

Teorem. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ düzgün sürekli fonksiyon olsun. f Cauchy dizilerini Cauchy dizilerine resmeder.

İspat. (x_n) , X de bir Cauchy dizisi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $\exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ geçerlidir. Dolayısıyla $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \delta$ gerçekleşir. Bu bilgileri toplarsak

$$n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

gerçeklenir. Yani $(f(x_n))$, Y de bir Cauchy dizisidir.

Örnek. $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$ ise $z \in \mathbb{C}$ için $f_\omega(z) = \omega z$ ile tanımlı $f_\omega : (\mathbb{C}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$ fonksiyonu bir izomorfidir?

Çözüm. $u \in \mathbb{C}$ keyfi kompleks sayısı gözönüne alırsa $\frac{u}{\omega} \in \mathbb{C}$ dir ve $f_\omega\left(\frac{u}{\omega}\right) = \omega \frac{u}{\omega} = u$ geçerlidir, yani f_ω örtendir.

Ayrıca $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için

$$|f_\omega(z_1) - f_\omega(z_2)| = |\omega z_1 - \omega z_2| = |\omega| |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$$

olduğundan f izometridir. O halde f_ω izomorfidir.

Örnek. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $f(x, y) = x + iy$ ile tanımlı $f : (\mathbb{R}^2, d_e) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$ fonksiyonu bir izometridir?

Çözüm. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

olmak üzere, her $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_e(a, b) = d_e((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)|$$

$$= |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |f(a) - f(b)| = \rho(f(a), f(b))$$

gerçeklendiğinden f izometridir.

Örnek. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ uzayının $X = [0, 1]$ üzerinde belirlediği metrik d_X , $Y = [0, 3]$ üzerinde belirlediği metrik d_Y olmak üzere için $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 3x$ ile tanımlı $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ fonksiyonu bir izometri midir?

Çözüm. Her $x, y \in X$ için

$$d_Y(f(x), f(y)) = |3x - 3y| = 3 \cdot |x - y| = 3d_X(x, y)$$

$$\Rightarrow d_X(x, y) \neq d_Y(f(x), f(y))$$

dolayısıyla f bir izometri değildir.

Örnek. $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = (x, 0)$ ile tanımlı $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_e)$ fonksiyonu bir izometridir, ama izomorfi değildir?

Çözüm. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d_e(f(x), f(y)) = \sqrt{(x - y)^2 + (0 - 0)^2} = |x - y|$$

gerçeklendiğinden f izometridir. $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ için $f(x) = (0, 1)$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ yoktur. f üzerine olmadığı için izomorfi değildir.

Alıştırma. $X = \mathbb{Z}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{Z}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. $\mathbb{Z}$ tam metrik uzaydır.

Çözüm. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{Z}$ üzerinde bir Cauchy dizisi olsun, yani dizinin her bir terimi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ kümesine aittir. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x, x, x, \dots\}$ formundadır. Gerçekten eğer $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alınırsa $x_n, x_m \in \mathbb{Z}$ ve

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2} \Rightarrow x_n = x_m$$

gerçeklenmeli. Bu durumda dizi $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x, x, x, \dots\}$ formundadır ve x noktasına yakınsar.

Örnek. $\mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$ metriği verilsin. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = n$ dizisini gözönüne alınarak $(\mathbb{R}, d)$ uzayının tamlığını inceleyin.

Çözüm. (x_n) dizisi Cauchy dizisi midir? $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(n, m) = \left| \frac{n}{1+|n|} - \frac{m}{1+|m|} \right| \\ &= \left| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \right| = \left| \frac{n-m}{(1+n)(1+m)} \right| \end{aligned}$$

geçerlidir, $n \geq m$ kabul etmek genelliği bozmaz.

118

$$\begin{aligned} 0 \leq d(n, m) &= \left| \frac{n-m}{(1+n)(1+m)} \right| \\ &\leq \frac{n-m}{nm} \leq \frac{n}{nm} \leq \frac{1}{m} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(x_n) dizisi Cauchy dizisidir. $x_n = n$ dizisi bir $a \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsarsa

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{1+|n|} - \frac{a}{1+|a|} \right| = \left| 1 - \frac{a}{1+|a|} \right|$$

gerçeklenmeli. $a \geq 0$ ve $a < 0$ için bu mümkün mü?
 $a \geq 0$ için

$$\left| 1 - \frac{a}{1+|a|} \right| = \frac{1}{1+a} \neq 0$$

bu durum mümkün değil.

$a < 0$ için bu mümkün mü?

$$\left| 1 - \frac{a}{1-a} \right| = \frac{1-2a}{1-a} \neq 0$$

bu durum da mümkün değil. $(\mathbb{R}, d)$ uzayı tam değildir.

bu durum da mümkün değildir.
Örnek. $\mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |e^x - e^y|$ metriği verilsin. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = -n$ dizisini gözönüne alınarak $(\mathbb{R}, d)$ uzayının tamlığını inceleyin.

Çözüm. (x_n) dizisi Cauchy dizisi midir? $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_m) = d(-n, -m) = |e^{-n} - e^{-m}| \leq |e^{-n}| + |e^{-m}| = e^{-n} + e^{-m}$$

$e^{-n} > 0, e^{-m} > 0$ ve $\epsilon > 0$ verildiğinde $\exists N \in \mathbb{N} : e^{-n} + e^{-m} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow (x_n)$ Cauchy dizisidir. $x_n = -n$ dizisi bir $x \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsarsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e^{-n} - e^x| = 0$$

olmalı, ama

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e^{-n} - e^x| = e^x$$

ve $e^x = 0$ gerçekleyen $x \in \mathbb{R}$ yoktur.

Alıştırma. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

için $d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}$ metriği gözönüne alınsın. $\mathbb{R}^n$ tam bir

uzaydır.