- 13 MAYIS SALI -

SORU = $E \in \mathcal{M}$, f ve g de E üzerinde tanımlanmış genişletilmiş gerçel değerli ölç. bilir fonk. lar olsun.

(1) $\{x \in E : f(x) > g(x)\}$

(2) $\{x \in E : f(x) \geq g(x)\}$

(3) $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$

Ayrıca $f \vee g$, $f \wedge g$, f^+, f^- ölçülebilirdir! Gösteriniz.

Çözüm: (1) $\{x \in E : f(x) > g(x)\}$ kümesi ölç. bilirdir Neden?
Rasyonel sayılar yoğun old; (Reel sayıların tamlığından) iki reel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır.
$\exists r \in \mathbb{Q}$ vardır öyle ki : $f(x) > r > g(x)$ sağlanır.

$\{x \in E : f(x) > g(x)\} = \{x \in E : f(x) > r > g(x)\}$ $f(x) > r$ ve $g(x) < r$

$$= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in E : f(x) > r\} \cap \{x \in E : g(x) < r\}$$

$r \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ için f ve g fonk. ları ölç. bilir old;
⊛ ve ⊛⊛ ölç. bilir kümelerdir. Ölçülebilir kümeler ailesi σ-cebri old;

$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in E : f(x) > r\} \cap \{x \in E : g(x) < r\}$ ölçülebilir kümedir. $\{x \in E : f(x) > g(x)\}$ ölçülebilirdir.

(*) için ;

$$\int_I f\,dm \overset{(**)\text{dan}}{=} f_I \cdot \ell(I) \quad \text{olduğundan;}$$

$$\int_I f\,dm - \int_I f_I\,dm = f_I\,\ell(I) - f_I\,m(I)$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{sonlu} \\ m(I)=\ell(I)}}{I \subseteq \mathbb{R}} = f_I\,\ell(I) - f_I\,\ell(I) = 0 \quad \text{bulunur.}$$

Buradan da ; $\displaystyle\int_{E_1} (f-f_I)\,dm + \int_{I \setminus E_1} (f-f_I)\,dm = 0$

$$\int_{E_1} (f-f_I)\,dm = -\int_{I\setminus E_1} (f-f_I)\,dm$$

(***)

$$= \int_{I\setminus E_1} (f_I - f)\,dm$$

$$\int_I |f-f_I|\,dm = \int_{E_1} \underbrace{|f-f_I|}_{>0} + \int_{I\setminus E_1} \underbrace{|f-f_I|}_{<0}$$

$$= \int_{E_1} (f-f_I)\,dm + \int_{I\setminus E_1} (f_I - f)\,dm$$

(***)dan

$$= 2\int_{E_1} (f-f_I)\,dm$$

$m(\mathbb{Q}\cap(0,1)) = 0$ ve $(0,1)$ aralık old. $m((0,1))=1$ olur.

O halde, $m(I\mathbb{Q}\cap(0,1)) = 1$ olur.

$$I_{(0,1)}(\varphi) = 2\cdot \underbrace{m(\mathbb{Q}\cap(0,1))}_{0} + 1\cdot \underbrace{m(I\mathbb{Q}\cap(0,1))}_{1}$$

$I_{(0,1)}(\varphi) = 1$ olur.

SORU= φ bir basamak fonksiyonu ve $I(|\varphi|)=0$ ise hemen hemen her yerde $\varphi=0$ olur. Gösteriniz.

Çözüm= $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(x)$

$A_k = \{x : \varphi(x)=\alpha_k\}$ basamak fonksiyonumuz olalım.

$|\varphi| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \chi_{A_k}(x)$ olur.

Kabulden $I(|\varphi|) = 0$ dır.

$0 = I(|\varphi|) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\, m(A_k)$ olur.

I. durum = $|\alpha_k|=0$ olsun.

$|\alpha_k|=0 \Rightarrow \alpha_k=0$ olur. Fonksiyon tanımından her x için $\varphi(x)=0$ olur. $\varphi\equiv 0$ dır.

fonksiyonu ölçülebilirdir.

Göstermemiz gereken : $\{x\in[a,b] : \varphi(x)=\alpha_k>\alpha\}$ kümesi ölçülebilir midir?

$$\{x\in[a,b] : \varphi(x)=\alpha_k>\alpha\}$$

$$\{x\in \bigcup_{k=1}^{n} I_k = I : \varphi(x)=\alpha_k>\alpha\}$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{\{x\in I_k : \varphi(x)=\alpha_k>\alpha\}}_{\in\mathcal{M} \text{ bulmuştuk.}}$$

Ölçülebilirlik σ- cebri old., birleşimleri de ölçülebilir.

$\{x\in[a,b] : \varphi(x)>\alpha\}$ ölçülebilir kümedir. $\varphi(x)$ basamak fonk. ölçülebilir olur.

SORU: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ ölçü uzayı ve

$$\varphi(x)=\begin{cases} 2 & , 0\le x<1 \\ 3 & , 2<x\le 4 \\ 1 & , 4<x\le 5 \end{cases}$$

olmak üzere, $I_{[0,1)\cup(2,5]}(\varphi)$ integralini hesaplayınız.

$\mu=\lambda$ Lebesgue ölçüsü old. dan $\mu(\{n\})=0$ olur.

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu = 0$$ bulunur.

(b) için çözüm: $$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \underbrace{\mu(\{n\})}_{1}$$

μ sayma ölçüsü old. dan $\mu(\{n\})=1$ olur.

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \underbrace{\mu(\{n\})}_{1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$$ oldu.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{N}} f\,d\mu = 1$$

MSM

Reel Analiz
03.06.2025
SALI

SORU: Monoton yakınsaklık teoremi kullanarak;

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx = e-1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $n\in\mathbb{N}$ ve her $x\in[0,1]$ için,

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{olsun.}$$

(i) $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall x\in[0,1]$ için $f_n(x)\geq 0$ old. nonnegatif dur,

(ii) $\{f_n\}$ fonk. dizisi polinom fonk. old. süreklidir. Dolayısıyla ölçülebilirdir.

(iii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{?}{=} f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Hatırlatma. (Bernoulli Eşitsizliği) $x>0$, $n\geq 1$ için, $(1+x)^n \geq 1+nx$ eşitsizliğini sağlar

$\{f_n\}$ monoton artan mıdır?

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

(*) dikkat.

$$= \left(\frac{n^2+nx+n}{n^2+nx+n+x}\right)^{n+1}\left(\frac{n+x}{n}\right)$$

Bernoulli'deki x yerine $\frac{x}{n+x}$ kabul edildi.

Bernoulli in.

$$= \left(1-\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1}\left(\frac{n+x}{n}\right) \geq \left(1-\frac{x}{(n+x)(n+1)}(n+1)\right)\left(\frac{n+x}{n}\right)$$

$E_2=\{x\in[a,b] : y_1 \le f(x) < y_2\}=\emptyset$

$\vdots$

$E_{n-1}=\{x\in[a,b] : y_{n-2} \le f(x) < y_{n-1}\}=\emptyset$

$E_n=\{x\in[a,b] : y_{n-1} \le f(x) < y_n\} = \mathbb{Q}\cap[a,b]$

$f(x)=1$ 'i sağlayan x değerleri

Fonksiyon yalnızca iki değer aldığından sadece iki küme baştan farklı olur.

$m(E_2)=\cdots=m(E_{n-1})=m(\emptyset)=0$ olur. $(k=2,\dots,n-1$ için$)$

$m(E_n)=m(\underbrace{\mathbb{Q}\cap[a,b]}_{\text{Sayılabilir}})=0$ olur.

$[a,b]=(\mathbb{Q}\cap[a,b])\cup(\mathbb{I}\mathbb{Q}\cap[a,b])$

$m([a,b])=b-a$ ve $m(\mathbb{Q}\cap[a,b])=0$ old. ;

$\hookrightarrow m((\mathbb{Q}\cap[a,b])\cup(\mathbb{I}\mathbb{Q}\cap[a,b])) \overset{\text{ayrık}}{=} m(\mathbb{Q}\cap[a,b])+m(\mathbb{I}\mathbb{Q}\cap[a,b])$

$m(\mathbb{I}\mathbb{Q}\cap[a,b])=b-a=m(E_1)$ olur.

f sınırlı old. dan f fonksiyonu alttan ve üstten sınırlayan basit fonksiyonlar vardır.

Her $x\in[a,b]$ için;

$$= \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) \cdot \left(\frac{n+x}{n}\right)$$

$$= \frac{n}{n+x} \cdot \frac{n+x}{n} = 1 \text{ olur.}$$

O zaman, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ bulduk. $\{f_n\}$ monoton artan olur. Monoton Yakınsaklık Teoreminden;

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^x dx = e-1$$

Soru= $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Her sonlu $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı için; $f_I = \frac{1}{\ell(I)} \int_I f dm$ ... (**) ve

$$E_1 = \{x \in I : f(x) > f_I\} \text{ ile tanımlansın.}$$

$$\int_I |f - f_I| dm = 2\int_{E_1} (f - f_I) dm \text{ olur.}$$

Çözüm: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_I \in \mathbb{R}$ old. biliniyor.

$I = E_1 \cup (I \setminus E_1)$ ve $E_1 \cap (I \setminus E_1) = \emptyset$

$$\int_I (f - f_I)dm + \int_{I\setminus E_1} (f - f_I)dm = \int_I (f - f_I)dm$$

$m(I) < \infty$

$$= \underbrace{\int_I f dm - \int_I f_I dm}_{(*)}$$

SORU= $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{x^3(1-x)^{n+1} e^{nx}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2+n}} \, dm$ limit değerini bulunuz.

Çözüm= (i) $m([0,1]) = 1 < \infty$

(ii) $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$ için;

$$f_n(x) = \frac{x^3(1-x)^{n+1} e^{nx}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2+n}}$$

$\{f_n(x)\}$ polinom fonk. $[0,1]$ aralığında sürekli

O halde $\{f_n\}$ ölçülebilir.

(iii) Yardımcı ifade $= e^x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}$ her $n \in \mathbb{N}$ ve

$x \in [0,1]$ için;

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x^3(1-x)^{n+1} e^{nx}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2+n}} \right| \leq \underbrace{x^3(1-x)^{n+1}}_{*}$$

O halde Yar. if. kullanarak,

$$e^{nx} \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2+n} \Rightarrow \frac{e^{nx}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2+n}} \leq 1 \text{ bulunur.}$$

$x \in [0,1]$ old. , $1-x \geq 0$ ve $1-x \leq 1$ olur. (*) dan devam edersek ;

SORU= f, $[0,1]$ aralığını $\mathbb{R}^*$'a resmeden hemen hemen her yerde sınırlı ve ölçülebilir bir fonk. olsun. Buna göre;

$B_n = \{ x \in [0,1] : |f(x)| \leq \log n \}$ olarak tanımlanan kümelerin

ölçülebilir old. gösteriniz. Varsa $\lim_{n\to\infty} m(B_n)$ bulunuz.

Çözüm= (Hatırlatma = $\{E_n\}$ Monoton artan ölçülebilir dizi o.ü.
$m\left(\bigcup E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$)

(1) B_n ölçülebilir mi?

$B_1 = \{ x \in [0,1] : |f(x)| \leq \underbrace{\log 1}_{0} \} = \{ x \in [0,1] : f(x) = 0 \}$

f ölçülebilir old; o zaman $B_1 \in \mathcal{M}$

$B_2 = \{ x \in [0,1] : |f(x)| \leq \log 2 \} = \{ x \in [0,1] : -\log 2 \leq f(x) \leq \log 2 \}$

$= \{ x \in [0,1] : f(x) \geq -\log 2 \} \cap \{ x \in [0,1] : f(x) \leq \log 2 \}$

f ölçülebilir fonk. old.; bu iki küme ölçülebilirdir. $B_2 \in \mathcal{M}$

Her n için sağlandığından; $B_n \in \mathcal{M}$ olur.

(2) Tanımı gereğince B_n $n \geq 1$ için $n < n+1 \Rightarrow \log n < \log(n+1)$

Yani $[-\log n, \log n] \subset [-\log(n+1), \log(n+1)]$ olur. O halde; $B_n \subseteq B_{n+1}$

olur. B_n monoton artandır.

$x \in (-1,1)$ için $f_n(x) = 1$ olduğundan

$|f_n(x)| = 1 = g$ $\quad \int_{(-1,1)} 1\, dm = 1\cdot m((-1,1)) = 2 < \infty$

$|f_n(x)| \le 1 = g$ o.ş. $g \in \mathcal{L}((-1,1))$ bulunur.

$x \in (-\infty,-1]$ için $\quad f_n(x) = \dfrac{n^{3/2} x}{e^{n^2x^2}}$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{n^{3/2}x}{e^{n^2x^2}}\right| \le \frac{n^2|x|}{e^{n^2x^2}} \le \frac{n^2x^2}{e^{n^2x^2}} \le 1$$

$$\int_{-\infty}^{-1} 1\, dx = \int_{-\infty}^{-1} 1\, dm = \infty \notin \mathcal{L}((-\infty,-1])$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \infty & , x \in [1,\infty) \\ 1 & , x \in (1,-1) \\ 0 & , x \in (-\infty,-1] \end{cases}$$

$x \in [1,\infty)$ için $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+nx)}{1+nx^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{1+nx}}{x^2} = 0$

$x \in (-\infty,-1]$ için $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}x}{e^{n^2x^2}} = 0$

$f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$ olur. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n\, dm = \int_{(-1,1)} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = 1\cdot m((-1,1)) = 2 \text{ bulunur.}$$

<u>SORU</u>= Lebesgue Y.T. kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{x^n}{1+x^n}\, dx = 1 \text{ old. gösteriniz.}$$

<u>Çözüm</u> Her $n \in \mathbb{N}$ ve $\forall\, x \in [0,2]$ için

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \text{ olsun.}$$

(i) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ polinom fonk. sürekli old ölçülebilirdir.

(ii) $\displaystyle |f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \le 1 = g$ olur.

$\quad x^n \le 1+x^n$

$g \in \mathcal{L}([0,2])$? $\Rightarrow \displaystyle \int_{[0,2]} 1\, dm = 1\, m([0,2]) = 2 < \infty$

O halde $|f_n| \le g = 1$ o.ş. $g = 1 \in \mathcal{L}([0,2])$ bulduk.

(iii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{?}{=} f(x)$ hhhy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x < 1 \\ 1/2 & , x = 1 \\ 1 & , 1 < x \le 2 \end{cases}$$

SORU= $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ o.ü. $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$ integralini,

(a) $\mu = \lambda$ Lebesgue ölçüsü olma durumunda

(b) μ sayma ölçüsü olma durumunda;

$\{f_n\}$

Çözüm = $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}} \frac{1}{x(x+1)} d\mu = \int_X \frac{1}{x(x+1)} \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}}$

$$\left[\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu \right]$$

$$\Rightarrow \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} \chi_{\{n\}}(x) d\mu$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \frac{1}{x(x+1)} \chi_{\{n\}}(x) d\mu \qquad \boxed{\int_E d\mu = \mu(E)}$$

M.Y.T. sonucu

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{n\}} \frac{1}{x(x+1)} d\mu \underset{\substack{n=x \\ \text{olduğundan}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \int_{\{n\}} d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \mu(\{n\})$$

(a) için çözüm = $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \mu(\{n\})$

II. durum= $m(A_k)=0$ ve $|\alpha_k|>0$, $\forall k$ için olduğunu kabul edelim.

$$m(A_k) = m\left(\{x : \varphi(x) = \alpha_k > 0\}\right) = 0 \text{ olur.}$$

$\varphi(x)$ fonksiyonu hemen hemen her yerde 0 olur. $\varphi=0$'dır.

$\varphi(x)=\alpha_k$ olan durumda ya ölçü "0" ya da $\alpha_k=0$ olur.

Yani sıfır olmayan değerler yalnızca ölçüsü "0" olan kümede alınır. Dolayısıyla $\varphi(x)=0$ hhhy olur.

SORU= $b-a<\infty$ olsun.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & x\in \mathbb{I}\mathbb{Q}\cap[a,b] \\ 1, & x\in \mathbb{Q}\cap[a,b] \end{cases}$$

ile verilen f fonksiyonunun Riemann ve Lebesgue integralini araştırınız.

Çözüm= $[a,b]$ aralığının parçalanışı $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ olarak yazılsın. Her $I_k=[x_{k-1},x_k]$ aralığında fonksiyonun en küçük ve en büyük değeri sırasıyla $\frac{1}{2}$ ve 1 dir.

$$s_k=\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot \underbrace{\Delta x_k}_{x_k-x_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} m_k\cdot(x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$$

f fonk. ; $[0,1]$'in ölçüsü sıfıra eşit bir A alt kümesi dışında her yerde sınırlıdır. Her $x \in [0,1] \setminus A$ için ; $|f(x)| \leq \log n$ sağlanır. $m(A)=0$ olur.

İddia= $[0,1] \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ olur. (ödev)

$$m\left(\bigcup B_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) = m\left([0,1] \setminus A\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} m(B_n) = \underbrace{m([0,1])}_{1} - \underbrace{m(A)}_{0} = 1$$ bulunur.

SORU= Sonlu bir I aralığı üzerinde tanımlanmış tüm basamak fonk. ları ölçülebilirdir.

20 Mayıs Salı Reel Analiz

SORU= Sonlu bir I aralığı üzerinde tanımlanmış tüm basamak fonk. ları ölçülebilirdir.

Çözüm= $I=[a,b]$ olsun.

$[a,b]$ 'nın parçalanışı ; $a=\xi_0<\xi_1<\dots<\xi_{n-1}<\xi_n=b$ noktaları ile yapılır. $I_k=[\xi_{k-1},\xi_k]$ olsun. $I=\bigcup_{k=1}^{n} I_k$

ve bu aralık üzerinde tanımlanmış bir $\varphi(x)$ basamak fonksiyonu gözönüne alınsın.

$$I_k=\{x\in I \quad \varphi(x)=\alpha_k\}=\varphi^{-1}(\{\alpha_k\})$$

olarak tanım gereği seçebiliriz. Her $\alpha\in\mathbb{R}$ için;

$\{x\in I_k : \varphi(x)=\alpha_k>\alpha\}$ kümenin ölçülebilir old. göstereceğiz

$$\underbrace{\{x\in I_k : \varphi(x)=\alpha_k>\alpha\}=\begin{cases} I_k & ,\alpha_k>\alpha \\ \emptyset & ,\alpha_k\le\alpha \end{cases}}_{*}$$

$I_k=[\xi_{k-1},\xi_k]$ aralık ve aralıklar ölçülebilir old. dan;

$I_k\in\mathcal{M}$ olur. $\emptyset\in\mathcal{M}$ $*$ ölçülebilirdir. O halde;

$\{x\in I_k : \varphi(x)=\alpha_k>\alpha\}$ kümesi ölçülebilirdir. $\varphi(x)$ basamak

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\, \chi_{E_k}(x) \quad \text{ve} \quad \psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \chi_{E_k}(x)$$

basit fonksiyonlar her $x \in [a,b]$ için,

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x) \text{ olur.}$$

$$I_{[a,b]}(\psi_n) = \sum_{k=1}^{n} y_k\, m(E_k)$$

$$= y_1 \cdot m(E_1) + y_2 \cdot \overbrace{m(E_2)}^{0} + \dots + y_n \overbrace{m(E_n)}^{0}$$

$$= y_1 \cdot m(E_1) = y_1 \cdot (b-a) > \frac{1}{2} \cdot (b-a)$$

$$I_{[a,b]}(\varphi_n) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\, m(E_k)$$

$$= y_0\, m(E_1) + \underbrace{\dots}_{0}$$

$$= y_0 \cdot (b-a) \leq \frac{1}{2} \cdot (b-a)$$

Tüm parçalanışlar için

$$\sup\left(I_{[a,b]}(\varphi_n)\right) = \inf\left(I_{[a,b]}(\psi_n)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(b-a) = \int_{[a,b]} f\, dm$$

bulunur. O halde $f \in \mathcal{L}([a,b])$ olur.

$$= \frac{1}{2}[\overset{x_n}{b} - \overset{x_0}{a}]$$

$$S_k = \sum_{k=1}^{n} M_k \, \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$= 1 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k - x_{k-1}}_{b-a} = b - a$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup s_k = \frac{1}{2}(b-a) \\ \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf S_k = b-a \end{array}\right) \neq$$

olduğundan, $f \notin R([a,b])$ olur. f Riemann integrallenemez.

Fonksiyon Lebesgue integrallenebilir midir?

Değer aralığı $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, y_k noktaları ile parçalansın.

$y_0 \le \frac{1}{2} < y_1 < \dots < y_{n-1} < 1 < y_n$ olsun. (Değer aralığını parçal

Tanım aralığı $[a,b]$'nin bu parçalanışına karşılık gelen parçalanış

$$E_k = \{x \in [a,b] : y_{k-1} \le f(x) \le y_k\} \quad k = 1, \dots, n$$

$$E_1 = \{x \in [a,b] : y_0 \le f(x) < y_1\} \overset{f(x)=\frac{1}{2}}{=} I\mathbb{Q} \cap [a,b] \Rightarrow x \in I\mathbb{Q} \cap [a,b]$$

Çözüm= Hatırlatma = $\varphi \in B(E)$ için; $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$;

E_i'ler i.i.a.

$I_E : B(E)\longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonel; $I_E(\varphi)=\sum_{k=1}^{n} \alpha_k m(E_k)$ olarak tanımlanır.

Çözüm= $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}(x)$ olarak basit fonksiyonu tanımlayalım.

$X=[0,1)\cup(2,4]\cup(4,5]$

$E_1=[0,1)$, $E_2=(2,4]$, $E_3=(4,5]$ i.i. ayrıklar.

$$\varphi(x)=2\chi_{[0,1)}+3\chi_{(2,4]}+1.\chi_{(4,5]}$$

Kanonik gösterimi bu şekildedir.

Bu bilgileri kullanarak;

$$I_{[0,1)\cup(2,5]}(\varphi)=2\cdot m([0,1))+3\cdot m((2,4])+1\cdot m((4,5])$$

$$=2.1+3.2+1.1=9$$

$\boxed{m([a,b])=b-a}$ //

SORU= φ basit ölçülebilir ve negatif olmayan bir fonk. ve $E \in \mathcal{M}$ olmak üzere $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ üzerinde,

$$\gamma(E) = \int_X \varphi \chi_E \, dm$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçüdür. Gösteriniz.

Çözüm= (i) $\gamma(\emptyset) \overset{?}{=} 0$

$$\gamma(\emptyset) = \int_X \varphi \chi_\emptyset \, dm = \underbrace{\int_\emptyset \varphi \, dm}_{?}$$

$$\int_{U\emptyset} \varphi \, dm = \int_X \varphi \chi_{U\emptyset}(x) \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi \chi_\emptyset(x)$$

M.Y.T. sonucundan;

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_\emptyset(x)$$

φ basit fonk. olduğundan "a_k" olarak yazdık.

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(\emptyset) = 0$$

(ii) $E \in \mathcal{M}$ için $\gamma(E) \overset{?}{\geq} 0$

$$\gamma(E) = \int_E \varphi \, dm \geq \int_E 0 \, dm = 0 \cdot m(E) = 0$$

φ nonnegative

$\Rightarrow \gamma(E) \geq 0$ olur.

(iii) $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ i.i.a. kümelerin dizisi olur.

Monoton yakınsaklık teoreminin sonucundan;

$$\gamma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(E_i)$$

$$\gamma(\cup E_i) = \int_X \varphi \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} \, dm = \int_X \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}\right) dm$$

Karakteristik fonksiyonun özelliğinden

M.Y.T. sonucundan

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \varphi \chi_{E_i} \, dm$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(E_i)$$

O halde γ dönüşümü $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçüdür.

SORU= $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{x^2 \ln(1+nx)}{e^{nx}-1} \, dm$ limit değerini bulunuz.

Çözüm= (i) $m(E) < \infty$

$m([0,1]) = 1 < \infty$

(ii) $n \in \mathbb{N}$, $x \in (0,1]$ için $\{f_n\}$ ölçülebilir midir?

$$f_n(x) = \frac{x^2 \ln(1+nx)}{e^{nx}-1}$$

$\{f_n\}$ fonk. dizisi polinom fonk. old. $(0,1]$ aralığında süreklidir.

O halde $\{f_n(x)\}$ ölçülebilir fonk.

(3) G_δ türü küme için; Her $n \in \mathbb{N}$ için O_n'ler açık kümeler olsun.

$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ ile tanımlanan $G \in G_\delta$ olur.

$$f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\right) = \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(O_n)}_{\text{Not'tan ölçülebilir}}}_{\in \mathcal{M}}$$

O halde $f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$ olur.

(4) F_σ türü küme için $F \in F_\sigma$ alalım. $F^c \in G_\delta$ olur. Buradan;

$f^{-1}(F) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus F^c) = f^{-1}(\mathbb{R}) \setminus f^{-1}(F^c)$ (3)'den $F^c \in G_\delta$ olduğundan $f^{-1}(F^c) \in \mathcal{M}$

$f^{-1}(\mathbb{R})$, f'in tanım kümesidir. f ölçülebilir bir fonk. old. tanım kümesi de ölçülebilirdir ($f: E \to \mathbb{R}$; $E \in \mathcal{M}$ old) O zaman $f^{-1}(\mathbb{R}) \in \mathcal{M}$

$$f^{-1}(F) = \underbrace{f^{-1}(\mathbb{R})}_{\in \mathcal{M}} \cap (f^{-1}(F^c))^c$$

O halde, $f^{-1}(F) \in \mathcal{M}$ olur.

$F_n(x) = n \cdot f(x+\frac{1}{n}) - n \cdot f(x)$ Borel ölçülebilir fonk. olur.

f' türev fonksiyonu da Borel ölçülebilirdir.

SORU= Tüm aralıkların, G_δ ve F_σ türü kümelerin ölçülebilir bir fonk. altında ters görüntüsü de ölçülebilirdir. Gösteriniz.

Çözüm: $a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$ olsun. $f: E \to \mathbb{R}^*$ ölçülebilir fonk. olsun.

(1) (a,b)

$$f^{-1}((a,b)) = f^{-1}([-\infty,b) \cap (a,\infty]) = f^{-1}([-\infty,b)) \cap f^{-1}((a,\infty])$$

f ölçülebilir old. $f^{-1}([-\infty,b))$ ve $f^{-1}((a,\infty])$ ölçülebilir $\mathcal{M}$ σ-cebri olduğundan arakesitleri de ölçülebilir.

$f^{-1}((a,b))$ ölçülebilir.

$-\infty$ a b ∞

(2) $[a,b]$ $f^{-1}([a,b]) = f^{-1}([-\infty,b] \cap ([a,\infty])) = \underbrace{f^{-1}([-\infty,b])}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{f^{-1}([a,\infty])}_{\in \mathcal{M}}$

O halde ; $f^{-1}([a,b]) \in \mathcal{M}$

a b

Üçüncü adımda ; $a_n < b_n$ ve $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ $I_n = (a_n, b_n)$ aralıkları göz önüne alınsın. $\mathbb{R}$ içindeki açık kümeler, her zaman açık aralıkların sayılabilir birleşimi olarak yazılabilir.

$\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ile tanımlanan $\mathcal{O}$, $\mathbb{R}$ de açık bir kümedir. f ölçülebilir bir fonk ve $\mathcal{M}$ bir σ-cebri old;

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(I_n)}_{\in \mathcal{M}}}_{\in \mathcal{M}}$$ O halde $f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{M}$

⊛ Açık kümelerin ölçülebilir fonk. altında ters görüntüsü ölçülebilir

Soru= $\{f_n\}$ ölçülebilir fonk. dizisi ve $\lim_{n\to\infty} f_n = g$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n - f|\,dm = 0 \quad \text{ise}$$

$[0,1]$ aralığında hhhy $f=g$ olur.

Çözüm: [Fatou Lemması kullanılacak]

$E\in\mathcal{M}$ $\{f_n\}$ nonnegatif ve ölçülebilir fonk. dizisi E'de hhhy, $\lim f_n = f$ olsun.

$$\int_E f\,dm \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n\,dm$$

Kabulden $\lim_{n\to\infty} f_n = g$ olsun.

$$f_n \to g \implies |f_n - g| \to 0$$

$$\implies |f_n - f + f - g| \to 0$$

↓ üçgen eşitsizliği

$$\implies \big|\, |f_n - f| - |g - f| \,\big| \to 0$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} |f_n - f| = |g - f|$$

Buradan : $\{|f_n - f|\}_{n=1}^{\infty}$ nonneg. ölç. bilir fonk.'ların dizisidir. Fatou Lemmasına göre;

$$\underline{\int_{[0,1]} |g - f|\,dm} \overset{(*)}{\leq} \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_{[0,1]} |f_n - f|\,dm$$

Varsayımdan ; $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n - f|\,dm = 0$ dır.

Teorem: $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n = f \iff \lim_{n\to\infty} f_n = f$

SORU= $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), m)$ ölçü uzayı, $\varphi:(0,1)\to\mathbb{R}$

$$\varphi(x)=\begin{cases} 2, & x\in \mathbb{Q}\cap(0,1) \\ 1, & x\in I\mathbb{Q}\cap(0,1)\end{cases}$$

olmak üzere $I_{(0,1)}(\varphi)=?$

Çözüm= $\varphi(x)= 2\chi_{\mathbb{Q}\cap(0,1)} + 1\chi_{I\mathbb{Q}\cap(0,1)}$

$(\mathbb{Q}\cap(0,1))\cap(I\mathbb{Q}\cap(0,1))=\emptyset$ old. bu kümeler ayrıktır.

$I_{(0,1)}$ fonksiyoneli için;

$$I_{(0,1)}\varphi = 2m(\mathbb{Q}\cap(0,1)) + 1\cdot m(I\mathbb{Q}\cap(0,1))$$

$\mathbb{Q}\cap(0,1)$ sayılabilir old. dan $m(\mathbb{Q}\cap(0,1))=0$ olur.

O halde ; $m(I\mathbb{Q}\cap(0,1))=?$

$(0,1)=(I\mathbb{Q}\cap(0,1))\cup(\mathbb{Q}\cap(0,1))$

$m((0,1))= m((I\mathbb{Q}\cap(0,1)\cup(\mathbb{Q}\cap(0,1)))$

$= m(I\mathbb{Q}\cap(0,1)) + m(\mathbb{Q}\cap(0,1))$

ikişer ikişer ayrık old.

olduğu kullanılırsa;

$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n - f| dm = 0$ dır. Buradan da, ⊛'dan ; $\int_{[0,1]} |g-f| dm = 0$ olur.

O halde hhhy $f=g$ dir.

Soru= $n\in\mathbb{N}$ için genel terim;

$$f_n(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+nx)}{1+nx^2} &, x\in[1,\infty) \\ 1 &, x\in(-1,1) \\ n^{3/2}\cdot x\cdot e^{-n^2x^2} &, x\in(-\infty,-1] \end{cases}$$

ile tanımlanan $\{f_n\}$ fonk. dizisi verilsin.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = ?$$

Çözüm= (i) $E=\mathbb{R}\in\mathcal{M}$

(ii) Her $n\in\mathbb{N}$ ve $x\in\mathbb{R}$ için;

$x\in[1,\infty)$ olsun. $f_n(x)=\dfrac{\ln(1+nx)}{1+nx^2}$ olsun.

Ne istiyoruz?

$|f_n|<g$ o.ş. $g\in\mathcal{L}(\mathbb{R})$ var mı?

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\ln(1+nx)}{1+nx^2}\right| \leq \left|\frac{nx}{1+nx^2}\right| < \left|\frac{nx^2}{1+nx^2}\right|$$

$\ln(1+nx)\leq nx \leq nx^2 \leq 1$

$|f_n(x)|\leq 1=g$

$$\int_1^\infty g(x)dx = \int_{[1,\infty)} 1\,dx = m(\infty)=\infty \notin \mathcal{L}$$

(iii) $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in (0,1]$ için;

(*) $\ln t \leq t-1$ ve (**) $y+1 \leq e^y$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x^2 \ln(1+nx)}{e^{nx}-1} \right|$$

$\ln(1+nx) \leq nx \leq e^{nx}-1$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\frac{\ln(1+nx)}{e^{nx}-1} \leq 1 \text{ bulunur.}$$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x^2 \ln(1+nx)}{e^{nx}-1} \right| \leq x^2 \leq 1 = M$$

O halde $M=1>0$ ö.ş. $|f_n(x)| \leq 1$ old., $\{f_n\}$ sınırlıdır.

(iv) $\lim f_n(x) = f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2 \ln(1+nx)}{e^{nx}-1} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 \cdot \frac{x}{1+nx}}{x \cdot e^{nx}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(1+nx)e^{nx}} = 0 \text{ dır}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$$

Sınırlı yakınsaklık Teoremi gereğince,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, dm = \int_{[0,1]} f \, dm = \int_{[0,1]} \lim f_n \, dm$$

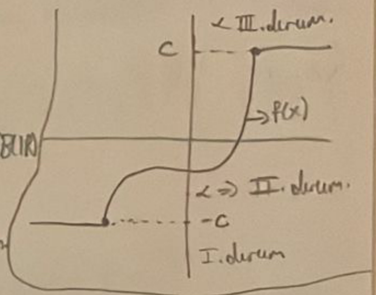
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, dm = \int_{[0,1]} f \, dm = \int_{[0,1]} \lim f_n \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, dm = \int_{[0,1]} 0 \, dm = 0 \text{ olur.}$$

27 Mayıs Salı Reel Analiz

SORU = $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon ve $c > 0$ olsun.

$$f_c(x) = \begin{cases} f(x) & ; \ |f(x)| \leq c \\ c & , \ f(x) > c \\ -c & , \ f(x) < -c \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f_c fonksiyonunun ölçülebilir old. gösteriniz



Çözüm = I. Durum: $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.

$\alpha < -c$ için; $\{x \in \mathbb{R} : f_c(x) > \alpha\} = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

f_c fonk. $[-c, c]$ arasında değer aldığından alacağı minimum değer "$-c$" olur.

$f_c(x) \geq -c > \alpha \Rightarrow f_c(x) > \alpha$

II. durum: $-c \leq \alpha < c$ olsun.

$\{x \in \mathbb{R} : f_c(x) > \alpha\} = f_c^{-1}\big((\alpha, \infty)\big) = (\alpha, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

III. durum: $\alpha \geq c$ olsun.

$\{x \in \mathbb{R} : f_c(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

f_c fonksiyonunun alacağı maksimum değer "c" olur.

$f_c(x) > \alpha > c \Rightarrow f_c(x) > c$ olur.

Bu kümelerin her biri ya açık aralık ya da boş küme ya da $\mathbb{R}$ olduğundan Borel kümesidir. f_c fonksiyonu Borel ölçülebilir fonksiyon olur.

(5) $f \wedge g = \min\{f(x), g(x)\}$ $\quad (f\wedge g)^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in E : (f\wedge g)(x) > \alpha\}$

$$= \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cap \{x \in E : g(x) > \alpha\}$$

f ve g ölçülebilir old.; sağ taraf ölçülebilir kümedir. O halde, $(f\wedge g)^{-1}((\alpha, \infty])$ ölçülebilirdir.

SORU= f, IR'de tanımlı gerçel değerli dif. bilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun f' türev fonk. ölçülebilirdir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM= Her $n \in \mathbb{N}$ için; $g_n(x) = n \cdot \left[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right]$ Genel terimi $g_n(x)$ olan $\{g_n(x)\}$ fonk. dizisi tanımlansın. f(x) türevlenebilir old. süreklidir. Sürekli fonk. lar ölçülebilirdir. f fonksiyonu ölçülebilirdir.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$h = \frac{1}{n}$ seçilirse; $f'(x) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)]}{\frac{1}{n}}$ olur.

$g_n(x) = n.\left[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right]$ fonk. dizi, $f \in \mathcal{F}_m(E)$ ve n sbt. old. $g_n(x) \in \mathcal{F}_m(E)$ olur. O halde, türev fonk. f'de ölçülebilirdir.

SORU= f, IR'de tanımlı, IR de değerler alan dif. bilir bir fonk. olsun. f' türev fonk. Borel ölçülebilirdir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM= f dif. bilir $\Rightarrow$ f sürekli $\Rightarrow$ f Borel ölçülebilir. f bir Borel fonk. ~~olur~~ dur.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$ n bir sabit fonk.

old. süreklidir. Böylece bu da Borel fonk. dur. f'de Borel fonk. old.

$x \in$ $0 \leq x < 1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$ $\quad 0 < x^n < 1 \Rightarrow 1 \leq x^n+1 \leq 2$

$1 \geq \frac{1}{x^n+1} \geq \frac{1}{2}$

$x = 1$ iken $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}$ $\quad x^n \geq \frac{x^n}{x^n+1} \geq \frac{x^n}{2}$

$x \in (1,2]$ iken $\overset{LH}{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x^n}{1+x^n} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 1$ bulunur. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n \ln x}{x^n \ln x} = 1$

hhhy her $x \in [0,1]$ için : $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$ ve hhhy her

$x \in [1,2]$ için; $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1 = \tilde{f}$ sağlanır.

O halde L.Y.T.'den

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^1 f_n(x) + \int_1^2 f_n(x) \right\}$$

$$\overset{L.Y.T.'den}{=} \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx = 1 \text{ bulunur.}$$

$$x^3(1-x)^{n+1} \leq x^3 \cdot 1 = x^3 \underset{\forall x\in[0,1]}{\leq} 1 = M$$

Buradan, $M=1>0$ ö.ş. $|f_n(x)| \leq M = 1$ olur. ve $\{f_n\}$ sınırlıdır.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{?}{=} f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^3(1-x)^{n+1}e^{nx}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2+n}}$$

$$0 \leq \frac{x^3\cdot(1-x)^{n+1}e^{nx}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2+n}} \leq \underbrace{x^3(1-x)^{n+1}}_{?}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x^3(1-x)^{n+1} \underset{\forall x\in[0,1]}{=} 0 = f(x)$ bulunur.

Sınırlı yakınsaklık teoremi gereğince,

$\circledast$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n dm = \int\limits_{[0,1]} f dm$ olur. $\qquad \int\limits_E dm = m(E)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n dm = \int_{[0,1]} 0\cdot dm = 0\cdot m([0,1]) = 0.1 = 0$$

(2) $\{x\in E : f(x) \geq g(x)\}$ ölçülebilir midir?

(1)'den ; $\{x\in E : g(x) > f(x)\}$ kümesi de ölçülebilirdir.

$$E \setminus \overbrace{\{x\in E : g(x) > f(x)\}}^{A} = \{x\in E : f(x) \geq g(x)\} \text{ olur.}$$

$$E\setminus A = \underbrace{\underbrace{E}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{A^c}_{\in \mathcal{M}}}_{\in \mathcal{M}} \Rightarrow E\setminus A \in \mathcal{M} \text{ olur.}$$ O halde $\{x\in E : f(x) \geq g(x)\}$ ölçülebilirdir.

---

(3) **I. Yol :** $\{x\in E : f(x)=g(x)\}$

$$\underbrace{\{x\in E : f(x) \geq g(x)\}}_{(2)'\text{den } \in \mathcal{M}} \cap \underbrace{\{x\in E : g(x) \geq f(x)\}}_{(2)'\text{den } \in \mathcal{M}}$$

O halde $\{x\in E : f(x)=g(x)\}$ ölçülebilirdir.

II. Yol : $\{x\in E : (f-g)(x)=0\} = (f-g)^{-1}(\{0\})$

f ve g ölçülebilir fonk. ve iki ölçülebilir fonksiyonun farkı da ölçülebilir olduğundan, $f-g$ de ölçülebilirdir. Her $\alpha\in\mathbb{R}$ için $(f-g)^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathcal{F}_m(E)$ $\alpha=0$ alınır ise; $(f-g)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F}_m(E)$

$\{x\in E : f(x)=g(x)\}$ ölçülebilir kümedir.

---

(4) $f\vee g = \max\{f(x), g(x)\}$? $\alpha\in\mathbb{R}$ olsun. $(f\vee g)^{-1}((\alpha,\infty]) = \{x\in E : (f\vee g)(x)>\alpha\}$

$$= \underbrace{\{x\in E : f(x)>\alpha\} \cup \{x\in E : g(x)>\alpha\}}_{(*)}$$

f ve g ölçülebilir fonksiyon olduğundan ; (*) kümesi de ölçülebilirdir.

O halde ; $\{x\in E : (f\vee g)(x)>\alpha\}$ ölçülebilir kümedir.