KÜMELER

18.02.2025

Tanım: X bir küme olmak üzere $P(X)$, X kümesinin alt kümelerinin ailesini gösterir. Buna kuvvet kümesi denir.

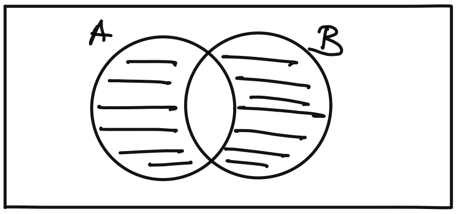
$\{x \in A, P(x)\} \to A$ kümesinin $P(x)$ özelliğini gerçekleyen tüm elemanlarını içeren kümelerini gösterir.

$\sim$: tümleyen

$A \subset B \Rightarrow B^{\sim} \subset A^{\sim}$ ve $A \setminus B = A \cap B^{\sim}$

Tanım: A ve B kümelerinden birinde olup diğerinde olmayan elemanların kümesine A ile B nin simetrik farkı denir.

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



De Morgan Kuralları: A, B ve C herhangi üç küme olsun.

$(B \cup C)^{\sim} = B^{\sim} \cap C^{\sim}$, $(B \cap C)^{\sim} = B^{\sim} \cup C^{\sim}$ veya daha genel olarak,

- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Tanım: X kümesinin alt kümelerinin bir topluluğu $\mathcal{A}$ olsun. Eğer $\mathcal{A}$ kümesinin elemanları ikişer ikişer ayrık ise $\mathcal{A}$ ayrık kümeler topluluğu denir.

NOT: Küme işlemleri, sonlu ya da sayılabilir kümelerden (doğal sayılar ile 1–1 eşlenmiş) oluşan kümeler topluluğu için de tanımlanabilir.

$\mathcal{C}$, bir kümeler topluluğu olmak üzere,

$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \in X \ \forall A \in \mathcal{C}, x \in A\}$$

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \in X : \exists A \in \mathcal{C}, x \in A\}$$

NOT: Yalnızca sonlu sayıda küme varsa bunların birleşimi ya da kesişimini ikili işlemlerin ard arda uygulanması ile bulunabilir. Fakat sonsuz çokluk $\{A_1, A_2, \ldots\}$ olması durumunda bunların kesişim ya da birleşimi aşağıdaki biçimde tanımlanıyor.

Bir kümeler dizisi için;

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in X : x \in A_n , \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in X : x \in A_n , \ \exists n \in \mathbb{N}\}$$

Bazı durumlarda indis kümesi doğal sayılar olmayabilir.

- I bir küme ve $\forall i \in I$ için A var olsun.

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i , \ \forall i \in I\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i , \ \exists i \in I\}$$

Keyfi sayıda küme için De Morgan kuralları geçerlidir.

$$\Big(\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A\Big)^{\sim} = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A^{\sim} \quad \text{ve} \quad \Big(\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A\Big)^{\sim} = \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A^{\sim}$$

FONKSİYON KAVRAMI

Tanım: A ve B boştan farklı iki küme olsun. $\forall x \in A$ için o.ş. bir tek $y \in B$ var ise $f : A \to B$ bağıntısına fonksiyon denir.

$$(x,y) \in f \longrightarrow f(x) = y$$

Tanım: $f : X \to Y$ bir fonksiyon ise $A \subset X$ olsun.

- A kümesinin f altındaki görüntü kümesi,

$$f(A) = \{f(x) \in B : x \in A\} \subset Y$$

- $B \subset Y$ ve $f : X \to Y$ olsun. B kümesinin f altındaki görüntüsü,

$$f^{-1}(B) = \{x \in X, \ f(x) \in B\} \subset X.$$

Örnek: $A=\{-1,0,1,3\}$ ve $B=\{-2,0,16\}$ olsun. A'dan B'ye bir f fonksiyonu $f(x)=2x^2-2$ olarak tanımlansın. $E=\{0,1\}$ ve $D=\{16\}$ için $f(E)$ ve $f^{-1}(D)$ nedir?

$$f(E)=\{f(x)\in B : x\in E\}=\{-2,0\}\subseteq B$$

$$f^{-1}(D)=\{\underline{x\in A} : f(x)\in D\}\subseteq A \Rightarrow \{3\}\subseteq A$$

$-1 \longrightarrow 0\notin D$
$0 \longrightarrow -2\notin D$
$1 \longrightarrow 0\notin D$
$3 \longrightarrow 16\in D$

Tanım: $f: X\to Y$ bir fonksiyon olsun.
Her $x_1, x_2\in X$ için;
$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$
$x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$
oluyor ise f birebir fonksiyondur. (injektif)

Tanım: Her $y\in Y$ için $f(x)=y$ o.s. en az bir $x\in X$ varsa (bulunabiliyorsa) f örten fonksiyon olarak adlandırılır. (Sürjektif)

f örten $\Leftrightarrow f(X)=Y$

* Hem birebir hem örten olan fonksiyona bijektif fonksiyon denir.

Teorem: $f: X\to Y$ bir fonksiyon ve $A,B\subseteq X$ olsun. Aşağıdakiler geçerlidir:

(i) $A\subset B \longrightarrow f(A)\subset f(B)$
(ii) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$
(iii) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ → ödev
(iv) $f(A\setminus B)\subset f(A)$

İspat
(i) $A\subset B$ olsun.
$y\in f(A)$ olsun. Fonksiyon tanımından bir $x\in A$ vardır öyle ki $f(x)=y$ olur.
Kabulden $A\subset B$ old. dan $x\in B$ olur.
$x\in B$ var öyle ki $f(x)=y$ ise $y\in f(B)$ olur.
O halde $f(A)\subset f(B)$ olur.

(ii) $y \in f(A \cap B)$ olsun. Fonksiyon tanımından bir $x \in A \cap B$ vardır öyle ki
$f(x) = y$.
$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ ve $x \in B$ dur.
$x \in A$ ve $f(x) = y$ old. $y \in f(A)$ dır.
$x \in B$ ve $f(x) = y$ old. $y \in f(B)$'dir.
$y \in f(A) \cap f(B)$ olur.

2. yol:
$A \cap B \subset A \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A)$
$A \cap B \subset B \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(B)$
$\Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

O zaman
$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ olur.

Tersi için, f birebir olsun.
$y \in f(A) \cap f(B)$ olsun. $y \in f(A)$ ve $y \in f(B)$'dir.
$y \in f(A) \Rightarrow \exists x_1 \in A,\ f(x_1) = y$
fonksiyon tanımı
$y \in f(B) \Rightarrow \exists x_2 \in B,\ f(x_2) = y$
f birebir old.dan $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ olur.
O halde, $x_1 \in A \cap B$ elde edilir aynı zamanda $f(x_1) = y$ old.dan $y \in f(A \cap B)$.

Teorem: $f: X \to Y$ birebir fonksiyon ve $A, B \subset X$ olsun. Aşağıdakiler gerçeklenir:

(i) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
(ii) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$

İspat:
(ii) ⓐ $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$?
$y \in f(A \setminus B)$ olsun. $\exists x \in A \setminus B$ vardır öyle ki $f(x) = y$ olur. $A \setminus B \subset A$ old.dan
$f(A \setminus B) \subset f(A)$ olur. $y \in f(A)$ olur.
$x \in A \setminus B$* ve f birebir old.dan $f(x) = y \notin f(B)$ olur. ?
Neden?
$y \in f(B)$ olsun. Bu durumda $x' \in B$ vardır öyle ki $f(x') = y$ olur.
$f(x') = f(x) = y$ olur. f birebir old.dan $x' = x$ olur. Ayrıca $x \in A \setminus B$* ise $x \notin B$
$x' \notin B$ olur Çelişki!!
$y \notin f(B)$ olmalıdır. $y \in f(A) \setminus f(B)$ olur. ⓐ İspatlandı.

(b) $\Rightarrow f(A)\setminus f(B) \subseteq f(A\setminus B)$?

$y\in f(A)\setminus f(B)$ olsun. $y\in f(A)$ ve $y\notin f(B)$

$y\in f(A)$ için,
fonksiyon tanımından, $f(x)=y$ o.ş. $x\in A$ vardır.
$y\notin f(B) \Rightarrow f(x)=y$ o.ş. $x\notin B$ vardır. $x\in A\setminus B$ olur ve $f(x)=y$ olduğu
$y\in f(A\setminus B)$ olur. O halde $f(A)\setminus f(B) \subseteq f(A\setminus B)$
(a) ve (b) $\longrightarrow$ $f(A\setminus B) = f(A)\setminus f(B)$

Teorem: $f: X\to Y$ bir fonk ve $A,B\subset Y$ olsun. Aşağıdakiler gerçeklenir.

(i) $A\subset B \Rightarrow f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$

(ii) $f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

(iii) $f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$

(iv) $f^{-1}(A\setminus B) = f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$

(a) $f^{-1}(B^{\sim}) = (f^{-1}(B))^{\sim} \longrightarrow$ iv 'de $A=Y$

(b) $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset \longrightarrow$ iv 'de $A=B$

İspat:

(i) $A\subset B$ olsun.
$x\in f^{-1}(A)$ olsun. Ters görüntü tanımından $f(x)\in A$ olur. $A\subset B$ olduğu
$f(x)\in B$ olur. $x\in f^{-1}(B)$ elde edilir. O halde $f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$

(ii) (1) $f^{-1}(A\cap B) \subseteq f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$?

$A\cap B\subset A \Rightarrow f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A)$

$A\cap B\subset B \Rightarrow f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(B)$

$f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

(2) $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(A\cap B)$?

$x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ olsun. $x\in f^{-1}(A)$ ve $x\in f^{-1}(B)$

Ters görüntü tanımından;

$$\left.\begin{array}{l} x\in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x)\in A \\ x\in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x)\in B \end{array}\right\} f(x)\in A\cap B$$

$x\in f^{-1}(A\cap B)$ olur. O halde $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(A\cap B)$.

(1) ve (2) 'den eşitlik sağlanır.

(iv) $x \in f^{-1}(A \setminus B) \Rightarrow f(x) = A \setminus B \Leftrightarrow f(x) \in A$ ve $f(x) \notin B$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ ve $x \notin f^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

Tanım: $f: A \to A$ bir fonk olsun. Her x elemanı için $f(x) = x$ ise f birim fonk dur. (1-1 ve örten)

Tanım: $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ iki fonk olsun. Her x elemanını Z kümesinin bir $g(f(x))$ elemanına dönüştüren fonksiyona g ile f in bileşkesi denir.

$g \circ f : X \to Z$

$x \to g \circ f(x) = g(f(x))$

Tanım: $f: X \to Y$ birebir örten fonksiyon olsun. f fonk nu ve f^{-1} fonk nu için

$f^{-1} \circ f = I_X$, $f \circ f^{-1} = I_Y$

$I: X \to X$ $I: Y \to Y$

Ayrıca $(f^{-1})^{-1} = f$ 'tir.

SORULAR

1. (i) $f(\bigcup_\lambda A_\lambda) = \bigcup_\lambda f(A_\lambda)$

   (ii) $f(\bigcap_\lambda A_\lambda) \subset \bigcap_\lambda f(A_\lambda)$

⇒ispat⇐

(i) $y \in f(\bigcup_\lambda A_\lambda)$ olsun. Fonksiyon tanımından $y = f(x)$ o.s. bir $x \in \bigcup_\lambda A_\lambda$ vardır. O halde en az bir λ_0 için $x \in A_{\lambda_0}$ olur. $x \in A_{\lambda_0}$ ve $y = f(x)$ old.dan $y \in f(A_{\lambda_0})$ 'dır. $y = \bigcup_\lambda f(A_\lambda)$ olur.

O halde,

$f(\bigcup_\lambda A_\lambda) \subseteq \bigcup_\lambda f(A_\lambda)$ . . . . . . (1)

Tersine, $y \in \bigcup_\lambda f(A_\lambda)$ o halde bir λ_0 için $y \in f(A_{\lambda_0})$ olur. fonksiyon tanımından $y = f(x)$ o.s. $x \in A_{\lambda_0}$ vardır. $x \in \bigcup_\lambda A_\lambda$ olur. $y \in f(\bigcup_\lambda A_\lambda)$ olur $\Rightarrow$ $\bigcup_\lambda f(A_\lambda) \subseteq f(\bigcup_\lambda A_\lambda)$ . . (2)

eşitlik (1) ve (2) 'den sağlanır.

② $f: X \to Y$ bir fonk. ve $\{B_\lambda\} \subseteq Y$ olsun.

ⓐ $f^{-1}(\bigcup_\lambda B_\lambda) = \bigcup_\lambda f^{-1}(B_\lambda)$

ⓑ $f^{-1}(\bigcap_\lambda B_\lambda) = \bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda)$

③ $f: X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ olsun.

ⓘ $\underbrace{f(f^{-1}(B)) \subset B}_{\text{örtenlik oldı eşit}}$ ve $\underbrace{A \subset f^{-1}(f(A))}_{\text{birebirlik old}}$

$\boxed{20.02.2025}$

DENK VE SAYILABİLİR KÜMELER

Tanım: A ve B iki küme olsun. Bu iki küme arasında 1-1 ve örten bir $f: A \to B$ fonknu varsa bu iki küme denktir. (Eş kuvvetle)

Bu denk ifadesi bir denklik bağıntısı belirtir:

"≈" denklik sembolü

ⓘ $A \approx B$

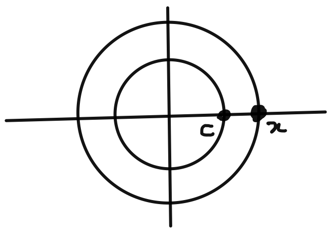
ⓘⓘ $A \approx B \Rightarrow B \approx A$

ⓘⓘⓘ $A \approx B$, $B \approx C \Rightarrow A \approx C$

Örnek:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , x^2+y^2=1\} \Rightarrow$ yarıçapı 1 olan çember

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , x^2+y^2=2\} \Rightarrow$ yarıçapı 2 olan çember



①

$\underset{(x,y)}{A} \xrightarrow{f} (2x, 2y) \in B$

$x^2+y^2=1$ $\qquad (2x)^2+(2y)^2 = 4(x^2+y^2) = 4$

$f((x,y)) = (2x, 2y)$ 1-1 ve örten A ve B denk kümelerdir.

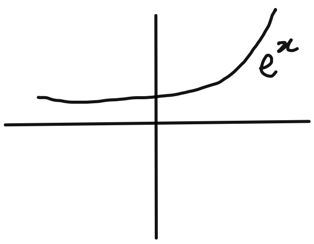
$\mathbb{N}$ ve $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$f: \mathbb{N} \to A$

$n \to f(n) = \frac{1}{n}$

$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^+$ denk kümelerdir.

$f(x) = e^x$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$



Tanım: $A=\emptyset$ veya bir $n\in\mathbb{N}$ için $A\approx\{1,\dots,n\}$ ise A kümesi sonludur ve kardinal sayı n 'dir. Sonlu olmayan kümeye sonsuz küme denir.

→ Bir A kümesi sonlu veya $A\approx\mathbb{N}$ ise A kümesine sayılabilir küme denir.

→ Sayılabilir olmayan kümeye sayılamaz sonsuz küme denir.

→ $\mathbb{N}$ sayılabilir kümedir.

Örnek: $\mathbb{Z}$ kümesi sayılabilirdir. ($\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, 1-1 ve örten fonk tanımlarsam denk olur.)

=cevap

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$

$$f(x)=\begin{cases}-2x, & x\leq 0\\ 2x+1, & x\geq 0\end{cases}$$

$0\to 1$ $\quad -1\to 2$

$1\to 3$ $\quad -2\to 4$

$2\to 5$ $\quad -3\to 6$

2

Lemma: Her n doğal sayısı, p non-negatif bir tam sayı $(p\geq 0)$, q bir doğal sayı o.ü. $n=2^p.q$ şeklinde yazılabilir.

=ispat=

Tümevarım ile yapılır.

$n=1 \Rightarrow n=2^0.1$, $p=0$, $q=1$ ✓

$n<k$ o.s. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $n=2^p.q$ o.s. uygun p ve q ile yazılabildiğini kabul edelim.

$n=k$ doğal sayısını bulalım.

k tek ise $k=2^0.\underbrace{k}_{q}$ $(p=0)$ olarak yazılır.

k çift ise $k=2.m$ o.s. m doğal sayısı vardır. $m<k$ old.dan hipotezde

$m=2^p.q$ p non-negatif tam sayısı ve q tek sayısı vardır.

$k=2m=2.(2^p.q)=2^{p+1}.q$ olarak yazılır.

Örnek: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sayılabilir kümedir.

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 1-1 ve örten o.s. f fonk.nu bulmalıyız.

$$f(m,n)=2^{m-1}.(2n-1)$$

fonk.nunu tanımlayalım. f fonk.nunun 1-1 old. gösterelim.

→ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinden (m_1,n_1) ve (m_2,n_2) alalım. Öyle ki

$f((m_1,n_1)) = f((m_2,n_2))$ olsun. $\left(2^{m_1-1}(2n_1-1)\right) = \left(2^{m_2-1}(2n_2-1)\right)$.

$m_1 = m_2$ olsun. Bu durumda genelliği bozmaksızın

→ $m_2 > m_1$ olsun.

$$\underbrace{2n_1-1}_{\text{Tek}} = \underbrace{2^{\overbrace{m_2-m_1}^{>0}}(2n_2-1)}_{\text{Çift}}$$

Çelişki!!

Yani $m_1=m_2$ olmalı. Buradan $n_2=n_1$ görmek kolay.

O halde f 1-1.

f'in örtenliğini göstermek için $x\in\mathbb{N}$ alalım. Bir önceki lemmadan

$x = 2^p\cdot q$ (q tek tamsayı, p non-negatif, $p\geq 0$) o.s. yazılabileceğini biliyoruz.

→ q tek tam sayı old.dan,

- $q = 2J+1$ o.s. bir tam sayısı vardır.
- $q\geq 1$ old.dan $J\geq 0$'dır.

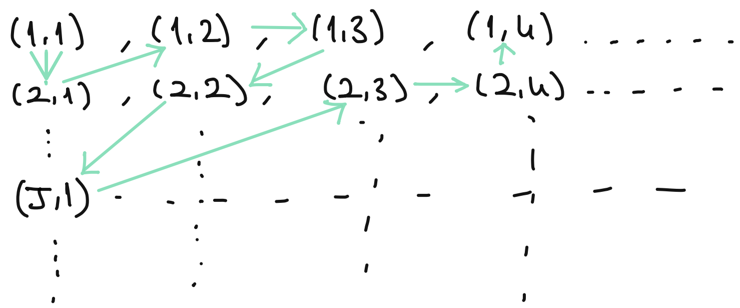
→ $(p+1, J+1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için $f(p+1,J+1) = 2^{(p+1)-1}\cdot(2(J+1)-1)$

$= 2^p\cdot(2J+1) = x$

→ f örtendir.

O halde $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\approx\mathbb{N}$ old.dan $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sayılabilirdir.

$\boxed{\text{II. yol}}$ Bir matrise benzetiyoruz.



1-1 ve örtenliğin daha kolay gözüktüğünü düşündüğümüz bir örnek...

Lemma: $\mathbb{N}$ kümesinin sonsuz her alt kümesi sayılabilirdir.

NOT: $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin her sonsuz alt kümesi $\mathbb{Z}$ kümesine denktir. Bu özellik sonsuz kümeler için her zaman sağlanır.

NOT: Sonlu sayıda sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilirdir.

Örnek : Rasyonel sayılar kümesi sayılabilirdir.

$$\mathbb{Q} = \underbrace{\mathbb{Q}^-}_{\text{sayılabilir}} \cup \underbrace{\{0\}}_{\text{sayılabilir}} \cup \underbrace{\mathbb{Q}^{*}}_{\text{sayılabilir}} \rightarrow \mathbb{Q}^+$$ yazılabilir.

→ p ve q aralarında asal pozitif tam sayılar o.ü.

$$f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$$
$$\frac{p}{q} \longrightarrow (p,q)$$

olarak tanımlayalım. f fonk. 1-1 'dir, $\mathbb{Q}^+$ kümesi $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 'nin bir alt kümesine denktir, dolayısıyla sayılabilirdir.

→ $\mathbb{Q}^+$ ile $\mathbb{Q}^-$ arasında 1−1 eşleme yapılabileceğinden $\mathbb{Q}^-$ kümesi de sayılabilirdir.

→ Sayılabilir kümelerin sonlu birleşimi sayılabilir old.dan $\mathbb{Q}$ sayılabilirdir.

25.02.2025

NOT: A bir küme olsun. A kümesinin sayılabilir olması için gyk bu kümenin elemanlarının sonlu ya da sonsuz bir liste şeklinde yazılabilmesidir.

Teorem: Sayılabilir kümelerin kartezyen çarpımı sayılabilirdir.

=ispat=
A ve B sayılabilir kümeler olsun. $A\times B$ 'nin sayılabilir old. gösterelim.

$A\times B$ 'nin elemanlarını şu şekilde yazalım:

$$\begin{array}{ccccc}
(a_1,b_1) & (a_1,b_2) & (a_1,b_3) & (a_1,b_4) & \cdots \\
(a_2,b_1) & (a_2,b_2) & (a_2,b_3) & (a_2,b_4) & \cdots \\
(a_3,b_1) & (a_3,b_2) & (a_3,b_3) & (a_3,b_4) & \cdots \\
(a_4,b_1) & (a_4,b_2) & (a_4,b_3) & (a_4,b_4) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

$\{(a_1,b_1)\}$, $\{(a_2,b_1),(a_1,b_2)\}$, $\{(a_3,b_1),(a_2,b_2),(a_1,b_3)\}$ ......

kümeleri göz önüne alınırsa $A\times B$ kümesinin elemanları

$$A\times B = \{\underbrace{(a_1,b_1)}, \underbrace{(a_2,b_1),(a_1,b_2)}, \underbrace{(a_3,b_1),(a_2,b_2),(a_1,b_3)}, \ldots\}$$

Bu da gösterir ki $A\times B$ kümesi sayılabilirdir.

Teorem: $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ kümesi sayılamazdır.

$\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots$
0,0,0, ...
1,0,1, ...
1,1,1,0, ...

=İspat= $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ kümesi sayılabilir olsun. O halde bu kümenin elemanlarını bir liste şeklinde şu şekilde yazabiliriz.

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$$

$f_1 = f_1(1), f_1(2), f_1(3) \dots$
$f_2 = f_2(1), f_2(2), f_2(3) \dots$

olarak yazabiliriz.

$g: \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ fonksiyonu

$$g(n) = \begin{cases} 0, & f_n(n) = 1 \\ 1, & f_n(n) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} f_1 = f_1(1), f_2(2) \dots \\ g = g(1), g(2) \dots \end{array}$$ olarak tanımlansın.

g, $\mathbb{N}$ den $\{0,1\}$ e bir fonksiyondur fakat g her n için f_n den farklıdır. Çünkü g, n doğal sayısını $g(n)$'e resmeder fakat $g(n) \neq f_n(n)$

Bu da $\{f_1, f_2, \dots\}$ kümesinin $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ kümesinin tüm elemanlarını listelemesi ile çelişir.

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sayılamazdır.

$$\begin{array}{ccccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & g(1) & g(2) & g(3) & \\ & (0,1) & (0,1) & (0,1) & \\ \| & & & & \\ f_1 & \boxed{f_1(1)} & f_1(2) & f_1(3) & f_1(4) \dots \\ f_2 & f_2(1) & \boxed{f_2(2)} & f_2(3) & f_2(4) \dots \\ f_3 & f_3(1) & f_3(2) & \boxed{f_3(3)} & f_3(4) \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Teorem: $(0,1)$ kümesi sayılamazdır.

=İspat= İspat Cantor'un köşegen yöntemi ile yapılacaktır.

$(0,1)$ kümesinin sayılabilir olduğunu yani

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$$

birebir örten fonk. var olduğunu kabul edelim.

Her n doğal sayısı için n'nin eşlendiği bir ondalık dizimiz vardır:

$$
\begin{array}{l}
1 \longrightarrow 0,\boxed{a_{11}}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \dots \\
2 \longrightarrow 0,\ a_{21}\ \boxed{a_{22}}\ a_{23}\ a_{24}\ \dots \\
3 \longrightarrow 0,\ a_{31}\ a_{32}\ \boxed{a_{33}}\ a_{44}\ \dots \\
\ \vdots \qquad\quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \ddots
\end{array}
$$

Göstermek istediğimiz şey f in birebir örten olmadığıdır. $(0,1)$'in daha büyük bir küme olduğu düşüncemizden dolayı f in örten olmadığını göstermeliyiz.

Yani doğal sayının eşleşmediği bir $x \in (0,1)$ bulmalıyız.

Bazı reel sayıların farklı ondalık gösterimleri vardır. Örneğin, $\underbrace{0,999\dots}_{\times} = \underbrace{0,200\dots}_{\checkmark}$

Bu nedenle sayıları temsil ederken 0 larla sona eren gösterimi göz önüne alacağız.

$x = 0,b_1,b_2,b_3,\dots \in (0,1)$ elemanını şu şekilde inşa edelim.

$$
b_1 = \begin{cases} 1, & a_{11} \neq 1 \\ 2, & a_{11} = 1 \end{cases}
$$

benzer şekilde $i \in \mathbb{N}$ için

$$
b_i = \begin{cases} 1, & a_{ii} \neq 1 \\ 2, & a_{ii} = 1 \end{cases}
$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda $\forall i \in \mathbb{N}$ için $b_i \neq a_{ii}$ olduğu görülür.

$x = 0,b_1b_2\dots$ olarak oluşturduğumuz $x \in (0,1)$ sayısı liste şeklinde yazdığımız n doğal sayıları ile eşleşen her ondalıklı sayıdan farklıdır. Yani x sayısı bu listede yer almaz. f örten değildir. $(0,1)$ sayılamaz kümedir.

Örnek: $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$
x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x}, & 0 < x < 1/2 \\[2mm] \dfrac{2x-1}{1-x}, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}
$$

fonksiyonu 1−1 ve örtendir.

<u>$\mathbb{R}$ sayılamaz kümedir.</u>

$\mathbb{R}$ sayılabilir olsaydı $\mathbb{N} \approx \mathbb{R}$ olurdu. Yukarıdaki f ile $(0,1) \approx \mathbb{R}$ olduğundan bu iki denklikten $(0,1) \approx \mathbb{N}$ olurdu. Bu da $(0,1)$ in sayılamaz olması ile çelişir.

Örnek: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sayılamazdır.

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sayılabilir olsaydı,

$$\mathbb{R} = \underbrace{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}_{\text{sayılabilir}} \cup \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{sayılabilir}} \ldots$$

Sayılabilir kümelerin birleşimi sayılabilir old.dan $\mathbb{R}$ sayılabilir olurdu. Çelişki!

Örnek: $[0,1]$ ve $(0,1)$ kümeleri denktir.

NOT: $[0,1]$ aralığı kapalı kümedir.
$[0,1]$ kümesi kontinyum olarak bilinir.

Örnek: $(a,b) \approx (c,d)$ 'dir.

$$f : (a,b) \longrightarrow (c,d)$$

$$f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

fonksiyonu 1-1 örtendir.

Benzer şekilde $[a,b] \approx [c,d]$

$[a,b] \approx [0,1] \approx (0,1) \approx (c,d) \implies [a,b] \approx (c,d)$

Herhangi iki aralık birbirlerine denktir.

Teorem (Cantor Teoremi):
$f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ örten olacak şekilde f fonksiyonu yoktur.

İspat:
f fonksiyonu örten old. kabul edelim.
$A = \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$ kümesini göz önüne alalım.

$X \xrightarrow{\text{örten}} \mathcal{P}(X)$, A

f örten old.dan $f(y) = A$ o.ş. $y \in X$ vardır.
Bu durumda $y \in A$ veya $y \notin A$ 'dır.

- $y \in A$ ise A kümesinin tanımından $y \notin f(y) = A$
- $y \notin A$ ise A kümesinin tanımından $y \in f(y) = A$

Bu iki durum çelişki oluşturur. O halde $f(y) = A$ o.ş. $y \in X$ yoktur.
f örten değildir.

Sonuç: En büyük küme yoktur. Farklı büyüklükte sonsuz kümeler vardır.

$\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \mathcal{P}\{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\}, \ldots$

kümeleri soldan sağa artan kardinaliteye sahip sonsuz kümelerdir.

KARDİNALİTE

Bir A kümesinin el sayısını gösteren notasyona o kümenin kardinal sayısı (kuvveti) denir ve card(A) ile gösterilir. (|A|)

Sayılabilir sonsuz kümelerin kardinal sayısı $\aleph_0$ notasyonu ile gösterilir.

$\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$

Reel sayıların kardinalitesi $\boxed{\text{continu?}}$? kelimesinden dolayı c ile gösterilir.

Kardinal sayılar kümesi

$$\{0,1,2,\ldots,\aleph_0,\underbrace{2^{\aleph_0}\cdot c}_{\aleph_1},\aleph_2,\ldots\}$$

⊛ A ve B kümeleri için

	$A \to B$ 1-1	$A \to B$ örten
$\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$	✓	✗
$\text{card}(A) = \text{card}(B)$	✓	✓
$\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$	✗	✓

Teorem (Schröder – Bernstein Teoremi):

$\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ veya $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$ ise

$$\text{card}(A) = \text{card}(B)$$

dir.

Teorem: Herhangi bir X kümesi için

$\text{card}(X) < \text{card}(\mathcal{P}(X))$ 'tir.

Teorem: $\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = c$ 'dir.

$$c = \text{card}([0,1]) = \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \text{card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = 2^{\text{card}(\mathbb{N})} = 2^{\aleph_0}$$

⊛ $\text{card}(X) \geq c$ ise X sayılamazdır.

⊛ $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Genişletilmiş Gerçel Sayılar

27 Şubat 2025

$\mathbb{R}$ sayılar kümesine $\mp\infty$ noktaların eklenmesi ile genişletilmiş reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ oluşturulur.

$\mathbb{R}$'de bir kümenin supremum ve infimum olması için tamlık aksiyomundan biliyoruz ki bu kümenin boştan farklı ve sınırlı olması gerekir. $\mathbb{R}^*$ da ise buna gerek yoktur.

- Küme alttan sınırlı değilse $\mathbb{R}$ de infimumu tanımlanamaz fakat $\mathbb{R}^*$ infimumu $-\infty$'dur.
- Küme üstten sınırlı değilse $\mathbb{R}$'de supremum tanımlanamaz fakat $\mathbb{R}^*$ supremumu $+\infty$'dur.
- $\emptyset$ boş küme için $\inf \emptyset = \infty$, $\sup \emptyset = -\infty$'dur.

$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ olduğundan,

$A = \emptyset$ alınırsa $\sup(\emptyset \cup B) = \max\{\sup \emptyset, \sup B\} \Rightarrow \sup \emptyset = -\infty$.

- $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ için

$\lim\limits_{n\to -\infty} x_n = -\infty$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

old. da dizi $\mathbb{R}$'de ıraksaktır fakat $\mathbb{R}^*$ da yakınsaktır.

$x + \mp\infty = \mp\infty$

$\infty + \infty = \infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$x.(\mp\infty) = \mp\infty \quad (x>0)$

$x.(\mp\infty) = \pm\infty \quad (x<0)$

$\infty - \infty$ ifadesini tanımlamayacağız fakat $0.(\mp\infty) = 0$ olarak alacağız.

- $-\infty \le a < b \le \infty$

$(a,b) = \{x : a < x < b\}$

$[a,b) = \{x : a \le x < b\}$

$[a,b] = \{x : a \le x \le b\}$

Önerme: $\mathbb{R}$ içindeki her açık küme açık aralıkların sayılabilir ayrık birleşimidir.

p-adik Kesirler ve Cantor Kümesi

$x \in [0,1]$, $p \geq 2$ doğal sayısı için

$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} \approx 0,a_1a_2a_3\ldots$ $a_k \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ ifadesine x in p tabanına göre açılımı denir.

Burada her k için

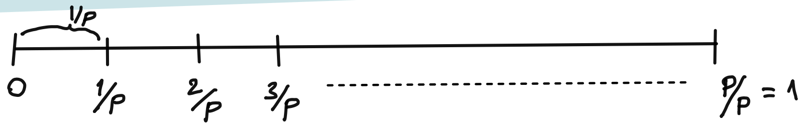
$0 \leq a_k \leq p-1$ dir.

$p=10$ için x'in ondalık açılımı

$p=2$ için x'in ikilik açılımı

$p=3$ için x'in üçlük açılımı denir.

- Açılım dizisinin inşası şöyledir :

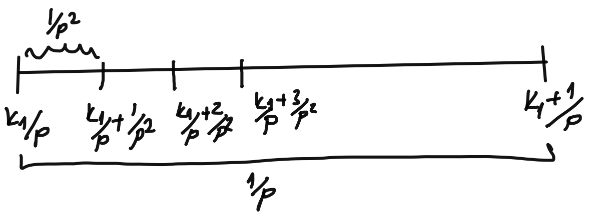


$[0,1]$ aralığı bu şekilde eşit aralıklara bölünürse

$$[0, 1/p), [1/p, 2/p), [2/p, 3/p) \ldots [\tfrac{p-1}{p}, p/p = 1)$$

kümeleri ayrık ve birleşimleri $[0,1)$ aralığıdır.

$x \in [k_1/p, \frac{k_1+1}{p})$ o.ş. $0 \leq k_1 < p$ k_1 doğal sayısı vardır ve tektir.

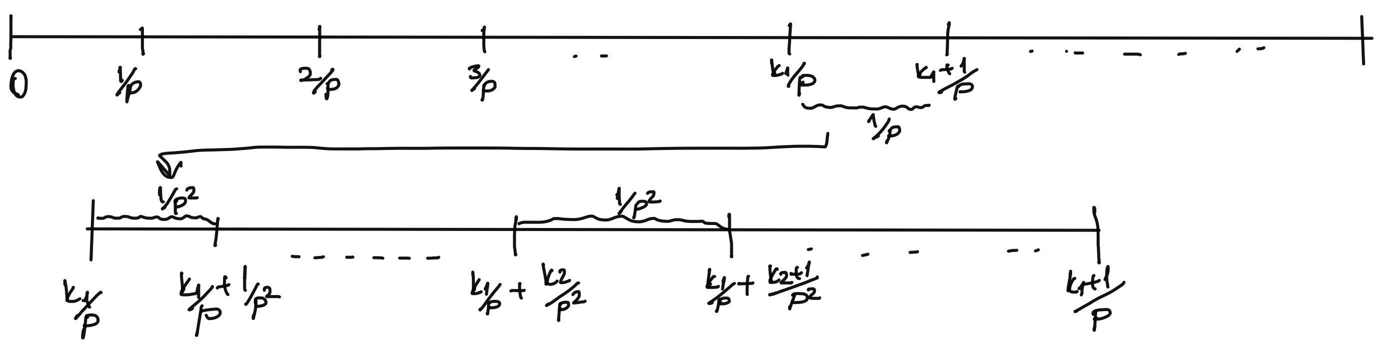


$$x \in [k_1/p, \frac{k_1+1}{p}) \Rightarrow k_1/p \leq x < \frac{k_1+1}{p} \Rightarrow 0 \leq x - \frac{k_1}{p} < 1/p$$

Benzer işlem $[k_1/p, \frac{k_1+1}{p})$ aralığına uygulanırsa yani bu aralık eşit p aralığa bölünürse

$x \in [\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2}, \frac{k_1}{p} + \frac{k_2+1}{p})$ o.ş. $0 \leq k_2 < p$ k_2 doğal sayısı vardır ve tektir.

ve $0 \leq x - k_1/p - \frac{k_2}{p^2} < 1/p^2$



3. adımda

$$0 \leq x - k_1/p - k_2/p^2 - k_3/p^3 < 1/p^3$$ bulunur.

Bu şekilde ilerlersek her n için

$$0 \leq x - \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{p^i} < \frac{1}{p^n}$$

eşitliğini sağlayan (k_i) dizisi elde edilir. Bu özellikteki dizinin tek olmasının yanında

tek ?

her i için

$$0 \leq k_i < p$$ dir.

Bu parçalanışı $(0,1]$ yaparsak aralıklar $(\,,]$ a döner.

NOT: Benzer biçimde x_i içeren

$$\left(\frac{m_1}{p}, \frac{m_1+1}{p}\right]$$

biçiminde aralıklar üzerinden (m_n) dizisi x_i p tabanına göre açılan dizisi dır.

Yani bu açılım en fazla iki tanedir.

Teorem: $[0,1]$ aralığındaki her gerçel sayı bir p-adik kesirle ifade edilebilir. Tersine, her p-adik kesir $[0,1]$ aralığında bir x gerçel sayısı gösterir.

=İspat= $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}$, $a_k \in \{0,\dots,p-1\}$ p-adik kesri verilsin. Bu ifadenin $[0,1]$ aralığında

old. gösterelim. Bu serinin kısmî toplamlar dizisi

Serinin terimleri negatif olmayan gerçel sayılardır. Bu

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k}$$ olsun.

Bu kısmî toplamlar dizisinin monoton artan olduğunu gösterir.

$$0 \leq S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} \leq S_{n+1}$$

Her k için $a_k \leq p-1$ old.dan

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{p-1}{p^k} = (p-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{p}\right)^k \leq \underbrace{(p-1) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^k}_{1/p}}_{1-1/p} = 1$$

sonucu çıkar. Yani $\{S_n\}$ monoton artan sınırlı bir dizidir. O halde yakınsaktır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq S_n \leq 1$ old.dan her taraftan limit alınırsa

$$0 \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}}_{x} \leq 1$$ 'dir.

Tersine $x\in[0,1]$ gerçel sayısını alalım.

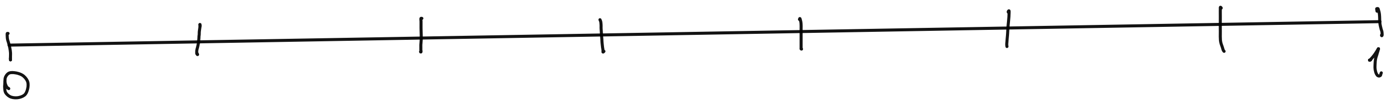
$x=0$ ise $x=0,000\ldots$ olacak p-adik bir kesir olarak yazabiliriz.

$x\in(0,1]=J_0$ için x'in bir p-adik kesirle gösterileceğini gösterelim.

$J_0\supset J_1\supset J_2 \ldots \supset J_n\supset J_{n+1}\supset \ldots$

iç içe aralıklar prensibini kullanacağız.

J_0 aralığını her biri $1/p$ olan parçalara bölelim.



$\frac{n}{p}<x$ koşulunu sağlayan en büyük n tam sayısına a_1 diyelim.

Bu durumda

$$\frac{a_1}{p}<x\le\frac{a_1+1}{p} \Rightarrow 0< x-\frac{a_1}{p}\le\frac{1}{p}$$

eşitsizliği yazılır.

$J_1=\left(\frac{a_1}{p}, \frac{a_1+1}{p}\right]$ aralığını eşit p parçaya bölelim.

Boyları $1/p^2$ olan aralıklar oluşur.

$\frac{a_1}{p}+\frac{n}{p^2}<x$ koşulunu sağlayan en büyük n tam sayısına a_2 diyelim.

$$\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}<x\le\frac{a_1}{p}+\frac{a_2+1}{p^2}\Rightarrow 0<x-\frac{a_1}{p}-\frac{a_2}{p^2}\le\frac{1}{p^2}$$

eşitsizliği yazılır.

$$J_2=\left(\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}, \frac{a_1}{p}+\frac{a_2+1}{p^2}\right] \Rightarrow 0<x-\sum_{k=1}^{3}\frac{a_k}{p^k}\le\frac{1}{p^3}$$

$J_0\supset J_1\supset J_2\supset \ldots$ bu şekilde devam edersek

J_{n-1} için

$$0<x-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{p^k}\le\frac{1}{p^n}$$

elde edilir. $n\to\infty$ için sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{p^k}=x$$ bulunur.

Örnek: $x=\frac{1}{4}$, $p=3$ için açılım yapalım:

$$\frac{n}{p} < x = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{n}{3} < \frac{1}{4} \Rightarrow n=0=a_1$$

$$\frac{a_1}{p}+\frac{n}{p^2} < x \Rightarrow \frac{0}{3}+\frac{n}{9} < \frac{1}{4} \Rightarrow n=2=a_2$$

$$\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\frac{n}{p^3} < x \Rightarrow \frac{0}{3}+\frac{2}{9}+\frac{n}{27} < \frac{1}{4} \Rightarrow n=0=a_3$$

$$\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\frac{a_3}{p^3}+\frac{a_4}{p^4} < x \Rightarrow \frac{0}{3}+\frac{2}{9}+\frac{0}{27}+\frac{n}{81} < \frac{1}{4} \Rightarrow n=2=a_4$$

$$\frac{1}{4} = 0,020202....$$

0,020202... sayısının 3 tabanına göre gerçekten $\frac{1}{4}$ reel sayısına karşılık geldiğini gösterelim.

$$0,317 = \frac{300}{1000}+\frac{10}{1000}+\frac{7}{1000} = \frac{3}{10}+\frac{1}{100}+\frac{7}{1000} = \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}$$

$$0,11... = \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000} = \sum\left(\frac{1}{10}\right)^k$$

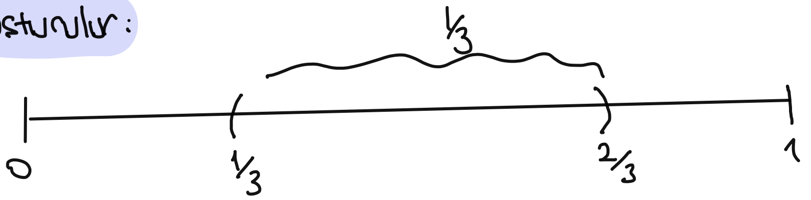
$$\frac{0}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{0}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\dots$$

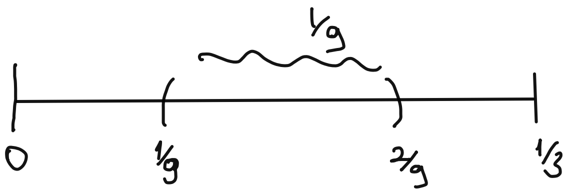
$$= \frac{2}{3^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\dots\right)$$

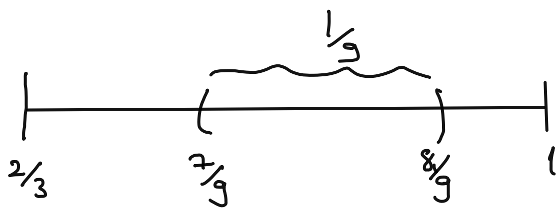
$$= \frac{2}{3^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Cantor Kümesi

Tanım: Cantor'un G_0 kümesi $[0,1]$ kapalı aralığının ayrık, açık alt aralıklarının sayılabilir bir birleşimi olarak tanımlar. G_0 açık bir kümedir. Bu küme şöyle oluşturulur:







I. adımda $[0,1]$ aralığı eşit 3 parçaya ayrılır. $(1/3, 2/3)$ aralığı çıkarılır.

II. adımda $[0,1/3]$ $[2/3,1]$ aralıkları eşit 3'er parçaya ayrılır.

$(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ aralıkları çıkarılır.

III. adım

$[0, 1/9], [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], [\frac{8}{9}, 1] \to$ parçaları

$(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}), (\frac{7}{27}, \frac{8}{27}), (\frac{19}{27}, \frac{20}{27}), (\frac{25}{27}, \frac{26}{27}) \to$ çıkarılır

işlem bu şekilde devam ettirilir.

Bu ayrık, açık aralıkların sayılabilir birleşimi G_0 kümesini oluşturur.

sayılamazdır.

$G_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup \{(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\} \cup \{(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}), (\frac{7}{27}, \frac{8}{27}), (\frac{19}{27}, \frac{20}{27}), (\frac{25}{27}, \frac{26}{27})\}$

$\cup \ldots\ldots$

F_0 Cantor kümesi de $F_0 = [0,1] \setminus G_0$ olarak tanımlanır.

F_0 kapalı bir kümedir.

F_0 kümesi $0, 1$ noktalarını ve çıkarılan aralıkların iç noktalarını içerir.

$F_1 = \{0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \ldots$ uç noktalarının kümesi

olsun. Bu durumda

$F_1 \subset F_0$ 'dır.

Rasyonel sayıların alt kümesi old.dan F_1 sayılabilirdir.

Fakat bunun yanında F_0, $[0,1]$ aralığına ait sayılamaz sayıda noktayı da kapsar.

F_0'a ait olan ama F_1 kümesinde olmayan noktaları F_2 ile gösterelim.

$$\underbrace{F_0}_{\text{sayılamaz}} = \underbrace{F_1}_{\text{sayılabilir}} \cup \underbrace{F_2}_{\text{sayılamaz.}}$$

Teorem: F_0, Cantor kümesi sayılamazdır.

= İspat

Cantor'un köşegen yöntemi ile gösterilir.

F_0 sayılabilir olsun.

$F_0 = \{x_1, x_2, \dots\}$ şeklinde yazılsın.

F_0, Cantor kümesinde ki her sayının bir üçlü açılımı vardır.

$$x_1 = 0,\boxed{a_{11}}\, a_{12}\, a_{13} \dots$$
$$x_2 = 0,a_{21}\, \boxed{a_{22}}\, a_{23} \dots$$
$$\vdots$$

F_0, Cantor kümesinin elemanlarının üçlü açılımlarında yalnızca 0 ve 2 bulunur.

b elemanını şu şekilde oluşturalım:

$$b = 0,b_1 b_2 \dots \qquad b_i = \begin{cases} 2, & a_{ii} = 0 \\ 0, & a_{ii} = 2 \end{cases}$$

Bu durumda bu şekilde oluşturduğumuz

$$b = 0,b_1 b_2 \dots$$

noktası F_0 kümesine aittir. (Çünkü 0 ve 2'lerden oluşur.) fakat $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ kümesinin her elemanından farklıdır. (Çünkü $b_i \neq a_{ii}$ $(\forall i)$)

Bu ise F_0'ın sayılabilir olması ile çelişir.

F_0, sayılamazdır.

UYGULAMA

04.03.2025

Soru: $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sayılabilir kümelerin dizisi olsun. $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ sayılabilirdir. Gösteriniz.

Çözüm: $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\{X_i\}$ sayılabilir old.dan bu kümenin elemanlarını liste (matris) şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{cases} X_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ X_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ X_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \end{cases}$$

$$f: A\times B \subseteq \overbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}^{\approx \mathbb{N}} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

$$(m,n) \longrightarrow f(m,n) = a_{mn}$$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sayılabilir olur. $A\times B\subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ = sayılabilir,

f, 1-1 örten old.dan $A\times B \approx \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ olur ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ sayılabilirdir.

1-1 = $(m_1,n_1), (m_2,n_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$f(m_1,n_1) = f(m_2,n_2)$ olsun.

$a_{m_1n_1} = a_{m_2n_2} \Rightarrow (m_1=m_2$ ve $n_1=n_2$ olur. $(m_1,n_1)=(m_2,n_2))$

f örten = $\forall a_{mn}\in \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ için $\exists (m,n)\in A\times B$ vardır öyle ki $f(m,n)=a_{mn}$.

Soru: $[0,1] \approx (0,1)$ kümeleri denktir.

Çözüm:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x=0 \\ \frac{x}{2x+1}, & x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N} \\ x, & x\neq 0, \frac{1}{n} \end{cases}$$

$f:[0,1]\longrightarrow(0,1)$, fonksiyonun $[0,1]$ ve $(0,1)$ aralıkları üzerinde 1-1 ve örten dönüşüm olduğunu göstermek yerine tersinin olduğunu gösterelim.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \; x = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{1-2x} & , \; x = \frac{1}{n+2} \quad , n \in \mathbb{N} \\ x & , \; x \neq \frac{1}{n+2}, \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bu fonksiyonun verilen f fonk.nunun tersi olduğunu göstermek için gof ve fog fonk.larına bakalım.

Amaç $g = f^{-1}$ olmalı

• gof

$x=0$ için $(gof)(0) = g(f(0)) = g(\frac{1}{2}) = 0 \qquad (gof)(0) = 0$

$x = \frac{1}{n}$ için $(gof)(\frac{1}{n}) = g(f(\frac{1}{n})) = g(\frac{1}{n+2}) = \frac{1}{n} \qquad (gof)(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$

$x \neq 0, \frac{1}{n}$ için $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x) = x \qquad (gof)(x) = x$

$\forall x$ için $f(x) = x$ olur. Bu durumda f, birim dönüşümdür. Birim dönüşümün tersi vardır.

Benzer işlemler fog için de yapılır. O halde fonk.nun tersi vardır.

Dolayısıyla f, 1-1 ve örten old.dan $[0,1] \approx (0,1)$ tir.

Soru: F_0, Cantor kümesinin elemanları $[0,1]$ aralığının üçlü açılımlarında payında $a_k = 1$ katsayı bulundurmayan noktalarından oluşur. Bu noktalar için $a_k \in \{0,2\}$ 'dir.

$$\boxed{x \in (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \in G_0 \;, \; a_k = 1 \qquad , \; x \in (\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}) \cup (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}) \in G_0 \quad a_k = 1}$$

=Çözüm=

G_0, Cantor kümesini oluştururken $[0,1]$ kapalı aralığından çıkardığımız uç noktalar 2 farklı 3'lü açılıma sahiptir.

$$F_1 = \{0, 1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}, \tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}, \dots\}$$

$k=1$ için

$$\frac{1}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \dots = 0,a_1a_2a_3\dots \\ \qquad = 0,1000 \\ \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots = \frac{2}{3^2}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)}_{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{2}{3^2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\frac{2}{3} = \begin{cases} 0,122\ldots \\ 0,200\ldots \end{cases}$

<u>$k=2$ için</u>

$\frac{1}{9} = \begin{cases} 0,0100\ldots \\ 0,0022\ldots \end{cases}$ $\frac{2}{9} = \begin{cases} 0,01222\ldots \\ 0,0200\ldots \end{cases}$

$\frac{7}{9} = \begin{cases} 0,2122\ldots \\ 0,20222\ldots \end{cases}$ $\frac{8}{9} = \begin{cases} 0,21222\ldots \\ 0,22000\ldots \end{cases}$

olarak uç noktaların iki farklı açılıma sahip olduğunu gösterdik.

$G_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left\{\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right\} \cup \ldots$

$\forall x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ noktasının üçlü açılımında $a_k = 1$ 'dir.

$\frac{1}{3} + x < \frac{2}{3}$ olacak şekilde yazılır.

$\frac{1}{3} \to 0,100\ldots$ a_1

$x = 0,a_1 a_2 a_3 \ldots$, $a_1 = 1$

$x \notin \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ noktalarının üçlü açılımları $a_1 \neq 1$ olarak yazılabilir.

$x \in [0,1]$ old. dan $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$

$x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow 0 + x \leq \frac{1}{3}$, $a_1 = 0$, $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \Rightarrow \frac{2}{3} + x \leq 1$, $a_1 = 2$

$k=2$ için,

Benzer biçimde $x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ için ortak özellik bu noktaların üçlü açılımlarını $a_2 = 1$ katsayısına sahip olmasıdır.

$x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) = \underbrace{\frac{1}{9}} + x < \frac{2}{9}$

$\frac{a_2}{p^2} = \frac{1}{3^2} + x < \frac{2}{9}$

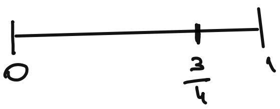
$x \notin \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ noktalarının üçlü açılımları $a_2 \neq 1$ ile ifade edilir.

Bu şekilde devam edersek $x \notin G_0$ için üçlü açılımlarının a_k katsayıları $a_k \neq 1$, $a_k \in \{0, 2\}$.

$$F_0 = \left\{ x : x \in [0,1] \text{ ve } x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} ; \ a_k \in \{0,2\} \right\}$$

Soru: $x = \frac{3}{4} \in [0,1]$ noktasındaki üçlü açılımı nedir?

=Çözüm=



$\boxed{\text{I. adım}}$

$\frac{n}{3} < \frac{3}{4} \Rightarrow$ en büyük n sayısı $n = 2 = a_1$

$\frac{a_1}{3} + \frac{n}{p^2} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{n}{3^2} < \frac{3}{4}$ $\quad n = a_2 = 0$

$\frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{n}{p^3} = \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{n}{3^3} < \frac{3}{4}$ en büyük n sayısı $n = a_3 = 2$

$\frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \frac{n}{p^4} = \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{n}{3^4} < \frac{3}{4}$ $\quad n = a_4 = 0$

$\frac{3}{4} = 0{,}2020\ldots = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$

Sağlama $\quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}$ olmalıdır. $p = 3$

$$x = \frac{3}{4} = \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \cdots$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right) = \frac{2}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{9}}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{4} \ \#$$

Ödev $\quad x = \frac{1}{8} \in [0,1]$ noktasının üçlü açılımı nedir? $(x \in G_0)$

* Üst Limit (lim sup) ve Alt Limit (lim inf)

(a_n) sınırlı olsun.

$m \leq a_n \leq M$ o.ş. m, M vardır.

$B_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} = \sup a_k \quad k \geq n$

$C_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} = \sup a_k \quad k \geq n$

B_n ve C_n sınırlıdır.

$\forall n$, (a_n) sınırlı old.dan B_n ve C_n sınırlıdır.

inf $\leq$ sup old.dan $C_n \leq B_n$

• B_n azalan

$B_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

$B_{n+1} = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$

$B_n \geq B_{n+1}$ olur.

B_n azalandır.

• C_n artan

$C_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

$C_{n+1} = \inf\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$

$C_n \leq C_{n+1}$ olur.

C_n artandır.

• B_n azalan + B_n alttan sınırlı ise bu dizi yakınsaktır.

$\exists B$ vardır $\rightarrow \lim B_n = B$

• C_n artan + C_n üstten sınırlı ise bu dizi yakınsaktır.

$\lim_{n\to\infty} C_n = C$ olur.

$B = \lim B_n = \lim \sup a_k$

$B = \lim_{n\to\infty} B_n = \inf_{n\to\infty} B_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k = \sup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}\, a_n$

azalan ve alttan sınırlı ise infimumu var.

$C = \lim C_n = \lim \inf a_k$

$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k = \lim \inf a_k = \underline{\lim}\, a_n$

(*) $\lim \inf a_n \leq \lim \sup a_n$

Tanım:

- $x = \overline{\lim} x_n = \lim \sup x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır. $\forall n > N$ için $x_n \leq x + \varepsilon$
- $x = \underline{\lim} x_n = \lim \inf x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır. $\forall n > N$ için $x_n \geq x - \varepsilon$.

Soru: $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ yakınsak $\Longleftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

=Çözüm=

$(\Rightarrow)$ $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ yakınsak olsun. $(x_n \to x)$

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ için $|x_n - x| < \varepsilon$ olur. $-\varepsilon < x_n - x < \varepsilon$

$\Rightarrow x - \varepsilon < x_n$ ve $x_n < x + \varepsilon$ olur.

O halde keyfi $\varepsilon > 0$ için,

$x_n < x + \varepsilon$ old. dan $\overline{\lim} x_n = x$

$x - \varepsilon < x_n$ old. dan $\underline{\lim} x_n = x$

O zaman $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = x$ olur.

$(\Leftarrow)$ $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$ olsun.

$\underline{\lim} x_n = \lim \inf x_n = x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall n > N_1$ için $x_n > x - \varepsilon$

$\overline{\lim} x_n = \lim \sup x_n = x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall n > N_2$ için $x_n < x + \varepsilon$

Verilen $\varepsilon > 0$ için

$\max\{N_1, N_2\} = N^*$ o.s. $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

$\Rightarrow \{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ 'de yakınsak old. sağlar.

Ödev = $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ o.ü. $\overline{\lim} (-x_n) = -\underline{\lim} x_n$ old. gös

Cebirler

6 Mart 2025

Tanım: $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X'in alt kümelerinin bir ailesi $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ aşağıdaki özellikleri sağlarsa $\mathcal{A}$'ya kümeler cebri (Boolean Cebri) denir.

(i) $A \in \mathcal{A}$ ise $A^{\sim} \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A}$ ise $A \cup B \in \mathcal{A}$

De morgan kuralından dolayı sonlu birleşim yerine sonlu kesişim de alabiliriz.

$(A \cap B) = (A^{\sim} \cap B^{\sim})^{\sim}$ old.dan $A, B \in \mathcal{A}$ için $A \cap B \in \mathcal{A}$'dır.

(*) İki kümenin birleşimi yerine sonlu kümenin birleşimi de alınabilir.

Örnek: $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{\{1, 2, \dots, n\} : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\mathcal{A}$, $\mathbb{N}$ üzerinde kümeler cebri midir?

$A = \{1, 2, \dots, n_0\}$ olsun.

$A^{\sim} = X \setminus A = \mathbb{N} \setminus A = \{n_0+1, n_0+2, \dots\} \notin \mathcal{A}$

O halde $\mathcal{A}$ kümeler cebri değildir.

Örnek: X herhangi bir küme, $\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$ olsun. $\mathcal{A}$ kümeler cebri midir?

$X \Rightarrow X^{\sim} = \emptyset \in \mathcal{A}$

$\emptyset \Rightarrow \emptyset^{\sim} = X \in \mathcal{A}$

$X \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{A}$ veya $X \cup \emptyset = X \in \mathcal{A}$

Kümeler cebridir.

Tanım: $X \neq \emptyset$ bir küme X'in alt kümelerinin bir $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ topluluğu aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathcal{A}$'ya X üzerinde bir σ-cebri denir.

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A}$ ise $\tilde{A} \in \mathcal{A}$'dır.

(iii) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ için $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \mathcal{A}$ 'dır.

De morgan kurallarından $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\sim}$ dur.

Yani σ-cebri tanımında (iii) sayılabilir kesişim ile verilebilir.

(*) Her σ-cebri bir kümeler cebridir. Tersi doğru değildir.

(*) σ-cebri tanımında (i) ve (ii) den dolayı $\emptyset \in \mathcal{A}$ 'dır.

(*) σ-cebri, sayılabilir birleşim ile tanımlanır, sayılamaz çoklukta kümenin birleşimi üzerinden tanımlanmaz.

Örnek: $\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$ bir σ-cebridir. (I) $X \in A$

(II) $A = \{X\} \Rightarrow X^{\sim} = \emptyset \in A$ ✓

$A = \emptyset \Rightarrow \emptyset^{\sim} = X \in A$ ✓

(III) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$; $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$

$X \subset A$; $X \cup \emptyset \subset A$ ✓

$\emptyset \subset A$; $X \cup \emptyset \subset A$ ✓

Örnek: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ bir σ-cebridir.

(i) $X \subset X$ old.dan $X \in \mathcal{P}(X) = \mathcal{A}$

(ii) $A \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. $A \subset X \Rightarrow X \setminus A \subset X \Rightarrow \underbrace{X \setminus A}_{\tilde{A}} \in \mathcal{P}(X)$

(iii) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun, $\forall i \in \mathbb{N}$ için $A_i \subset X \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq X$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{P}(X)$

$\mathcal{P}(X)$ bir σ-cebridir.

Teorem: X kümesinin alt kümelerinden oluşan herhangi bir topluluk $\mathcal{H}$ olsun. X üzerinde tanımlı ve $\mathcal{H}$'yi kapsayan en küçük bir σ-cebri vardır.

=İspat=

$\mathcal{H}$'yi kapsayan tüm σ-cebirlerini $\mathcal{C}$ ile gösterelim. Bu $\mathcal{C}$, σ-cebirlerinin topluluğu $\mathcal{M}$ olsun.

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{C} : \mathcal{C}\ \sigma\text{-cebri ve } \mathcal{H} \subset \mathcal{C}\}$$

$P(X) \in \mathcal{M}$ old.dan $\mathcal{M} \neq \emptyset$ 'dır.

$\mathcal{A} = \cap\{\mathcal{C} : \mathcal{C} \in \mathcal{M}\}$ tanımlayalım. $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{M}$ için $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$ old.dan

$$\mathcal{H} \subset \bigcap_{\mathcal{C}\in\mathcal{M}} \mathcal{C} = \mathcal{A} \quad \text{olur.}$$

$\mathcal{A}$ nın σ-cebri olduğunu gösterelim.

(i) $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{M}$ bir σ-cebri old.dan $X \in \mathcal{C}$ dir. $(\forall \mathcal{C} \in \mathcal{M})$ O halde

$$X = \bigcap_{\mathcal{C}\in\mathcal{M}} \mathcal{C} = \mathcal{A}$$

(ii) $A \in \mathcal{A}$ için $A^{\sim} \in \mathcal{A}$ olur mu?

$A \in \mathcal{A}$ old.dan $A \in \bigcap_{\mathcal{C}\in\mathcal{M}} \mathcal{C}$ yani her $\mathcal{C} \in \mathcal{M}$ için $A \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$, σ-cebri olddan $A^{\sim} \in \mathcal{C}$ olur. $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{M}$ için bu sağlandığından

$$A^{\sim} \in \bigcap_{\mathcal{C}\in\mathcal{M}} \mathcal{C} = \mathcal{A} \quad \text{bulunur.}$$

(iii) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ için $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ mı?

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{C}\in\mathcal{M}} \mathcal{C}$ 'dır. Yani $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{M}$ için $\{A_i\} \subset \mathcal{C}$ dir.

$\forall \mathcal{C} \in \mathcal{M}$ σ-cebri olddan

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C} \quad (\mathcal{C} \in \mathcal{M})$$

O halde $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_{\mathcal{C}\in\mathcal{M}} \mathcal{C} = \mathcal{A}$ 'dır.

$\mathcal{A}$ bir σ-cebridir ve $\mathcal{H}$'yi kapsayan en küçük σ-cebridir.

Örnek X üzerinden iki σ-cebrinin birleşimi X üzerinde bir σ-cebri midir?

$$\mathcal{A} = \{ \mathbb{N}, \emptyset, \{2n : n \in \mathbb{N}\}, \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\} \}$$

$$\mathcal{B} = \{ \mathbb{N}, \emptyset, \underbrace{\{3n : n \in \mathbb{N}\}}_{A}, \underbrace{\{3n+1 : n \in \mathbb{N}\}}_{B}, \underbrace{\{3n+2 : n \in \mathbb{N}\}}_{C}, A \cup B, B \cup C, A \cup C \}$$

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, $\mathbb{N}$ üzerinde σ-cebridir.

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{ \mathbb{N}, \emptyset, \{2n : n \in \mathbb{N}\}, \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}, A, B, C, A \cup B, B \cup C, A \cup C \}$ kümesi σ-cebri değildir, çünkü

$$\{2n : n \in \mathbb{N}\} \cup A \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$

Yani $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ birleşim işlemine göre kapalı değildir. Bu nedenle σ-cebri değildir.

* Borel Kümeleri

Biliyoruz ki açık kümelerin sonlu kesişimleri her zaman açıktır fakat sayılabilir kesişimleri için bunu söyleyemeyiz.

$$\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right)}_{\text{açık}}}_{\text{açıkların sayılabilir kesişimi}} = \underbrace{\{a\}}_{\text{tek nokta kümesi kapalı}}$$

Benzer şekilde kapalı kümelerin sonlu birleşimleri kapalıdır fakat sayılabilir birleşimleri için kesin bir şey söyleyemeyiz.

$$\underbrace{(a,b)}_{\text{açık}} = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]}_{\text{kapalı}}}_{\text{kapalıların sayılabilir birleşimi}}$$

Tanım: Bir kümeler topluluğunun açık kümelerinin sayılabilir kesişimi olarak ifade edilebilen kümelere G_δ - türü küme denir.

$\mathbb{R}$ de $\{a\}$ tek nokta kümesi G_δ - türü kümedir.

Tanım: Bir kümeler topluluğunun kapalı kümelerinin sayılabilir birleşimi olarak ifade edilebilen kümelere F_σ - türü küme denir.

$\mathbb{R}$'de (a,b) aralığı F_σ - türü kümedir.

F_σ, G_δ özel Borel kümeleridir. Bu kümelerin tanımları ile Borel kümeleri inşa edilebilir.

örnek: F_σ - türü sayılabilir kümenin kesişimi $F_{\sigma\delta}$ - türü Borel kümesidir.

Bu şekilde,

$G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, ... türü kümeler inşa edilebilir.

$$\mathbb{Q} = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty}\{q_i\}}_{F_\sigma} = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(q_i-\frac{1}{n},\ q_i+\frac{1}{n}\right)\right)}_{G_{\delta\sigma}} = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty}\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[q_i-\frac{1}{n}+\frac{1}{k},\ q_i+\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right]}_{F_\sigma}\right)}_{F_{\sigma\delta}}}_{F_{\sigma\delta\sigma}}$$

Tanım: Borel kümeleri topluluğu $\mathcal{B}$ ile gösterilir. Bu kümeler ailesi $\mathbb{R}$'nin tüm açık kümelerini içeren en küçük σ - cebridir. Tümleyen alma işlemine göre kapalılıktan, $\mathcal{B}$, $\mathbb{R}$'nin tüm kapalı kümelerini de içerir.

$(a,b]$, $[a,b]$, (b,∞), $(-\infty,a)$, $\{a\}$, $[b,\infty)$ Borel kümeleridir.

örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. $c\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$A=\{x\in\mathbb{R} : f(x)\leq c\}$$

$$B=\{x\in\mathbb{R} : f(x)\geq c\}$$

$$C=\{x\in\mathbb{R} : f(x)=c\}$$

kümeleri Borel kümesi midir?

$$C=A\cap B$$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonk.nu $g(x)=-f(x)$ olarak tanımlanırsa, g sürekli bir fonk. dur

ve $B=\{x\in\mathbb{R} : g(x)\leq -c\}$ old.dan A kümesinin Borel kümesi old. gösterilirse

B ve C nin de Borel kümesi old. gösterilir.

$$\{x\in\mathbb{R} : f(x)<c+\tfrac{1}{n}\}=f^{-1}\left((-\infty, c+\tfrac{1}{n})\right)$$

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}(-\infty, c+\tfrac{1}{n})\right) \text{ dir.}$$

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(f^{-1}\underbrace{(-\infty, c+\tfrac{1}{n})}_{\text{açık}}\right)}_{\substack{f \text{ sürekli old.dan da} \\ \text{ters görüntü açık}}}$$ G_δ -türü kümedir.

Yani bir Borel kümesidir.

f yerine g, c yerine $-c$ alınırsa B nin Borel kümesi old. görülür.

A, B Borel kümeleri ve B bir σ-cebri old.dan $A\cap B$, Borel kümesidir.

II. yol $C=\underbrace{f^{-1}(\underbrace{\{c\}}_{\text{kapalı}})}_{\substack{f \text{ sürekli old.dan} \\ \text{kapalı}}}$, B Borel σ-cebri tüm kapalı kümeleri içerdiğinden C bir Borel kümesidir.

III. yol $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}\underbrace{f^{-1}\left(\underbrace{(c-\tfrac{1}{n}, c+\tfrac{1}{n})}_{\text{açık}}\right)}_{\text{açık}}$, G_δ türü.

$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(c-\frac{1}{n}, \infty\right)\right)$ G_δ türü

A, F_σ türü bir küme ise $A^\sim$ G_δ türü bir kümedir. Tersi de doğrudur.

Örnek: X sayılamaz bir küme,

(i) $\mathcal{A}_1 = \{A \subset X : A \text{ sayılabilir}\}$

(ii) $\mathcal{A}_2 = \{A \subset X : A \text{ veya } X \setminus A \text{ sayılabilir}\}$

küme aileleri X üzerinde σ- cebri midir?

(i) X sayılamaz old.dan $X \notin \mathcal{A}_1$, Tümleyeni kapalı değil göster.

(ii)

a) $X \in \mathcal{A}_2$ mi?

$X \setminus X = \emptyset$ old.dan ve $\emptyset$ sayılabilir old.dan $X \in \mathcal{A}_2$'dir.

b) $A \in \mathcal{A}_2$ olsun $A^\sim \in \mathcal{A}$ mı?

$A \in \mathcal{A}_2$ old.dan A sayılabilir veya $A^\sim$ sayılabilir.

$\Rightarrow A^\sim \in \mathcal{A}_2$

$X \setminus A$ sayılamaz

ama

$(X \setminus A)^\sim = A$ sayılabilir

$\Rightarrow A^\sim \in \mathcal{A}_2$

c) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}_2$ olsun. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_2$ mı?

$\forall i$ için $A_i \in \mathcal{A}_2$. Bu durumda 3 durum söz konusudur:

1) Her bir A_i sayılabilir küme olsun. Sayılabilir sayıda sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir old.dan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ kümesi sayılabilirdir. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_2$'dir.

2) Her bir $A_i^{\sim}$ sayılabilir olsun.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ kümesi sayılamazdır. $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\sim}$ sayılabilir mi?

$$\overset{\text{De morgan}}{=}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\sim} = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{\infty} \underbrace{A_i^{\sim}}_{\text{sayılabilir}}}_{\text{sayılabilir}} \subset A_i \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_2 \text{ olur.}$$

3) $\{A_i\}$ kümeler dizisinde bazı kümeler sayılabilir bazılarının da tümleyeni sayılabilir olsun.

$B = \{A_i : A_i \text{ sayılabilir}\}$

$C = \{A_i : \underbrace{A_i \text{ sayılamaz}}_{A_i^{\sim} \text{ sayılabilir.}}\}$ olsun.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \underbrace{\underbrace{\left(\bigcup_{A_i \in B} A_i\right)}_{\text{sayılabilir.}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{A_i \in C} A_i\right)}_{\text{sayılamaz}}}_{\text{sayılamaz.}} \quad \text{sayılamaz bir kümedir.}$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\sim} = \left(\bigcap_{A_i \in B} A_i^{\sim}\right) \cap \left(\bigcap_{A_i \in C} A_i^{\sim}\right) \subset \underbrace{\bigcap_{A_i \in C} \underbrace{A_i^{\sim}}_{\text{sayılabilir}}}_{\text{sayılabilir}}$$

$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\sim}$ kümesi sayılabilir bir kümenin alt kümesi old. için sayılabilirdir.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_2$ 'dır.

NOT: $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}(x_n)$ 11 Mart 2025

$\underline{\lim}\, x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > N$ için $x_n > x - \varepsilon$

$\overline{\lim}\, x_n = x \iff |\forall \varepsilon| \quad |\exists N| \quad |\forall n|$ için $x_n < x + \varepsilon$

SORU: $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \overset{①}{\leq} \underline{\lim}(x_n + y_n)$
$\overset{②}{\leq} \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$
$\overset{③}{\leq} \overline{\lim}\,(x_n + y_n)$
$\overset{④}{\leq} \overline{\lim}(x_n) + \overline{\lim}(y_n)$

Çözüm:

① için $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \overset{?}{\leq} \underline{\lim}\,(x_n + y_n)$

$\underline{\lim}\, x_n = x$ ve $\underline{\lim}\, y_n = y$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Tanımdan; } (\forall \varepsilon)\ (\exists N_1)\ (\forall n > N_1) \\ \qquad x_n > x - \frac{\varepsilon}{2} \\ (\forall \varepsilon)\ (\exists N_2)\ (\forall n > N_2) \\ \qquad y_n > y - \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \text{ olur.}$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ için $x_n + y_n > x + y - \varepsilon$ elde edilir.

$n \to \infty$ ve $\varepsilon > 0$ iken

$$\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \geq x + y = \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$$

② için $\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \overset{?}{\leq} \overline{\lim}(x_n) + \underline{\lim}(y_n)$

$\underline{\lim}\,(x_n + y_n) - \overline{\lim}\,(x_n) \overset{?}{\leq} \underline{\lim}\, y_n$

$\underline{\lim}\,(x_n + y_n) - \underbrace{(-\underline{\lim}\,(-x_n))}_{\text{nottan yazdık.}} = \underline{\lim}\,(x_n + y_n) + \underline{\lim}\,(-x_n) \underset{\text{① 'den}}{\leq} \underline{\lim}\,(x_n + y_n - x_n) = \underline{\lim}\, y_n$

O halde $\underline{\lim}(x_n+y_n) \leq \overline{\lim}(x_n) + \underline{\lim}(y_n)$ olur.

④ için $\overline{\lim}(x_n+y_n) \overset{?}{\leq} \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$

$\overline{\lim}\, x_n = x$ ve $\overline{\lim}\, y_n = y$ olsun.

Tanımdan: $(\forall \varepsilon)\ (\exists N_1)\ (\forall n > N_1)$

$x_n < x + \frac{\varepsilon}{2}$ olur.

- $(\forall \varepsilon)\ (\exists N_2)\ (\forall n > N_2)$

$y_n < y + \frac{\varepsilon}{2}$ olur.

$x_n + y_n < x + y + \varepsilon$ ve $n \to \infty$ ve $\varepsilon > 0$ için

$\overline{\lim}(x_n+y_n) \leq x+y = \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$

③ için. $\overline{\lim}(x_n) + \underline{\lim}(y_n) \overset{?}{\leq} \overline{\lim}(x_n+y_n)$

$\overline{\lim}(x_n+y_n) - \underline{\lim}(y_n) \geq \overline{\lim}(x_n)$

$\overline{\lim}(x_n+y_n) + \underbrace{\overline{\lim}(-y_n)}_{\text{notdan yazdık}} \geq \overline{\lim}(x_n+y_n-y_n) = \overline{\lim}\, x_n$ olur.

SORU: f, X ten Y ye bir fonksiyon ve $\mathcal{A}$ kümeler topluluğu X üzerinde bir σ-cebri olsun. Bu durumda; $\mathcal{F} = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$, $\underline{Y \text{ nin}}$ alt kümeleri ile tanımlanmış bir σ-cebridir. Gösteriniz.

=Çözüm=

(i) $Y \in \mathcal{F}$?

$X = f^{-1}(Y)$ ve $\mathcal{A}$ X üzerinde σ-cebri old.dan

$X \in \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$ old.dan $Y \in \mathcal{F}$ olur.

$\mathcal{F} = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$

$Y \subset Y : f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$

(ii) $A \subset \mathcal{F}$ olsun. $A^c \in \mathcal{F}$?

$A \in \mathcal{F} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ olur. $\mathcal{A}$ bir σ-cebri old. dan
küme tanımı

$(f^{-1}(A))^c \in \mathcal{A}$ olur. $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$ old. dan $f^{-1}(A^c) \in \mathcal{A}$ old. dan

küme tanımından $A^c \in \mathcal{F}$ olur.

(iii) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ deki kümelerin sayılabilir bir topluluğu olsun.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$?

Buna göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{F}$ ise $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}$ olur.

$\mathcal{A}$, σ-cebri old. dan

$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}$ olur.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathcal{A}$ olur.

O halde $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ olur.

Böylece $\mathcal{F}$, Y de bir σ-cebridir.

SORU: $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F}$, X üzerinde bir σ-cebri ve $A \subset X$ olsun.

$\mathcal{F}_A = \{A \cap E : E \in \mathcal{F}\}$ tanımlansın. $\mathcal{F}_A$, A üzerinde bir

σ-cebri olduğunu gösteriniz.

=Çözüm=

(i) $A \in \mathcal{F}_A$?

$\mathcal{F}$, X üzerinde bir σ-cebri old. dan $X \in \mathcal{F}$ olur.

$X = E$ alınırsa $A \cap X = A \in \mathcal{F}_A$ olur.

(ii) $F \in \mathcal{F}_A$ olsun. $F^c \in \mathcal{F}_A$?

$F = A \cap E$ o.ş. $\exists E \in \mathcal{F}$ vardır.

$$F^c = A \setminus F = A \setminus (A \cap E) = A \cap (A \cap E)^c = A \cap (A^c \cup E^c)$$
$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap E^c)$$
$$= \emptyset \cup (A \cap E^c) \text{ olur.}$$

$F^c = A \cap E^c$ olur.

$F^c = A \cap E^c$ ve $\mathcal{F}$ σ-cebri old.dan $E \in \mathcal{F} \Rightarrow E^c \in \mathcal{F}$ olur.

O halde $F^c \in \mathcal{F}_A$ olur.

(iii) $\{F_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}_A$ dan alınmış bir topluluk olur.

Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $F_k \in \mathcal{F}_A$ olur.

$F_k = A \cap E_k$ o.ş. $\exists E_k \subset \mathcal{F}$ olur.

$E_k \in \mathcal{F}$ ise $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}$ olur.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k) = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)$$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)$ ve $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}$ old.dan.

tanımdan $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathcal{F}_A$ olur.

O halde $\mathcal{F}_A$, A üzerinde σ-cebridir.

SORU: B herhangi bir küme olmak üzere

$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \subset B \subset X\}$ sınıfı X üzerinde bir σ_cebridir, gösteriniz.

(I) $X \in \mathcal{A}$? v $\emptyset \in \mathcal{A}$?

$\emptyset \subset X \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$, $B = X$ alınırsa;

$A \subset X \Rightarrow A \in \mathcal{A}$

=Çözüm=

(i) $X \in \mathcal{A}$? ya da $\emptyset \in \mathcal{A}$?

$\emptyset \subset B \subset X$ old. dan $\emptyset \in \mathcal{A}$

(II) $A \in \mathcal{A}$; $A \subset B \subset X$

$B = X$ için $A \subset X \subset X$ yani $A \subset X$ old. dan $X \in \mathcal{A}$.

$B = X$ alınırsa $A \subset X$ old. $A^c \subset X$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ ✓

(ii) $A \in \mathcal{A}$ ise $A^c \in \mathcal{A}$?

$A \in \mathcal{A}$ ise tanımdan $A \subset B \subset X$ olur.

$B = X$ alınırsa $A \subset X$ olacağından $A^c \subset X$ olur. $A^c \in \mathcal{A}$ olur.

(III) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ olsun

(iii) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ olsun. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$?

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$?

$A_n \subset B \subset X$ olarak yazılır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup B \subset \bigcup X \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset B \subset X$ olur.

$A_n \subset B \subset X$

$\forall n \in \mathbb{N}$; $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup B \subset \bigcup X$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ olur.

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset B \subset X$ ✓

$\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ_cebridir.

SORU: A ve B kümeleri $\mathcal{A}$ kümeler cebrinin elemanları ise $A \Delta B$ kümesi $\mathcal{A}$'dadır.

=Çözüm=

Tanım: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

$A, B \in \mathcal{A}$ olsun. $A \Delta B = \underset{*}{(A \setminus B)} \cup \underset{**}{(B \setminus A)}$ 'dır.

$^{*}A \setminus B = A \cap B^c = \underbrace{(\underbrace{A^c}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{B}_{\in \mathcal{A}})}_{\in \mathcal{A}}{}^c \in \mathcal{A}$

$^{**}B \setminus A = B \cap A^c = \underbrace{(\underbrace{B^c}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{A}_{\in \mathcal{A}})}_{\in \mathcal{A}}{}^c \in \mathcal{A}$

A kümeler cebri old. dan $A \Delta B \in \mathcal{A}$ 'dır.

SORU: Her tipten aralık, ışın ve tek nokta kümelerinin Borel cebrinin elemanı old. gösteriniz

=Çözüm=

Hatırlatma: $\mathbb{R}$ de ki açık aralıkların ürettiği σ-cebrine Borel cebri denir.

Borel cebri aynı zamanda bir σ-cebridir.

① $(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(a, b+\frac{1}{n}\right)}_{\text{açık}}$ = açık aralıkların sayılabilir kesişimi old. $\underline{G_\delta\text{-türü kümedir}}$

Borel cebrinin özel hali.

$(a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

② $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right)}_{\text{açık}}$ = açık aralıkların sayılabilir kesişimi G_δ-türü kümedir

$[a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

③ $(b,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(b, b+n)}_{\text{açık}}$ = açık aralıkların sayılabilir birleşimi

$(b,b+n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ve Borel cebri aynı zamanda σ-cebridir.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} (b,b+n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

④ $(-\infty,a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a-n, a)}_{\text{açık}}$ = açık aralıkların sayılabilir birleşimi

$\bigcup_{n=1}^{\infty} (a-n,a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

⑤ $(-\infty,a] = (-\infty, a-1) \cup [a-1, a]$ genel formda doğru. ✓

$\boxed{a>0}$ $= \underbrace{\left(-\infty, \frac{a}{2}\right)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \cup \underbrace{\left[\frac{a}{2}, a\right]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Borel cebri aynı zamanda σ-cebridir.
σ-cebri aynı zamanda kümeler cebridir.

⑥ $[b,\infty) = \underbrace{[b,2b]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \cup \underbrace{(2b,\infty)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $b>0$

$= [b, b+1] \cup (b+1, \infty)$ genel form.

⑦ $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ G_δ -türü küme oluyor.

13 Mart 2025

Lebesgue Ölçü (R üzerinde tanımlı diyeceğiz.)

Bir (a,b) aralığı için bu aralığın boyu a,b sonlu ise,

$$\ell(a,b) = b-a$$

a ve b den biri sonsuz ise ∞ olur.

Yani (a,b) aralığının boyu aralığın uzunluğudur.

Uzunluk fonksiyonunu daha farklı kümelere genişletmek istiyoruz.

$\mathcal{M}$, reel sayı kümelerinden oluşan bir kümeler ailesi olsun.

$$m : \mathcal{M} \longrightarrow [0,\infty]$$

küme fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa bu fonksiyona $\mathcal{M}$ üzerinde Lebesgue ölçüsü ve bir $E \in \mathcal{M}$ için $m(E)$ nonnegatif (yani sıfır veya pozitif olan) genişletilmiş reel sayısına E kümesinin Lebesgue ölçüsü denir.

(i) Her $E \in \mathcal{M}$ için $m(E)$ tanımlı ve $m(E) \geq 0$.

(ii) Bir aralığın Lebesgue ölçüsü aralığın boyuna eşittir,

yani $E = (a,b)$ ise,

$$m(E) = \ell(E) = \ell(a,b) = b-a.$$

(iii) m sayılabilir toplamsaldır. $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ kümeler dizisi ikişer ikişer ayrık ($n \neq m$ için $E_n \cap E_m = \emptyset$) o.ü.

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \quad \text{'dır.}$$

(iv) m öteleme altında invaryanttır (değişmezdir.) $E \subseteq \mathbb{R}$ ve $y \in \mathbb{R}$ için E kümesinin y kadar ötelenmesi

$E + y = \{x + y : x \in E\}$ olan küme için $m(E+y) = m(E)$ dir.

Lebesgue ölçüsü tanımı için verilen bu özellik çalışılan uzaya göre esnetilebilir. Örneğin, $P(\mathbb{R})$ kuvvet kümesi üzerinde tanımlamak yerine, bir σ-cebri üzerinde tanımlı olma koşulu verilebilir.

Önerme: $\mathcal{M}$ üzerinde Lebesgue ölçü tanımlı olduğu bir σ-cebri olsun.

$m : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ Lebesgue ölçüsü aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $A \subseteq B$ için $m(A) \leq m(B)$ 'dir.

(Yani Lebesgue ölçüsü monotondur.)

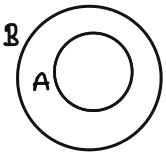
(ii) $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ için $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$

(Yani m sayılabilir alt toplamsal)

(iii) $\mathcal{M}$ kümesinde $m(E) < \infty$ o.ş. $E \in \mathcal{M}$ varsa $m(\emptyset) = \emptyset$ 'dır.

=İspat=

(i) $A \subseteq B$ $\quad B = A \cup (B \setminus A)$ ve $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$



$m(B) = m(A \cup (B \setminus A))$ } m'nin ~~sonlu toplamsallığından~~ sayılabilir toplamsallığı.

$= m(A) + \underbrace{m(B \setminus A)}_{\geq 0}$ } $m \geq 0$ olduğdan

$m(B) \geq m(A)$

(ii) $\{E_n\} \subset \mathcal{M}$ bir kümeler dizisi olsun.

Yardımcı ifade: $\mathcal{M}$ nin elemanlarından oluşan bir $\{E_n\}$ kümeler topluluğu verildiğinde, yine $\mathcal{M}$ nin elemanlarından oluşan $\forall n \geq 1$ için $A_n \subseteq E_n$ ve $n \neq m$ için $A_n \cap A_m = \emptyset$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ o.ş. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ vardır.

Bu durumda m sayılabilir toplamsal old.dan

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \text{ 'dir.}$$

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} m(A_n) \qquad (*)$$

$n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subseteq E_n$ old.dan (i) şıkkından $m(A_n) \leq m(E_n)$. Bu yukarıda kullanılırsa

$$(*) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

(iii) $E \in \mathcal{M}$, $m(E) < \infty$ olsun.

$E = E \cup \emptyset$, $E \cap \emptyset = \emptyset$

$$m(E) = m(E \cup \emptyset) = m(E) + m(\emptyset)$$

m nin sonlu toplamsallığı

$m(E)$ sonlu ölçülü old.dan $(m(E) < \infty)$ $m(E) - m(E) = 0 = m(\emptyset)$

Tanım: $\mathcal{M}$, X (sayılabilir) kümesi üzerinde bir σ-cebiri olsun.

$$S: \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$$

fonksiyon her $E \in \mathcal{M}$ için,

$$S(E) = \begin{cases} e, & E \text{ sonlu elemanlı, eleman sayısı } e \\ \infty, & E \text{ sayılabilir sonsuz elemanlı} \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

Bu fonksiyon sayılabilir toplamsal, öteleme altında değişmeyen bir küme fonksiyonudur. X'in her alt kümesi için tanımlıdır.

$s: P(X) \longrightarrow [0,\infty]$ küme fonk.nu sayma ölçüsü adını alır.

• $y \in X$, $E \in P(X)$ için

$$E+y = \{x+y : x \in E\}$$

E nin eleman sayısı e ise $E+y$ nin eleman sayısı da e dir.

Yani $s(E) = s(E+y)$.

Dolayısıyla s öteleme altında değişmez.

• $s(\emptyset) = 0$ 'dır.

• S nin sayılabilir toplamsal old. göstermek için ikişer ikişer ayrık $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(X)$ kümeler dizisi alalım.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ kümesi sayılabilirdir.

• Eğer bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için E_{n_0} sonsuz elemanlı ise,

$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ sonsuz elemanlıdır. $\quad s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} s(E_n) = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} s(E_n)}_{<\infty} + \underbrace{s(E_{n_0})}_{\infty} + \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} s(E_n)}_{0 \leq M \leq \infty} = \infty \quad \boxed{\forall E_n = \emptyset \text{ olursa } 0}$$

Şimdi de her E_n kümesinin sonlu elemanlı olduğunu kabul edelim.

E_n

- $\exists n_0$, E_{n_0} sonsuz
- $\forall n$ için E_n sonlu
  - sonlu tane sonlu elemanlı E_n = sonsuz tane boş küme
  - sonsuz tane sonlu elemanlı E_n = sonlu tane boş küme

☆ Sonsuz tane E_n kümesi boştan farklı ise,

$$\sum_{n=1}^{\infty} s(E_n) = \sum_{\substack{n=1 \\ E_n \neq \emptyset}}^{\infty} s(E_n) = \infty = s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \Bigg\} \; \{E_n\}\text{'ler ikişer ikişer ayrık}$$

☆ Sonlu elemanlı sonlu tane E_n kümesi var ise, (N tane olsun.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} s(E_n) = \sum_{n=1}^{N} s(E_n) + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} s(\underbrace{E_n}_{\emptyset})}_{\emptyset} < \infty$$

$$s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = s\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) < \infty$$

$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ kümeleri ikişer ikişer ayrık olduklarından, $s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} s(E_n)$

s, sayılabilir toplamsaldır.

NOT: $X = \mathbb{N}$ alırsak, s, $P(\mathbb{N})$ üzerinde sayma ölçüsü olur.

Ölçü Fonksiyonu:

Tanım: $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir X kümesi verilmiş olsun. X üzerinde tanımlı σ-cebri $\mathcal{M}$ olsun.

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$$

küme fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa μ'ye $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçü denir:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Her $E \in \mathcal{M}$ için $\mu(E) \geq 0$

(iii) $\{E_n\} \subset \mathcal{M}$ ve $n \neq m$ için $E_n \cap E_m = \emptyset$ için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ dır.

(*) Sayma ölçüsü bir ölçüdür.

(*) $(X, \mathcal{M})$ ölçülebilir uzay. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ölçü uzayı.

genel küme — X üzerinde σ-cebri — $\mathcal{M}$ üzerinde ölçü.

$$\sum_{k=1}^{n} 2.k = 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = n.n+1$$

Örnek: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$, $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s)$ } ölçü uzayı.

NOT: $\mu(X) \geq 0$ ve $\mu(X) = 1$ ise μ'ye olasılık ölçüsü denir.

Önerme: $\mathcal{M}$, X üzerinde bir σ-cebri, μ, $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçü ise μ aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) μ monotondur.

(ii) μ sayılabilir alt toplamsaldır.

(iii) $\mu(A) < \infty$ o.s. $A \in \mathcal{M}$ varsa $\mu(\emptyset) = 0$ 'dır.

Örnek: $\mathcal{M}$, X üzerinde bir σ-cebri, μ $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçü ve $A \in \mathcal{M}$ sabit bir küme olsun.
Her $E \in \mathcal{M}$ için $\nu(E) = \mu(E \setminus A)$ olarak tanımlı ν $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçüdür, gösteriniz.

= Çözüm =

(i) $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset \setminus A) = \mu(\emptyset) = 0$; μ, $\mathcal{M}$ üzerinde ölçü

(ii) $E \in \mathcal{M}$ olsun.

$\nu(E) = \mu(E \setminus A) \geq 0$; μ, $\mathcal{M}$ üzerinde ölçü.

$$\overset{\in\mathcal{M}}{E \setminus A} = \underbrace{E \cap \overset{\in\mathcal{M}}{\tilde{A}}}_{\in\mathcal{M}}$$

(iii) $\{E_n\} \subset \mathcal{M}$, ikişer ikişer ayrık kümeler ailesi olsun.

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\setminus A\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n\setminus A)\right) \quad (*)$$

$n \neq m$ için $E_n \cap E_m = \emptyset$ old.dan $(E_n\setminus A) \cap (E_m\setminus A) = \emptyset$

$\{E_n\setminus A\}_{n=1}^{\infty}$ ikişer ikişer ayrık kümeler ailesindir. μ, $\mathcal{M}$ üzerinde ölçü old.dan, μ nün sayılabilir toplamsallığından,

$$(*) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n\setminus A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

Dolayısıyla ν, $\mathcal{M}$ üzerinde sayılabilir toplamsaldır.

(i) halde, ν, $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçüdür.

Dış Ölçü:

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ olsun. Bu kümenin açık aralıklarla yapılan herhangi bir örtülüşü $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ olsun. A kümesinin sayılabilir ya da sonlu sayıda aralıktan oluşan örtülüşlerini tanımlayabiliriz. Bu şekilde mümkün olan tüm örtülüşleri oluşturan aralıkların boylarının toplamlarını göz önüne alalım. Bu şekilde alttan sınırlı bir reel sayılar kümesi oluştururuz. Bu kümenin infimumu A kümesinin dış ölçüsü olarak adlandırılır ve $m^*(A)$ ile gösterilir.

$$m^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)\right\} = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \ : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$$

$$m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,\infty]$$

Dış ölçü, Lebesgue ölçüsü değildir çünkü sayılabilir toplamsal değildir.

Önerme: Dış ölçü monotondur.
Yani $A \subseteq B$ için $m^*(A) \leq m^*(B)$ 'dir.

=İspat=

B kümesinin açık aralıklarla yapılan bir örtülüşü $B \subset \bigcup_n I_n$ olsun
Bu aynı zamanda A kümesi için bir örtülüştür.
Dış ölçü tanımından,

$$\underbrace{m^*(A)}_{\inf \sum \ell(I_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \text{ 'dir.}$$

B nin örtülüşleri üzerinden infimum alınırsa,

$$m^*(A) \leq \inf \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = m^*(B)$$

$$\Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B).$$

Önerme: $m^*(\emptyset) = 0$ 'dır.

=İspat=

Boş kümenin hiç elemanı olmadığından $\varepsilon > 0$ için
$\emptyset \subset \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ olarak $\emptyset$' yi örtebiliriz.

Dış ölçü tanımından

$$0 \leq m^*(\emptyset) \leq \ell\left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa

$$m^*(\emptyset) = 0 \quad \text{bulunur.}$$

Önerme: Tek nokta kümesinin dış ölçüsü 0 'dır.

Yani $E=\{x\}$ ise $m^*(\{x\})=0$ 'dır.

=İspat=

$\{x\} \subset \left(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Dış ölçü tanımından

$$0 \leq m^*(\{x\}) \leq \ell\left(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa $m^*(\{x\})=0$ dır.

Tek nokta kümesinin dış ölçüsü sıfırdır.

yani $\{x\}$; $m^*(\{x\})=0$

$\{x\} \subset \ell\left(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$

Dış ölçü tanımından

$$0 < m^*(\{x\}) \leq \ell\left(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa

$m^*(\{x\})=0$ bulunur.