımlansın. $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ise $g(x,y) = c$ ile tanımlansın. π_1, π_2 ve g sürekli fonksiyonlar olduğundan $a\pi_1 + b\pi_2 + g : X \rightarrow \mathbb{R}$ süreklidir fakat $a\pi_1(x,y) + b\pi_2(x,y) + g(x,y) = ax + by + c = f(x,y)$ dir.

Dolayısıyla $a\pi_1 + b\pi_2 + g = f$ süreklidir.

Teorem: $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ise $h(x) = f(x).g(x)$ ile tanımlı $h: X \to \mathbb{R}$ süreklidir.

İspat: $f+g$ ve $f-g$ sürekli $f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$ olduğundan $f \cdot g$ süreklidir.

Sonuç: $p(x,y) = x.y$ ile verilen $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: $\pi_1(x,y) = x$ ve $\pi_2(x,y) = y$ için π_1 ve π_2 sürekli olduğundan $\partial(x,y) = \pi_1(x,y)\, \pi_2(x,y)$ ile verilen $\partial: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. $\partial(x,y) = xy = p(x,y)$ olduğundan $\partial = p$'dir p süreklidir.

Teorem: $f: X \to \mathbb{R}$ sürekli $\forall x \in X$ için $f(x) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}: X \to \mathbb{R}$ süreklidir.

İspat: Keyfi $b \in \mathbb{R}$ için

$$\left\{x \in X \mid \frac{1}{f(x)} > b\right\} = \left[\{x \in X : f(x) > 0\} \cap \{x \in X : bf(x) < 1\}\right]$$
$$\cap \left[\{x \in X : f(x) < 0\} \cap \{x \in X : bf(x) > 1\}\right]$$

geçerlidir. Eğer $b \geq 0$ ise

$$\{x \in X : f(x) < 0\} \cap \{x \in X : bf(x) > 1\} = \emptyset \text{ dur.}$$

$b < 0$ ise ilk ifadedeki dört küme gözükür.

f ve bf sürekli olduğundan dört kümede açıktır. O halde ilk ifade açıktır. Benzer şekilde $\left\{x \in X : \frac{1}{f(x)} < b\right\}$'de açıktır. O halde $\frac{1}{f(x)}$ süreklidir.

Sonuç: Eğer $f: X \to \mathbb{R}$ ve $g: X \to \mathbb{R}$ sürekli ve her $x \in X$ için $g(x) \neq 0$ ise $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ile tanımlı $\frac{f}{g}: X \to \mathbb{R}$ süreklidir.

Açık ve Kapalı Fonksiyonlar, Homeomorfizmalar

Açıklama: (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) iki topolojik uzay, $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ sürekli ise $\forall V \in \tau_Y$ için $f^{-1}(V) \in \tau_X$ geçerlidir.
Aynı şekilde f^{-1} kapalı kümeleride korur. F, τ_Y-kapalı ise $f^{-1}(F)$ τ_X kapalıdır.
Ancak $\forall U \in \tau_X$ için $f(U) \in \tau_Y$ olmak zorunda değil τ_X kapalı M için $f(M)$ τ_Y-kapalı olmak zorunda değil. (f sürekli de olsa)

Tanım: (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) topolojik uzaylar olsun. $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ $\forall G \in \tau_X$ için $f(G) \in \tau_Y$ gerçekleniyorsa açık fonksiyon olarak isimlendirilir.

Tanım: $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ fonksiyonu her τ_X kapalı M için $f(M)$ τ_Y kapalı ise kapalı fonksiyon olarak isimlendirilir.

28.12.23
Perşembe

Ör1 $X = Y = \{a,b,c\}$ $\tau_X = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$

ve $\tau_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}, \{b,c\}\}$ olsun $f: X \to Y$ fonksiyonu

$\forall x \in X$ için $f(x) = b$ ile tanımlansın.

$\to$ $\{a\} \in \tau_X$, $f(\{a\}) = \{b\} \notin \tau_Y$

f açık fonksiyon değildir.

$\{b,c\}$ τ_X-kapalı, $f(\{b,c\}) = \{b\}$ τ_Y kapalı değildir.

f kapalı fonksiyon değildir.

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset^{\in \tau_X}$, $f^{-1}(Y) = X^{\in \tau_X}$ $f^{-1}(\{a\}) = \emptyset \in \tau_X$ — çünkü bir tek b'nin görüntüsü var

$f^{-1}(\{b,c\}) = X \in \tau_X$

$\emptyset, X \in \tau_X$ yani $f: X \to Y$ sürekli ✓

Teorem: $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ bir fonksiyon olsun

Aşağıdakiler eşdeğerdir.

a) f açık fonksiyondur

b) $\forall A \subseteq X$ için $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$

c) $\forall B \subseteq Y$ için $(f^{-1}(B))^\circ \subseteq f^{-1}(B^\circ)$

d) $\forall D \subseteq Y$ için $f^{-1}(\overline{D}) \subseteq \overline{f^{-1}(D)}$

İspat: (A) $\Rightarrow$ (B)

$A^\circ \subseteq A \Rightarrow (f(A^\circ) \subseteq f(A)) \wedge$ $\quad (f(A^\circ))^\circ = f(A^\circ)$ ✓

$\wedge (f(A^\circ) \in \tau_Y) \Rightarrow f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$

GIPTA

$f: X \to Y$

$A \subseteq X \qquad A \subseteq f^{-1}(f(A))$ → birebirlik

$C \subseteq Y \qquad f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ → örtenlik

33 sayfa

(b) ⇒ (c)

$A = f^{-1}(B)$ için

$$f((f^{-1}(B))^{\circ}) \subseteq (f(f^{-1}(B)))^{\circ} \subseteq B^{\circ}$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(B))^{\circ} \subseteq f^{-1}(f(f^{-1}(B))^{\circ}) \subseteq f^{-1}(B^{\circ})$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(B))^{\circ} \subseteq f^{-1}(B^{\circ})$$

(c) ⇒ (d)

c'de $B = Y \setminus D$ alınsın

$$(f^{-1}(Y\setminus D))^{\circ} \subseteq f^{-1}((Y\setminus D)^{\circ})$$

$$(C_X D)^{\circ} = C_X \overline{D} \Rightarrow C_X(C_X \overline{D}) = \overline{D}$$

$$f^{-1}(\overline{D}) = f^{-1}(Y\setminus (Y\setminus D)^{\circ}) = X \setminus f^{-1}((Y\setminus D)^{\circ}) \subseteq$$

$$\subseteq X \setminus f^{-1}((Y\setminus D))^{\circ} = X\setminus (X\setminus f^{-1}(D))^{\circ} = \overline{f^{-1}(D)}$$

(d) ⇒ (a)

$u \in \tau_X \Rightarrow f(u) \in \tau_Y$

$D = Y \setminus f(u)$

$$f^{-1}(\overline{Y\setminus f(u)}) \subseteq \overline{f^{-1}(Y\setminus f(u))}$$

$$C_X(C_X(f^{-1}(f(u)))) =$$

$$\Rightarrow u = u^{\circ} \subseteq (f^{-1}(f(u)))^{\circ} = X \setminus \overline{X\setminus f^{-1}(f(u))} = X \setminus \overline{f^{-1}(Y\setminus f(u))}$$

y diye girdi

$$\subseteq X \setminus f^{-1}(\overline{Y\setminus f(u)}) = f^{-1}(\underbrace{Y \setminus \overline{Y\setminus f(u)}}_{f(u)^{\circ}}) = f^{-1}((f(u))^{\circ})$$

y diye girdi

$$\Rightarrow u \in f^{-1}(f(u)^{\circ})$$

$$\Rightarrow f(u) \subseteq f(f^{-1}(f(u)^{\circ})) \subseteq f(u)^{\circ}$$

$$\Rightarrow f(u) = (f(u))^{\circ} \Rightarrow f(u) \in \tau_Y$$

GIPTA

Lemma: $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ fonksiyonunun kapalı fonksiyon olması için g.y.k $\forall A\subseteq X$ için

$$\overline{f(A)}\subseteq f(\bar{A})$$ olmasıdır.

($\forall A\subset X$ için $f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}$ sürekliliğin denk koşullarından biriydi)

İspat: $(\Rightarrow)$: f kapalı fonksiyon, $A\subseteq X$ olsun. $\bar{A}$ τ_X kapalıdır

$$A\subseteq\bar{A}\Rightarrow f(A)\subseteq\underbrace{f(\bar{A})}_{\tau_Y\text{ kapalı}}\Rightarrow\overline{f(A)}\subseteq\overline{f(\bar{A})}=f(\bar{A})$$

$$\Rightarrow\overline{f(A)}\subseteq f(\bar{A})$$

$(\Leftarrow)$: Tersine $\forall A\subseteq X$ için $\overline{f(A)}\overset{(*)}{\subseteq}f(\bar{A})$ gerçeklensin

$M\ (\subseteq X)$ τ_X-kapalı ise $f(M)$ τ_Y-kapalı mıdır?

$A=M$ için $(*)$'dan

$$\overline{f(M)}\subseteq f(\bar{M})=f(M)$$

$$\Rightarrow\overline{f(M)}=f(M)$$

yani $f(M)$ τ_Y kapalıdır.

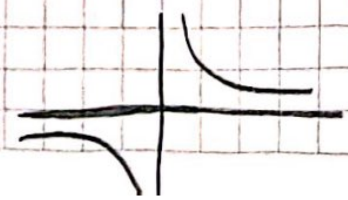
Uyarı: Bir fonksiyonun açık veya kapalı olması bu fonksiyonun sürekli olmasını gerektirmez. Ayrıca bir fonksiyonun açık olması kapalı olmasını, kapalı olması da açık olmasını gerektirm

Örn: $\mathbb{R}^2$ üzerinde standart topoloji, $\tau_{\mathbb{R}^2}$ olmak üzere

$\pi_1:(\mathbb{R}^2,\tau_{\mathbb{R}^2})\to(\mathbb{R},\tau_{st})$ fonksiyonu göz önüne alınsın.

$\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $\pi_1(x_1,x_2)=x_1$ $K=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_1x_2=1\}$

$\mathbb{R}^2$ kapalıdır



K, $(\mathbb{R}^2, \tau_{\mathbb{R}^2})$ 'de kapalı

$\pi_1(K) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

K $\tau_{\mathbb{R}^2}$ kapalı olduğu halde $\pi_1(K)$ τ_{st} - kapalı değil

π_1 sürekli ve açık fonksiyon ama kapalı fonksiyon değil

$U = \bigcup U_\alpha \times V_\alpha$ için $\pi_1(U) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$ olduğundan π_1 açık fonksiyon.

Önerme: $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ açık (kapalı) fonksiyon ve bir $B \subseteq Y$ için $A = f^{-1}(B)$ $(\subseteq X)$ formunda ise $f|_A : (A, \tau_A) \to (B, \tau_B)$ fonksiyonu açık (kapalı) fonksiyondur

İspat: $U \in \tau_A \Rightarrow \exists V \in \tau_X : U = A \cap V$ geçerlidir. Bu durumda

$$(f|_A)(U) = f(U) = f(A\cap V) = f(f^{-1}(B)\cap V) = B \cap \underbrace{f(V)}_{\in \tau_Y} \in \tau_B$$

$\Rightarrow f|_A : (A, \tau_A) \to (B, \tau_B)$ açık.

kapalı kısmı ödev

Tanım: $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ bijektif bir fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} sürekli ise f fonksiyonuna homeomorfizma denir. Eğer $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ bir homeomorfizma ise X ve Y topolojik uzaylarının her birine diğerine homeomorftur denir. ve $X \cong Y$ notasyonu kullanılır.

Lemma: $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ fonksyonunun kapalı fonksyon olması için g.y.k $\forall A\subseteq X$ için

$$\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$$ olmasıdır.

($\forall A\subset X$ için $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ sürekliliğin denk koşullarından biriy

İspat: $(\Rightarrow)$: f kapalı fonksyon, $A\subseteq X$ olsun. $\overline{A}$ τ_X kapalıdı

$$A\subseteq\overline{A}\Rightarrow f(A)\subseteq \underbrace{f(\overline{A})}_{\tau_Y \text{ kapalı}}\Rightarrow\overline{f(A)}\subseteq\overline{f(\overline{A})}=f(\overline{A})$$

$$\Rightarrow\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$$

$(\Leftarrow)$: Tersine $\forall A\subseteq X$ için $\overline{f(A)}\overset{(*)}{\subseteq}f(\overline{A})$ gerçeklensin

$M(\subseteq X)$ τ_X-kapalı ise $f(M)$ τ_Y-kapalı mıdır?

$A=M$ için $(*)$'dan

$$\overline{f(M)}\subseteq f(\overline{M})=f(M)$$

$$\Rightarrow\overline{f(M)}=f(M)$$

yani $f(M)$ τ_Y kapalıdır.

Uyarı: Bir fonksiyonun açık veya kapalı olması bu fonksiyonun sürekli olmasını gerektirmez. Ayrıca bir fonksiyonun açık olması kapalı olmasını, kapalı olması da açık olmasını gerektirm

Örn: $\mathbb{R}^2$ üzerinde standart topoloji, $\tau_{\mathbb{R}^2}$ olmak üzere

$\pi_1:(\mathbb{R}^2,\tau_{\mathbb{R}^2})\to(\mathbb{R},\tau_{st})$ fonksiyonu göz önüne alınsın

$\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $\pi_1(x_1,x_2)=x_1$ $\quad K=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1x_2=1\}$

$\mathbb{R}^2$ kapalıdır

K, $(\mathbb{R}^2, \tau_{\mathbb{R}^2})$ 'de kapalı.

$\pi_1(K) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

K $\tau_{\mathbb{R}^2}$ kapalı olduğu halde $\pi_1(K)$ τ_{st} - kapalı değil

π_1 sürekli ve açık fonksiyon ama kapalı fonksiyon değil

$U = \bigcup U_\alpha \times V_\alpha$ için $\pi_1(U) = \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ olduğundan π_1 açık fonksiyon.

Önerme: $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ açık (kapalı) fonksiyon ve bir $B \subseteq Y$ için $A = f^{-1}(B)$ $(\subseteq X)$ formunda ise $f|_A : (A, \tau_A) \to (B, \tau_B)$ fonksiyonu açık (kapalı) fonksiyondur.

İspat: $U \in \tau_A \Rightarrow \exists V \in \tau_X : U = A \cap V$ geçerlidir. Bu durumda

$$(f|_A)(U) = f(U) = f(A \cap V) = f(f^{-1}(B) \cap V) = B \cap \underbrace{f(V)}_{\in \tau_Y} \in \tau_B$$

$\Rightarrow f|_A : (A, \tau_A) \to (B, \tau_B)$ açık.

Kapalı kısmı ödev.

Tanım: $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ bijektif bir fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} sürekli ise f fonksiyonuna homeomorfizma denir. Eğer $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ bir homeomorfizma ise X ve Y topolojik uzaylarının her birine diğerine homeomorftur denir ve $X \cong Y$ notasyonu kullanılır.

• Homeomorfizmalara topolojik dönüşümler de denir.

Teorem: Homeomorf olmak bütün topolojik uzaylar ailesi üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat: $\cong$ Homeomorf olma bağıntısı ve (X, τ_X), (Y, τ_Y) (Z, τ_Z) topolojik uzaylar olsun.

a) $i : (X, \tau) \to (X, \tau)$ özdeşlik fonksiyon, yani $\forall x \in X$ için $i(x) = x$ olsun. i bijektif, sürekli ve i^{-1} de süreklidir. $X \cong X$ ✓

b) $X \cong Y$ olsun. Bu durumda bir $h : X \to Y$ homeomorfizması vardır. h bijektif ise $h^{-1} : Y \to X$ bijektiftir. h sürekli ise

2.01.24
Salı

~~[illegible]~~

İspat Devam!

b) (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) iki topolojik uzay $h : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ homeomorf olsun.

$\Rightarrow$ h bijektif, h sürekli ve h^{-1} sürekli. h bijektif ise h^{-1} bijektiftir. h^{-1} sürekli, h^{-1} bijektif ise $(h^{-1})^{-1} = h$ sürekli. h^{-1} bijektif h^{-1} ve $(h^{-1})^{-1}$ sürekli

ii) $X \cong Y$ ve $Y \cong Z$ olsun. Bu durumda $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ homeomorfileri vardır. $g \circ f : X \to Z$ fonksiyon gözönüne alınırsa g ve f bijektif olduğundan $g \circ f$ bijektiftir. Ayrıca $g \circ f$ süreklidir.

$g^{-1} : Z \to Y$, $f^{-1} : Y \to X$ sürekli olduğundan

$(f^{-1}) \circ (g^{-1}) = (g \circ f)^{-1}$ süreklidir. $g \circ f : X \to Z$ bir homeomorfi. $X \cong Z$

• $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ f $\overset{\text{1-1 örten}}{\text{bijektif}}$ $\Rightarrow$ $f(C_X A) = C_Y f(A)$

Tanım: Bir topolojik uzayın bir özelliği ona homeomorfdan bütün topolojik uzaylarda korunuyorsa bu özelliğe topolojik uzay sınıfının invaryantı veya topolojik özelliği denir.

Homeomorfluğu sezgisel bir şekilde açıklamak için aşağıda aynı satır üzerinde bulunan harflerin homeomorf olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü bir nokta sildikten sonra elde edilebilecek max parça sayısı topolojik özelliktir.

• C, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z

→ Standart topolojide açık kümelerin birleşimi olarak yazılabilir.

Bir nokta silersek max iki parça oluşuyor bunların hepsi homeomorf.

• A, R → üsttekiler ile aynı değil 1 parça da oluşuyor şekille farklı.

Bir nokta silersek max iki parça oluşur homeomorf.

• E, F, T, Y

Bir nokta silersek max üç parça oluşur. homeomorf.

Teorem: $h:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ bir bijektif fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

a) h bir homeomorfidir.

b) h açık ve süreklidir.

c) h kapalı ve süreklidir.

d) $\forall A \subseteq X$ için $h(\bar{A}) = \overline{h(A)}$

e) $\forall B \subseteq Y$ için $h^{-1}(\bar{B}) = \overline{h^{-1}(B)}$

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b)

h bir homeomorfi olsun. Tanımdan h ve h^{-1} süreklidir.

$h^{-1}: Y \to X$ sürekli olduğundan $G \in \tau_X \Rightarrow (h^{-1})^{-1}(G) \in \tau_Y$

Fakat $(h^{-1})^{-1}(G) = h(G) \in \tau_Y$. O halde h açık fonksiyondur.

(b) $\Rightarrow$ (c)

F, τ_X-kapalı olsun $X \setminus F \in \tau_X$ ve h açık fonk. olduğ. $h(X\setminus F) \in \tau_Y$. h'nin bijektifliğinden

$h(X\setminus F) = Y \setminus h(F) \in \tau_Y$

$\Rightarrow Y \setminus (Y \setminus h(F)) = h(F)$ τ_Y-kapalıdır.

(c) $\Rightarrow$ (d)

h kapalı ve sürekli olsun. Lemmadan (Kapalı fonk. karakterizas. yönünü veren) $\forall A \in X$ için $\overline{h(A)} \subseteq h(\bar{A})$ (1) h sürekli olduğundan $h(\bar{A}) \subseteq \overline{h(A)}$ (2) olur. (1) ve (2)'den
süreklilik

$h(\bar{A}) = \overline{h(A)}$

(d) ⟹ (a)

h bijektif $\forall A \subseteq X$ için $\overline{h(A)} = h(\bar{A})$ olsun.

$h(\bar{A}) \subseteq \overline{h(A)}$ ⟹ h süreklidir.

$G \in \tau_X$ ⟹ $X \setminus G$ τ_X-kapalı. $h(X \setminus G) = Y \setminus h(G)$ τ_Y kapalı. $h(G) \in \tau_Y$ ve $h(G) = (h^{-1})^{-1}(G) \in \tau_Y$. h^{-1} sürekli

(d) ⟹ (e)

$\forall A \subseteq X$ için $h(\bar{A}) = \overline{h(A)}$ gerçeklesin. $\forall B \subseteq Y$ için $h^{-1}(\bar{B}) \overset{?}{=} \overline{h(B)}$

$A = h^{-1}(B)$ için

$$h(\overline{h^{-1}(B)}) = \overline{h(h^{-1}(B))} \overset{(h \text{ üzerine})}{=} \bar{B} \Rightarrow h(\overline{h^{-1}(B)}) = \bar{B}$$

$$\Rightarrow \overline{h^{-1}(B)} \overset{1-1}{=} h^{-1}(h(\overline{h^{-1}(B)})) = h^{-1}(\bar{B})$$

$$\overline{h^{-1}(B)} = h^{-1}(\bar{B})$$

(e) ⟹ (a)

$\forall B \subseteq Y$ için $h^{-1}(\bar{B}) = \overline{h^{-1}(B)}$ ise h bir homeomorfi midir?

$\forall B \subseteq Y$ için $\overline{h^{-1}(B)} \subseteq h^{-1}(\bar{B})$ olduğundan h süreklidir.

$\forall B \subseteq Y$ için $h^{-1}(\bar{B}) \subseteq \overline{h^{-1}(B)}$ h^{-1} süreklidir.

Teorem! $f: X \to Y$ homeomorfi $A \subseteq X$ ise, A üzerindeki alt uzay topolojisi $f(A)$ alt uzay topolojisine homeomorftur.

İspat: $f: X \to Y$ bir homeomorfi olsun. f bijektif olduğundan $f|_A : A \to f(A)$ bijektiftir. Sürekli fonksiyonun kısıtlanışında sürekli, $f|_A : A \to f(A)$ süreklidir. $A = f^{-1}(f(A))$ ve $f: X \to Y$ kapalı olduğundan $f|_A : A \to f(A)$ kapalı.

f bir homeomorfi is

a) $X=[0,1]$, $Y=[0,2]$ kümeleri üzerinde $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ belirlediği alt uzay topolojisini gözönüne alınsın.

$f: X \to Y$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $f(x)=2x$ ile tanımlansın.

f bijektif ve süreklidir. Ayrıca $y \longmapsto x = y/2$ ile tanımlı f^{-1} de süreklidir. $X \cong Y$

$Y \leq 2$, $X \leq 1$ $\to$ X'de keyfi $p, q \in X$ gözönüne alınırsa $|p-q| \leq 1$

Ama Y uzayında bu bağıntı gerçeklenmez. O halde

"herhangi iki nokta arasındaki uzaklık ≤ 1" özelliği topolojik değildir.

b) $X=(-1,1)$ üzerinde $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'nin belirlediği alt uzay topolojisi gözönüne alınsın. $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ tanımlansın. f bijektif ve sürekli, $f^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$ de süreklidir.

c) $X=(0,\infty)$ olsun. X üzerinde $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'nın belirlediği alt uzay topolojisi gözönüne alınsın.

$f: X \to X$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ile tanımlansın. f bijektif

f ve f^{-1} sürekli yani f bir homeomorfidir.

$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisi f homeomorfisi bu diziyi $\{f(a_n) : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, \dots\}$ kümesine resmeder. (a_n) Cauchy dizisi $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy dizisi değil. Cauchy dizisi olmak topolojik özellik değil.

$\to n$ cauchy dizisi değil

Yoğunluk kapanışı kendisine eşit [illegible]

— doğal sayılardan kümeye üzerine fonk. tanımlanırsa sayılabilir.

d) Sayılabilir yoğun alt küme içermek topolojik özelliktir.

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $A (\subseteq X)$ sayılabilir ve $\overline{A} = X$ olsun. $f: X \to Y$ bir homeomorfi olsun.

$f|_A : A \to f(A)$ bijektif, sürekli ve $(f|_A)^{-1}$ süreklidir.

Yani bir homeomorfi. A kümesi sayılabilir olduğundan $h: \mathbb{N} \to A$ sürjektif fonksiyon vardır.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g = (f|_A)\circ h"'] & A \arrow[d, "f|_A"] \\ & f(A) \end{tikzcd}$$

Değişmeli diyagramı elde edilir. $g: \mathbb{N} \to f(A)$ sürjektif

O halde $f(A)$, Y'nin sayılabilir alt kümesidir.

f'in sürekliliğinden $Y \overset{f \text{ üzerine}}{=} f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

$\Rightarrow Y \subseteq \overline{f(A)} \ (\subseteq Y)$

$\Rightarrow \overline{f(A)} = Y$

$f(A)$ Y'nin sayılabilir yoğun alt kümesidir.

4.01.24
Perşembe

Teorem: $f: X \to Y$ ve $g: Y \to X$ sürekli $g \circ f = I_X$ ve $f \circ g = I_Y$ ise f bir homeomorfi ve $g = f^{-1}$ dir.

İspat: $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ fonksiyonları $g \circ f = I_X$ ve $f \circ g = I_Y$ gerçekliyor ise f de g de bijektiftir ve $g = f^{-1}$ dir.

O halde f bijektif f ve f^{-1} sürekli yani f bir [illegible]

GIPTA

Örn: $(\mathbb{R}, \tau_{st})$ uzayı ile $(\mathbb{R}, \tau_{st})$'nin $(-1,1)$ üzerinde belirlediği alt uzay topolojisi gözönüne alınsın.
$x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ile tanımlı $f: \mathbb{R} \to (-1,1)$ bir homeomorfizmdir.

$\rightarrow$ (Not edelim ki $|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$)

$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ süreklidir.

f'in tersi olan $g(y) = \frac{y}{1-|y|}$ ile tanımlı $g: (-1,1) \to \mathbb{R}$ sürekli

$$x \xrightarrow{f} \frac{x}{1+|x|} \xrightarrow{g} \frac{\frac{x}{1+|x|}}{1-\frac{|x|}{1+|x|}} = x$$

$g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ ve benzer şekilde ✓

$$y \xrightarrow{g} \frac{y}{1-|y|} \xrightarrow{f} \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1+\left|\frac{y}{1-|y|}\right|} = y$$

$(1-|y|>0)$

$f \circ g = I_{(-1,1)}$

$g = f^{-1}$ ve f bir homeomorfizm ✓

Teorem: $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ bir homeomorfizm, $A \subseteq X$ olsun. $f(A') = (f(A))'$ gerçeklenir.

İspat: $y \in f(A') \Rightarrow \exists a \in A' : f(a) = y$ $\quad y \in (f(A))'$?

$y = f(a) \in V \in \tau_Y$ olsun.

$\xRightarrow{f \text{ sürekli}} (f^{-1}(V) \in \tau_X) \wedge (a \in f^{-1}(V))$