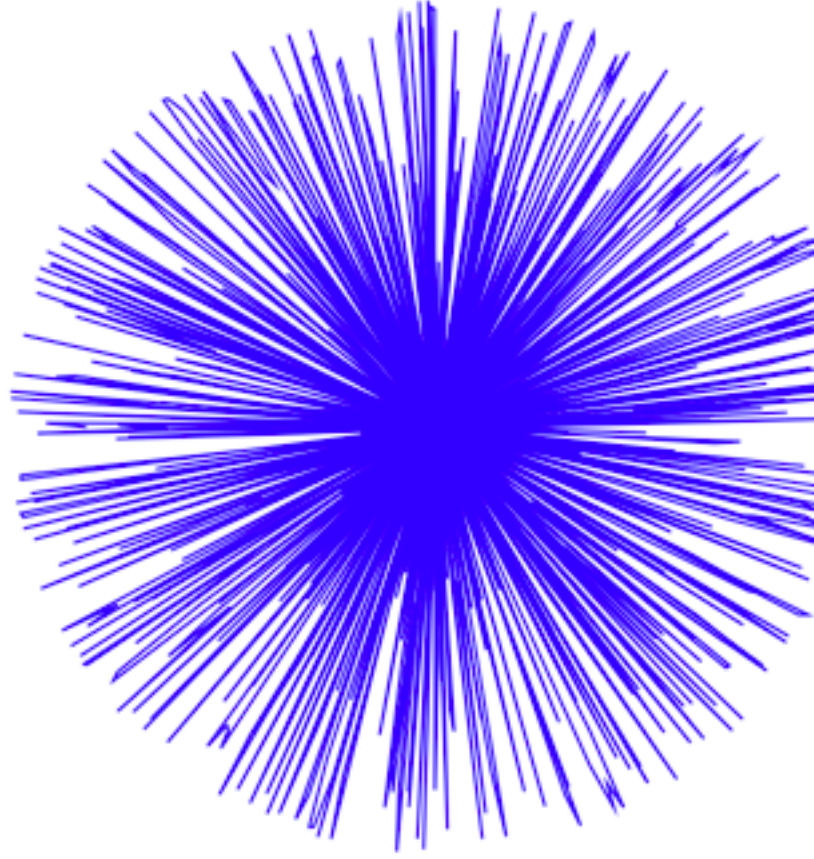


METRİK UZAYLARA GİRİŞ



1. Ön Bilgiler
2. Metrik Uzaylar Tanım ve Örnekler
3. Açık Yuvar Kavramı
4. Komşuluk Kavramı
5. Açık Küme ve Topoloji Kavramı
6. Denk Metrik Kavramı
7. Uzaklık ve Çap
8. İç Kavramı
9. Kapalı Küme
10. Kapanış
11. Diğer Topolojik Kavramlar
12. Diziler
13. Metrik Alt Uzay
14. Metrik Çarpım Uzayları
15. Taban Kavramı
16. Süreklilik
17. Kompakt Metrik Uzaylar
18. Tam Metrik Uzaylar
19. Daraltma Dönüşümleri

1. Ön Bilgiler

Tanım: Bir X kümesinden Y kümesine f fonksiyonu aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir $\emptyset \neq f \subseteq X \times Y$ alt kümesidir:

1. $\forall x \in X, \exists y \in Y : (x, y) \in f$ ve
2. $\forall x \in X$ için $(x, y) \in f$ gerçekleyen tek bir $y \in Y$ vardır, yani $(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow (y = y')$ geçerlidir.

Tanımlar: $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

(a) $\forall x \in X$ için x in f fonksiyonunun etkisi altındaki görüntüsü aynı sabit bir $y_0 \in Y$ ise f fonksiyonuna *sabit fonksiyon* denir. f fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $f(X) = \{y_0\}$ olmasıdır.

(b) $X = Y$ ve $\forall x \in X$ için $f(x) = x$ ise f fonksiyonuna *idantik fonksiyon* denir. İdantik fonksiyon $\{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ şeklinde açıklanır. X kümesi üzerinde tanımlanmış idantik fonksiyon I_X şeklinde gösterilecektir.

(c) Eğer $f(X) = Y$ ise, f fonksiyonuna, Y kümesi üzerine bir fonksiyon veya *sürjektif fonksiyon* denir. Diğer bir deyişle, $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürjektif olması için gerek ve yeter koşul $\forall y \in Y$ nin en azından bir $x \in X$ in görüntüsü olmasıdır.

(d) Herhangi iki $x_1, x_2 \in X$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksiyonuna *birebir* veya *injektif fonksiyon* denir. f fonksiyonunun birebir olması için gerek ve yeter koşul, X kümesinin farklı elemanlarının görüntülerinin farklı olmasıdır. Bu da $\forall y \in f(X)$ in, X kümesine ait tek bir elemanın görüntüsü olmasını gerektirir.

(e) Eğer f hem birebir hem de üzerine bir fonksiyon ise, f fonksiyonuna *bijektif fonksiyon* denir.

Tanım.

$p \geq 1$ bir reel sayı veya $p = \infty$ olsun.

a) $p > 1$ bir reel sayı ise, $q > 0$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise q sayısı p sayısının eşleniği olarak isimlendirilir.

b) $p = 1$ sayısının eşleniği $q = \infty$ dur.

c) $p = \infty$ ise $q = 1$ sayısı p nin eşleniğidir.

Eğer $p > 1$ bir reel sayı ve q sayısı p nin eşleniği ise

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

Young Eşitsizliği

$p > 1$ ve q sayısı p nin eşleniği yani $p > 1$. $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun.

Bu durumda $a, b \geq 0$ reel sayıları için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

geçerlidir.

İspat. $a, b \geq 0$, $p, q > 1$ olsun. Eğer $a = 0$ veya $b = 0$ ise eşitsizliğin doğru olduğu açıktır. $a, b > 0$ farzedelim.

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

ifadesi b^q ile bölünürse

$$\frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q} \geq ab^{1-q} (*)$$

elde edilir. $x = a.b^{1-q}$ ($x > 0$) alalım. Bu durumda $x^p = a^p.b^{p-q}$ olur. Böylece (*) ifadesi aşağıdaki formu alır:

$$\frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} \geq x$$

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x$ ile verilsin. (*) ifadesi

$\forall x \in [0, \infty)$ için $f(x) \geq 0$ a denktir. Çünkü $f'(x) = x^{p-1} + 1 = 0$ dır. O halde $x = 1$ de f bir ekstremuma sahiptir. $f''(x) = (p-1)x^{p-2}$ ve $f''(1) = p-1 > 0$ yani f , $x = 1$ de mutlak minimuma sahiptir. $f(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 0$ olduğundan $\forall x \in [0, \infty)$ için $f(x) \geq 0$ dır, yani

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab \text{ gerçektir.}$$

Yada özel olarak $x = a.b^{\frac{1}{1-p}}$ alınırsa

$$\frac{\left(a.b^{\frac{1}{1-p}}\right)^p}{p} + \frac{1}{q} - a.b^{\frac{1}{1-p}} \geq 0 \Rightarrow a.b^{\frac{1}{1-p}} \leq \frac{\left(a.b^{\frac{1}{1-p}}\right)^p}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a^p.b^{\frac{p}{1-p}}}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow$$

$$a.b^{\frac{1}{1-p}}b^q \leq \frac{a^p.b^{\frac{p}{1-p}}b^q}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ ve } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow b^{\frac{1}{1-p}}b^q = b \text{ ve } b^{\frac{p}{1-p}}b^q = 1$$

verir. $\left(\frac{1}{1-p} + q = \frac{1}{1-p} + \frac{p}{p-1} = -\frac{1}{p-1} + \frac{p}{p-1} = 1, \frac{p}{1-p} + q = -q + q = 0\right)$

$$\text{O halde } a.b^{\frac{1}{1-p}}b^q \leq \frac{a^p.b^{\frac{p}{1-p}}b^q}{p} + \frac{b^q}{q} \Rightarrow a.b \leq \frac{a^p.1}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

geçerlidir.

(Yada y sabit olmak üzere ve $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$ ile verilsin.

$f'(x) = x^{p-1} - y = 0 \Rightarrow x = y^{\frac{1}{p-1}}$ de maksimum veya minimum var.
 $f''(x) = (p-1)x^{p-2} > 0$ yani $x = y^{\frac{1}{p-1}}$ minimum nokta $\forall x > 0$ için
 $f(x) \geq f(y^{\frac{1}{p-1}})$ ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \geq \frac{\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)^p}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}}y \\ &= \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}}y \\ &\Rightarrow \\ \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy &\geq \frac{y^q}{p} + \frac{y^q}{q} - y^q = y^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - y^q = 0 \\ &\Rightarrow \\ xy &\leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \end{aligned}$$

eşitlik için $xy = y^{\frac{1}{p-1}}$ yani $x^p = y^{\frac{p}{p-1}} = y^q$

Not: I bir aralık olsun. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1]$ için $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ gerçekliyorsa konveks fonksiyon olarak isimlendirilir. Eğer $-f$ konveks ise f konkav fonksiyon olarak isimlendirilir.

Ayrıca $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu iki kez türevlenebiliyorsa, f in konveks olması için $gyk f'' \geq 0$ gerçekleşmesidir. $f(x) = e^x$ bu koşulu gerçeklediği için $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur. O halde $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 1]$ için

$$e^{tx+(1-t)y} \leq t.e^x + (1-t)e^y$$

geçerlidir. Bu bilgiyi kullanarak Young Eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $x = \ln a^p, y = \ln b^q$ ve $t = \frac{1}{p}$ alınırsa

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \left(1-\frac{1}{p}\right) \ln b^q} &\leq \frac{1}{p}.e^{\ln a^p} + \left(1-\frac{1}{p}\right)e^{\ln b^q} \\ &\Rightarrow e^{\frac{1}{p} \ln a^p} e^{\left(1-\frac{1}{p}\right) \ln b^q} \leq \frac{1}{p}.e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} \\ &\Rightarrow a.b \leq \frac{1}{p}.a^p + \frac{1}{q}b^q \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Cauchy Schwarz Eşitsizliği

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)}$ Öklid norm olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$$

geçerlidir.

İspat. Eğer $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($= (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$) veya $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ise eşitsizlik $0 \leq 0$

formunu alır, dolayısıyla doğrudur. O halde $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{y} \neq \mathbf{0})$ durumunu yani $(\|\mathbf{x}\| \neq 0) \wedge (\|\mathbf{y}\| \neq 0)$ durumunu incelememiz yeterlidir.

$x, y \in \mathbb{R}$ için $0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ veya denk olarak

$$2xy \leq x^2 + y^2 (*)$$

olduğunu biliyoruz. x ve y keyfi reel sayılar olduğu için $(*)$ ifadesinde

$x = \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|}$ ve $y = \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|}$ alınabilir. Bu her bir $i \in \{1, \dots, n\}$ için

$$2 \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|} \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|} \leq \frac{|x_i|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{|y_i|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} (**)$$

verir. Ama $\|\cdot\|$ Öklid normunun tanımından $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ ve $\sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \|\mathbf{y}\|^2$ geçerlidir. $(**)$ ifadesi i ye göre toplanır ve $|x_i \cdot y_i| = |x_i| |y_i|$ kullanılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$2 \frac{\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i|}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \leq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} = 2$$

yani

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i|}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

elde edilir. $\|\mathbf{x}\| \neq \mathbf{0} \wedge \|\mathbf{y}\| \neq \mathbf{0}$ olduğundan son ifadenin her iki tarafı $\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ ile çarpılırsa gerekli eşitsizlik elde edilir.

Minkowski Eşitsizliği

Her $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ nokta çifti için $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)}$

Öklidyen norm olmak üzere

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

yani

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$$

geçerlidir.

İspat. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 0$ ise eşitsizliğin sağlandığı açıktır. O halde $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \neq 0$ durumunu incelememiz yeterli olacaktır. $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ için $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ geçerlidir, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |x_i + y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| (|x_i| + |y_i|) \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \cdot |x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \cdot |y_i| \end{aligned}$$

geçerlidir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \cdot |x_i| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

ve

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \cdot |y_i| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

geçerlidir.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &\leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \\ &= \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \cdot (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|) \\ &\Rightarrow \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &\leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \cdot (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|) \end{aligned}$$

elde edilir, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \neq 0$ olduğundan, elde edilen son ifade $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$ ile bölünebilir. Bu da bizden istenen eşitsizliği verir.

Sonuç. $k \in \mathbb{R}$ $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)}$ fonksiyonu $\|k.\mathbf{x}\| = |k| \cdot \|\mathbf{x}\|$ gerçekler.

$$\begin{aligned}
\|k.\mathbf{x}\| &= \|k.(x_1, \dots, x_n)\| = \|(k.x_1, \dots, k.x_n)\| \\
&= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |k.x_i|^2\right)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |k|^2 \cdot |x_i|^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(|k|^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)} = \sqrt{|k|^2} \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)} \\
&= |k| \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)} = |k| \cdot \|\mathbf{x}\| \\
&= |k| \cdot \|\mathbf{x}\|
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)}$ ile tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu

vektör toplam ve reel sayılarla skalerle çarpma işlemleri aracılığıyla belirlenen bir reel lineer vektör uzayı V üzerinde norm olmak için gerekli üç koşulu gerçekler. Her bir $v \in V$ ye bir reel sayı karşı getiren $v \mapsto \|v\|$ ile tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonunun V üzerinde bir norm olması için gky her $v, w \in V$ ve $k \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki aksiyomların gerçekleşmesidir:

$$(N_1) \quad \|v\| \geq 0 \text{ ve } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$(N_2) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

$$(N_3) \quad \|kv\| = |k| \cdot \|v\|$$

Hölder Eşitsizliği

$p > 1$, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0$

reel sayıları için

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i &\leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (y_i)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n (y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

geçerlidir.

İspat. 1. eşitsizlik için $\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right) \neq 0$ ve $\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \neq 0$ durumunu incelemek yeterlidir, aksi durumda eşitsizliğin doğru olduğu açıktır. $1 \leq$

$k \leq n$ için $A_i = \frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ ve $B_i = \frac{y_i}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ için Young eşitsizliğini A_i ve B_i ya uygularsak

$$A_i B_i \leq \frac{A_i^p}{p} + \frac{B_i^q}{q}$$

yani

$$\frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{y_i}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{x_i^p}{\sum_{i=1}^n x_i^p} + \frac{1}{q} \frac{y_i^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q}$$

i üzerinden toplam alınırsa

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

bu da istenen sonucu verir.

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n (y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}?$$

Bunu ispatlamak için Hölder eşitsizliğini iki kez uygulamalıyız.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p &\leq \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} x_i + \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} y_i \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Fakat $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow p + q = pq \Rightarrow (p-1)q = p$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} \text{ olduğundan}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1 - \frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

geçerlidir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım. $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq 0$ gerçekliorsa serinin yakınsaması için $\text{gyk} \sum_{i=1}^n x_i$ kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olmasıdır bu durumda serinin toplamı $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$ ile verilir.

Teorem. $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ve $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ için $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p$ yakınsak ise

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

İspat.

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve gerçekleştiğinden $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p$ yakınsak olduğundan

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$$

$$\sum_{i=1}^n |y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p$$

gerçeklenir. Eşitsizliklerin her iki tarafıda pozitif olduğundan

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

geçerlidir.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

kısıtlaması yapılabilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p$ üstten $\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p$ ile

sınırlı ve artan olduğundan $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p$ yakınsaktır ve serinin toplamı

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)$ ile verilir. $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ifadesi $\left\{ \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesi için üst sınır olduğundan

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right\} \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p$$

geçerlidir. Sonuçta

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir.

Teorem. (İntegral için Hölder eşitsizliği) f ve g $[a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ($f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) olsun. Bu durumda

$$\int_a^b |f(x)| \cdot |g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

geçerlidir.

İspat. f veya g den biri özdeş olarak sıfır ise eşitsizlik gerçekleşir. Dolayısıyla f ve g nin özdeş olarak sıfır olmadığı durum için ispat vermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} dx \\
& \leq \int_a^b \left(\frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q dx} \right) dx \\
& = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\int_a^b |f(x)| \cdot |g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

gerçeklenir.

Teorem. (İntegral için Minkowski eşitsizliği) f ve g $[a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ($f, g \in \mathcal{C}[a, b]$) olsun. Bu durumda

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

geçerlidir.

İspat. Negatif olmayan x değerleri ve $a > 0$ için x^a konveks fonksiyon olduğundan

$$\left| \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) \right|^p \leq \frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p$$

ve dolayıyla

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^{p-1} (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

geçerlidir. $|f(x) + g(x)|^p$ sınırlı ve sürekli olduğundan aynı zamanda Riemann integrallenebilir, yani $\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx$ vardır.

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx &= \int_a^b |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\
&\leq \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|) \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_a^b |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\
&\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow \\
&\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \\
&\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

2. Metrik Uzaylar, Tanım ve Temel Örnekler

Tanım. X boştan farklı bir küme ve $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir fonksiyon olsun:

- (i) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$.
- (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- (iii) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iv) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (Üçgen Eşitsizliği.)

Bu durumda d fonksiyonu, X üzerinde bir metrik olarak isimlendirilir. Üzerinde d metriği tanımlı bir X kümesi *metrik uzay* olarak isimlendirilir ve (X, d) notasyonu ile gösterilir.

Ashında "(i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ " koşulu diğer şıklardan elde edilebileceği için istenirse gözardı edilebilir.

İspat. (iv) koşulunda bu $z = x$ almır, (iii) ve (ii) kullanılırsa,

$$2d(x, y) = d(x, y) + d(y, x) \geq d(x, x) = 0$$

sonuçta $d(x, y) \geq 0$, elde edilir.

Örnek. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ ile tanımlı $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir?

- i) $d(x, y) = |x - y| \geq 0$;
- ii) $d(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- iii) $d(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = d(y, x)$;
- iv)

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)|$$

$$\leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$$

Tanım: X kümesi ve $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x = y \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x \neq y \text{ ise} \end{cases}$$

gözönüne alınsın. Bu durumda d fonksiyonu X üzerinde ayrık metrik olarak isimlendirilir.

Örnek.

Açık olmayan tek durum üçgen eşitsizliğidir. Fakat bu da olası durumları irdeleyerek;

$$\begin{aligned} d(x, y) + d(y, z) &= d(x, y) = d(x, z) \geq d(x, z) && \text{eğer } y = z, \\ d(x, y) + d(y, z) &= d(y, z) = d(x, z) \geq d(x, z) && \text{eğer } x = y, \\ d(x, y) + d(y, z) &\geq 1 + 1 = 2 \geq 1 \geq d(x, z) && \text{aksi durumda,} \end{aligned}$$

gösterilir. Ya da $d(x, z) > d(x, y) + d(y, z)$ farzedelim. Bu

$$1 = d(x, z) > d(x, y) + d(y, z) = 0 + 0 = 0$$

olmasını gerektirir. Bu ifadenin doğruluğu ise $(x \neq z) \wedge [(x = y) \wedge (y = z)]$ bağdaşmaz durumlarını verir. O halde kabulumuz yanlıştır, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ geçerlidir.

Tanım. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ üzerinde üç metrik tanımlayacağız:

$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

(i) $d_e =$ Öklidyen (ya da ℓ_2) metriği

$$d_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

ile tanımlanır, $\mathbb{R}^2$ üzerinde standart metrik d_e dir,

(ii) $d_1 = \ell_1$ metriği

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

ile tanımlanır, Taxi-cab metriği olarak isimlendirilir,

(iii) $d_\infty =$ supremum metriği (ℓ_∞ metriği olarak da isimlendirilir)

$$d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

ile tanımlanır.

Alıştırma. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ üzerinde yukarıda tanımlanan d_e, d_1 ve d_∞ fonksiyonları birer metriktir?

(i) $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $d_e =$ Öklidyen (ya da ℓ_2) metriği

$$d_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

a) $d_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1$ ve $x_2 = y_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

b)

$$d_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = d_e((y_1, y_2), (x_1, x_2))$$

c) Önce bir hazırlık;

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \quad (*)$$

geçerlidir, çünkü

$$\begin{aligned} (ab + cd)^2 + (ad - bc)^2 &= a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2b^2 + a^2d^2 + c^2d^2 + b^2c^2 \\ &= (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \\ &\Rightarrow (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \geq (ab + cd)^2 \\ &\Rightarrow (ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \end{aligned}$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2), \mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun.

$$\begin{aligned}
[d_e(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^2 &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \\
&= [(x_1 - z_1) + (z_1 - y_1)]^2 + [(x_2 - z_2) + (z_2 - y_2)]^2 \\
&= (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 \\
&\quad + 2 \left[\underbrace{(x_1 - z_1)}_{=a} \underbrace{(z_1 - y_1)}_{=b} + \underbrace{(x_2 - z_2)}_c \underbrace{(z_2 - y_2)}_d \right] \\
&\quad + (z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2$$

$$\begin{aligned}
&+ 2 \left[\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2} \right] \\
&\quad + (z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2
\end{aligned}$$

$$= (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + 2d_e(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d_e(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + (z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2$$

$$= [d_e(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_e(\mathbf{z}, \mathbf{y})]^2$$

$x_1 - z_1 = a, z_1 - y_1 = b, x_2 - z_2 = c, z_2 - y_2 = d$ için

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

$$\Rightarrow |ab + cd| \leq \sqrt{(a^2 + c^2)} \sqrt{(b^2 + d^2)}$$

kullandık.

ii) $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$\mathbb{R}^2$ üzerinde metrik midir?

a) $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = 0$$

$$0 \Leftrightarrow (x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \text{ ve } \mathbf{x} = (x_1, x_2) = (y_1, y_2) = \mathbf{y}$$

$$\text{b) } d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

c) $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2), \mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \\ &\geq |(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)| + |(x_2 - y_2) + (y_2 - z_2)| \\ &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \\ &= d_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{aligned}$$

iii) $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ $\mathbb{R}^2$ üzerinde metrik midir?

a) $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \geq 0$

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \text{ ve } \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \\ &= \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\} = d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

c) $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2), \mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\}$$

$$= d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| \geq |x_1 - z_1|$$

ve benzer şekilde

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \geq |x_2 - z_2|$$

dolayısıyla

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} = d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

ve d_∞ , $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir metriktir.

Alıştırma. $\bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$d(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_1 - y_1| & \text{eğer } x_2 = y_2 \text{ ise} \\ |x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1| & \text{eğer } x_2 \neq y_2 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlansın. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ metrik midir?

Çözüm.

i) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow (|x_1 - y_1| = 0) \wedge (x_2 = y_2)$ veya $(|x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1| = 0) \wedge (x_2 \neq y_2)$

geçerlidir. Ama ikinci durum mümkün değildir. O halde $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2)$ (yani $\mathbf{x} = \mathbf{y}$) geçerlidir.

ii)

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} |x_1 - y_1| & \text{eğer } x_2 = y_2 \text{ ise} \\ |x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1| & \text{eğer } x_2 \neq y_2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |y_1 - x_1| & \text{eğer } y_2 = x_2 \text{ ise} \\ |y_1| + |y_2 - x_2| + |x_1| & \text{eğer } y_2 \neq x_2 \text{ ise} \end{cases} = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

iii) $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2), \mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $|y_1 - x_1| \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ olduğunu gözönüne alarak olası durumları irdeleyelim. Eğer $x_2 = y_2$ ise $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ geçerlidir.

Eğer $x_2 \neq y_2$ ise z_2 , hem x_2 ye hem de y_2 ye eşit olmaz (çünkü $z_2 = x_2 \wedge z_2 = y_2 \Rightarrow x_2 = y_2$ gerçekleşir), dolayısıyla $z_2 \neq x_2$ farzedelim ($z_2 \neq y_2$ durumu da benzer şekilde görülür). Bu durumda

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1| = |x_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| + |y_1|$$

$$\leq |x_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| + |y_1|$$

$$\leq \begin{cases} (|x_1| + |x_2 - z_2| + |z_1|) + |z_1 - y_1| & \text{eğer } y_2 = z_2 \text{ ise} \\ (|x_1| + |x_2 - z_2| + |z_1|) + (|z_1| + |z_2 - y_2| + |y_1|) & \text{eğer } y_2 \neq z_2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$= d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

Son adımda

a) Eğer $y_2 = z_2$ ise

$$|x_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| + |y_1| = |x_1| + |x_2 - z_2| + |y_1|$$

$$= |x_1| + |x_2 - z_2| + |y_1 - z_1 + z_1| \leq |x_1| + |x_2 - z_2| + |z_1| + |y_1 - z_1|$$

Aktarma: $X \neq \emptyset$ ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ as. iz. ger. bir fonk.

olsun.

$$i) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$ii) \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z),$$

d üzerinde metrik midir?

$$\left. \begin{array}{l} i) \forall x, y \in X; d(x, y) = d(y, x) ? \\ ii) \text{ de } x, y, x \in X; \\ d(x, y) + d(x, x) \leq d(y, x) \Rightarrow d(x, y) \leq d(y, x) \\ iii) \text{ sıra değiştirilip uygulanırsa; } y, x, y \in X; \\ d(y, x) + d(y, y) \leq d(x, y) \Rightarrow d(y, x) \leq d(x, y) \\ \Rightarrow d(x, y) = d(y, x) \end{array} \right\}$$

b) $\forall x, y, z \in X$ için

$$d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z)$$

$$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

geni üçgen eşitsizliği gerçekleşir.

$\left. \begin{array}{l} i, ii, iii) \text{ koşulları gerçeğinden} \\ X, d \text{ üzerinde metriktir.} \end{array} \right\}$

ve eğer $y_2 \neq z_2$ ise

$$|x_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| + |y_1| \leq |x_1| + |x_2 - z_2| + |z_1| + |z_1| + |z_2 - y_2| + |y_1|$$

kısıtlamaları yapılmıştır.

Alıştırma. X boştan farklı bir küme ve $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir fonksiyon olsun:

- (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
 - (ii) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z)$
- d , X üzerinde bir metrik midir?

Çözüm.

a) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$?

ii) de $x, y, x \in X$ için

$$d(x, y) - d(x, x) \leq d(y, x) \Rightarrow d(x, y) \leq d(y, x)$$

ii) sıra değiştirip uygulanırsa $y, x, y \in X \Rightarrow$

$$d(y, x) - d(y, y) \leq d(x, y) \Rightarrow d(y, x) \leq d(x, y)$$

yani $d(x, y) = d(y, x)$ gerçekleşir.

b) Bu durumda $\forall x, y, z \in X$ için

$$\begin{aligned} d(x, y) - d(x, z) &\leq d(y, z) \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) = d(x, z) + d(z, y) \\ &\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

yani üçgen eşitsizliği elde edilir.

Bu koşullarında $d(x, y) \geq 0$ verdiğini göstermiştik. O halde d , X üzerinde metriktir.

Tanım. V , $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun ve $N : V \rightarrow \mathbb{R}$, $N(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|$ için aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir fonksiyon olsun:

- (i) Her $\mathbf{u} \in V$ için $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
- (ii) Eğer $\|\mathbf{u}\| = 0$ ise bu durumda $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- (iii) Eğer $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{u} \in V$ ise bu durumda $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda|\|\mathbf{u}\|$.
- (iv) [Üçgen eşitsizliği.] Eğer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ise bu durumda

$$\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$$

Bu durumda $\|\cdot\|$ bir *norm* ve $(V, \|\cdot\|)$ normlandırılmış vektör uzayı olarak isimlendirilir..

Problem: (iii) koşulunda $\lambda = 0$ alarak $\|\mathbf{0}\| = 0$ olduğunu gösteriniz.

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{0}\| = \|\mathbf{0}\mathbf{0}\| = |0|\|\mathbf{0}\| = 0\|\mathbf{0}\| = 0$$

Tanım. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

(i) $\mathbf{x}$ in Öklidyen normu $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$ skaleridir.

(ii) $\mathbf{x}$ in ℓ^1 normu $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$ skaleridir.

(iii) $\mathbf{x}$ in max normu $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ skaleridir.

(iv) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ noktası arasındaki Öklidyen uzaklık $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ dir.

Lemma. Eğer $(V, \|\cdot\|)$ normlandırılmış vektör uzayı ise

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

ifadesi V üzerinde bir d metriği belirler.

İspat. Açıktır ki norm koşullarından

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq 0$$

ve

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{0}\| = \|\mathbf{0}\mathbf{0}\| = |0|\|\mathbf{0}\| = 0\|\mathbf{0}\| = 0.$$

elde edilir.

Ayrıca eğer $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ise bu durumda $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 0$ ve böylece $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ gerçekleşir. Ayrıca

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(-1)(\mathbf{v} - \mathbf{u})\| = |-1|\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

ve

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

$$\geq \|(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (\mathbf{v} - \mathbf{w})\|$$

$$= \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = d(\mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

Uyarı. (i) Eğer $V, \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı ve d de V üzerinde bir norm aracılığıyla belirlenen metrik ise, $\mathbf{u} \in V$ için $d(\mathbf{0}, 2\mathbf{u}) = 2d(\mathbf{0}, \mathbf{u})$ gerçekleşir.

(ii) Eğer $V, \mathbb{R}$ üzerinde trivial olmayan (sıfır-boyutlu olmayan) vektör uzayı ve d de V üzerinde ayrık metrik ise d metriği V üzerindeki bir norm aracılığıyla tanımlanamaz. d bir norm tarafından belirlenebilseydi ; $\mathbf{0} \neq 2\mathbf{u}$ için $d(\mathbf{0}, 2\mathbf{u}) = 2d(\mathbf{0}, \mathbf{u})$ gerçeklemeliydi oysa

$$d(\mathbf{0}, 2\mathbf{u}) = 1 \neq 2 = 2d(\mathbf{0}, \mathbf{u})$$

$\hookrightarrow d$ metriği bir norm tarafından belirlenemez!

Alıştırma. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$ için

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlı d_p fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir.

- Çözüm.** i) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $|x_i - y_i|^p \geq 0$ olduğundan $d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ dir.
- ii) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\begin{aligned}
 d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ için } |x_i - y_i|^p = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ için } |x_i - y_i| = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ için } x_i = y_i \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}
 \end{aligned}$$

- iii) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için

$$|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$$

olduğundan

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_p(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

- iv) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$ diyelim. Bu durumda $a_i + b_i = x_i - z_i$ olur. Minkowski eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
 d_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) &= \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i - z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})
 \end{aligned}$$

- Alıştırma.** $\ell^2 = \left\{ \mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$ olsun.

$\ell^2 \times \ell^2$ üzerinde d_2 fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın. $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}$$

- a) ℓ^2 de olan ve olmayan eleman örnekleri veriniz.
- b) (ℓ^2, d_2) metrik uzaydır gösteriniz.

Çözüm. i) $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ ve $\mathbf{y} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots\right)$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 + \dots = +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

dolayısıyla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \notin \ell^2$ geçerlidir.

$\mathbf{x}' = (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ ve $\mathbf{y}' = (y'_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x'_n|^2 = 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 + 0^2 + \dots < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y'_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

dolayısıyla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2$ geçerlidir.

$$\text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için } |x_k - y_k|^2 = |x_k|^2 + 2\operatorname{Re}(x_k \cdot y_k) + |y_k|^2 \leq |x_k|^2 + 2|\operatorname{Re}(x_k \cdot y_k)| + |y_k|^2$$

geçerlidir, dolayısıyla, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|x_k - y_k|^2 \leq |x_k|^2 + 2|x_k \cdot y_k| + |y_k|^2$$

geçerlidir. Bu durumda Cauchy Schwarz eşitsizliğinden

$$\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} + \sum_{k=1}^n |y_k|^2$$

Dolayısıyla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < +\infty$$

geçerlidir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2$$

kısmi toplamlar dizisi yukarıdan sınırlı ve tüm terimler pozitif olduğundan artandır. O halde $\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2$ yakınsar. O halde $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2$ serisi yakınsaktır.

$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}$ metrik olma koşullarını gerçektirler mi?

a) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2$ olsun.

i) $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$

ii)

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 = 0$$

$$\Rightarrow |x_n - y_n|^2 = 0, \forall n$$

$$\Rightarrow x_n = y_n, \forall n$$

yani $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ geçerlidir.

b) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2$ olsun. $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - x_n|^2} =$

$d_2(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

c) $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \ell^2$ olsun.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - z_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k - z_k|^2}$$

ve buradan

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - z_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - z_k|^2}$$

geçerlidir, o halde

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - z_n|^2}$$

yani $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}$ için üçgen eşitsizliği sağlanır.

Alıştırma. $p \geq 1$, $\ell^p = \left\{ \mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$ olsun.

$\ell^p \times \ell^p$ üzerinde $d_p : \ell^p \times \ell^p \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

ile tanımlansın.

(ℓ^p, d) metrik uzaydır gösteriniz.

Çözüm. i) $p \geq 1$ için $f(x) = x^p$ ile tanımlanan $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu konveks olduğundan

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_i}{2} + \left(-\frac{y_i}{2}\right) \right|^p &\leq \frac{1}{2} |x_i|^p + \frac{1}{2} |-y_i|^p \\ \Rightarrow \frac{1}{2^p} |x_i - y_i|^p &\leq \frac{1}{2} (|x_i|^p + |y_i|^p) \\ |x_i - y_i|^p &\leq 2^{p-1} (|x_i|^p + |y_i|^p) \end{aligned}$$

geçerlidir. $|x_i|^p$ dizisinin bütün terimleri nonnegatif olduğundan $\sum_{i=1}^n |x_i|^p$ azalmayan bir dizidir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ geçerlidir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p &\leq 2^{p-1} \sum_{i=1}^n (|x_i|^p + |y_i|^p) \\ &= 2^{p-1} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p + \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right) \\ &\leq 2^{p-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right) \end{aligned}$$

geçerlidir. Böylece $\left\{ \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p : n \in \mathbb{N} \right\}$ kısmi toplamlar dizisi sınırlı ve monoton artan dolayısıyla $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p$ serisi yakınsaktır, yani d iyi tanımlıdır.

a) Ne zaman $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = 0$ olur?

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 &\iff \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p = 0 \\ \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right\} &= 0 \\ \iff \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p &= 0 \\ \iff \forall i \in \mathbb{N}, |x_i - y_i| &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}, x_i = y_i$$

$$\Longleftrightarrow (x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$\text{b) } d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = 0 \Longleftrightarrow (x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = d((y_i)_{i \in \mathbb{N}}, (x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

c) $\mathbf{x} = (x_i), \mathbf{y} = (y_i), \mathbf{z} = (z_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ olsun. $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$ diyelim.
o halde

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - z_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

yani $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ için üçgen eşitsizliği sağlanır.

Alıştırma. $\ell^\infty = \{ \mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \exists M > 0 : \forall i \in \mathbb{N} \text{ için } |x_i| \leq M \}$ olsun, yani sınırlı diziler kümesi gözönüne alınsın.

$\ell^\infty \times \ell^\infty$ üzerinde $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{ |x_i - y_i| \}$ ile tanımlansın. (ℓ^∞, d) metrik uzaydır gösteriniz.

Çözüm. $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, \mathbf{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ olsun. $\forall i \in \mathbb{N}, |x_i - y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ ve $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sınırlı diziler olduğundan

$$\exists M_1, M_2 > 0 : \forall i \in \mathbb{N}, |x_i| \leq M_1 \text{ ve } |y_i| \leq M_2$$

geçerlidir. Dolayısıyla $\{|x_i - y_i| : i \in \mathbb{N}\}$ kümesi üstten $M_1 + M_2$ ile sınırlıdır, dolayısıyla bu küme $\mathbb{R}$ de bir en küçük üst sınıra sahiptir. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}})$ iyi tanımlıdır.

a) Ne zaman $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = 0$ olur?

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{ |x_i - y_i| \} = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}, |x_i - y_i| = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}, x_i = y_i$$

$$\iff (x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

yani $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = 0 \iff (x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gerçekenir.

b)

$$\begin{aligned} d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) &= \sup_{i \in \mathbb{N}} \{|x_i - y_i|\} \\ &= \sup_{i \in \mathbb{N}} \{|y_i - x_i|\} = d((y_i)_{i \in \mathbb{N}}, (x_i)_{i \in \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

c) $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}, (z_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ olsun.

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \{|x_i - z_i|\} + \sup_{i \in \mathbb{N}} \{|z_i - y_i|\}$$

$$\leq d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (z_i)_{i \in \mathbb{N}}) + d((z_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}})$$

ifadesi her $i \in \mathbb{N}$ için doğrudur. $\{|x_i - y_i| : i \in \mathbb{N}\}$ kümesi üstten

$$\begin{aligned} &\sup_{i \in \mathbb{N}} \{|x_i - z_i|\} + \sup_{i \in \mathbb{N}} \{|z_i - y_i|\} \\ &= d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (z_i)_{i \in \mathbb{N}}) + d((z_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

ile sınırlıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \sup_{i \in \mathbb{N}} \{|x_i - y_i|\} &= d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) \\ &\leq d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (z_i)_{i \in \mathbb{N}}) + d((z_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

gerçeklenir, yani üçgen eşitsizliği doğrudur.

Uyarı. $\{|x_i - y_i| : i \in \mathbb{N}\}$ kümesi alttan 0 ile sınırlı olduğundan infimuma sahiptir. $\ell^\infty \times \ell^\infty$ üzerinde $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \inf_{i \in \mathbb{N}} \{|x_i - y_i|\}$ ile tanımlansın. d metrik midir?

Ne zaman $d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \inf_{i \in \mathbb{N}} \{|x_i - y_i|\} = 0$ gerçekenir?

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} \{|x_i - y_i|\} = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}, |x_i - y_i| \geq 0$$

geçerlidir, ama bir kümenin infimumunun sıfır olması kümedeki her elemanın sıfır olmasına denk değildir. Uzaklığın bu tanımında problem var gibi, bundan emin olmak için ℓ^∞ da aralarındaki uzaklık sıfır olan farklı diziler var mı, yani $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \neq (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ fakat $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{|x_i - y_i|\} = 0$

gerçekleyen diziler var mı? $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{i})_{i \in \mathbb{N}}$ sifıra yakınsar, ve $\inf_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{i} \right\} = 0$ ve $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} = (0)_{i \in \mathbb{N}}$ için

$$d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \inf_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \left| \frac{1}{i} - 0 \right| \right\} = \inf_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{i} \right\} = 0$$

ama $(\frac{1}{i})_{i \in \mathbb{N}} \neq (0)_{i \in \mathbb{N}}$ gerçekleşir, yani d metrik olamaz.

Alıştırma. d , boştan farklı bir X kümesi üzerinde bir metrik olsun. $x, y \in X$ için $\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ ile tanımlanan ρ fonksiyonu da X üzerinde bir metriktir?

Çözüm. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

geçerlidir.

$$\text{ii) } \rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = \rho(y, x)$$

iii)

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow \frac{x}{1 + x} \leq \frac{y}{1 + y}$$

ve

$$\frac{x + y}{1 + x + y} \leq \frac{x}{1 + x} + \frac{y}{1 + y}$$

$\forall x, y \geq 0$ için doğrudur.

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \leq \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \Rightarrow 1 + d(x, y) \leq 1 + d(x, z) + d(z, y) \\ &\Rightarrow \frac{1}{1 + d(x, y)} \geq \frac{1}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{1 + d(x, y)} \leq -\frac{1}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &\Rightarrow 1 - \frac{1}{1 + d(x, y)} \leq 1 - \frac{1}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{1 + d(x, y) - 1}{1 + d(x, y)}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{1 + d(x, y)} \leq 1 - \frac{1}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\
&= \frac{1 + d(x, z) + d(z, y) - 1}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\
&= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\
&\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} = \rho(x, z) + \rho(z, y)
\end{aligned}$$

geçerlidir, yani ρ , X üzerinde bir metriktir.

Örnek. (X, d) bir metrik uzay ise her $x, y \in X$ için

$$\rho(x, y) = \min \{1, d(x, y)\}$$

ile tanımlı $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ metriktir?

Çözüm.

i) $x = y \Rightarrow \rho(x, y) = \min \{1, d(x, y)\} = \min \{1, 0\} = 0$

$\rho(x, y) = \min \{1, d(x, y)\} = 0 \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

ii) $x, y \in X$ için

$$\rho(x, y) = \min \{1, d(x, y)\}$$

$$\stackrel{(d(x,y)=d(y,x))}{=} \min \{1, d(y, x)\} = \rho(y, x)$$

iii) $x, y, z \in X$ için $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$?

$$\rho(x, z) = \min \{1, d(x, z)\} \leq 1$$

O halde $\rho(x, y) = 1$ veya $\rho(y, z) = 1$ ise üçgen eşitsizliği gerçekleşir.

Eğer $\rho(x, y) \neq 1$ ve $\rho(y, z) \neq 1$ ise

hem $\rho(x, y) < 1$ ve $\rho(y, z) < 1$ olur, yani $\rho(x, y) = d(x, y)$ ve $\rho(y, z) = d(y, z)$ ve buradan

$$\rho(x, z) = \min \{1, d(x, z)\} \leq d(x, z)$$

$$\leq d(x, y) + d(y, z) = \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

geçerlidir. O halde olası her durumda üçgen eşitsizliği gerçekleşir.

Alıştırma. (X, d) bir metrik uzay ise $x, y \in X$ için $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ ise $d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ metrik midir?

Çözüm. i) $d(x, y) \geq 0 \Rightarrow d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)} \geq 0$

ii) $x, y \in X$ olsun.

a) Eğer $x = y$ ise $d(x, y) = 0 \Rightarrow d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)} = 0$

- b) $d'(x, y) = 0$ ise $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)} = 0$ veya $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
 iii) $x, y \in X$ olsun. $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)} = \sqrt{d(y, x)} = d'(y, x)$
 iv) $x, y, z \in X$ olsun. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ve $\sqrt{\cdot}$, $\mathbb{R}^+$ üzerinde artan ve (her $a, b \geq 0$ için) $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ olduğundan

$$d'(x, z) = \sqrt{d(x, z)} = \sqrt{d(x, y) + d(y, z)}$$

$$\leq \sqrt{d(x, y)} + \sqrt{d(y, z)} = d'(x, y) + d'(y, z)$$

yani $d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z)$ geçerlidir.

Alıştırma. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x = y \text{ ise} \\ 3 + \frac{x+y}{xy}, & \text{eğer } x \neq y \text{ ise} \end{cases}$$

tanımlansın. d , $\mathbb{N}$ üzerinde bir metrik midir?

Çözüm.

- i) $x, y \in \mathbb{N}$ için $d(x, y) \geq 0$
 ii) $x, y \in \mathbb{N}$ için $d(x, y) = 0 \iff x = y$
 iii) Her $x, y \in \mathbb{N}$ için $d(x, y) = d(y, x)$
 iv) $x, y, z \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$3 + \frac{x+z}{xz} = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \leq 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 3 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

ve dolayısıyla $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ için

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ çünkü}$$

$$d(x, y) + d(y, z) = d(x, y) = d(x, z) \geq d(x, z) \quad \text{eğer } y = z,$$

$$d(x, y) + d(y, z) = d(y, z) = d(x, z) \geq d(x, z) \quad \text{eğer } x = y,$$

$$d(x, y) + d(y, z) = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 3 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 3 + \frac{x+z}{xz} = d(x, z) \text{ aksi durumda,}$$

geçerlidir.

Çözüm. i) $d(x, y) \geq 0 \Rightarrow d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)} \geq 0$

ii) $x, y \in X$ olsun.

a) Eğer $x = y$ ise $d(x, y) = 0 \Rightarrow d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)} = 0$

b) $d'(x, y) = 0$ ise $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)} = 0$ veya $d(x, y) = 0$

iii) $x, y \in X$ olsun. $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)} = \sqrt{d(y, x)} = d'(y, x)$

iv) $x, y, z \in X$ olsun. $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ve $\sqrt{\cdot}, \mathbb{R}^+$ üzerinde artan ve (her $a, b \geq 0$ için) $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ olduğundan

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= \sqrt{d(x, y)} \leq \sqrt{d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leq \sqrt{d(x, y)} + \sqrt{d(y, z)} = d'(x, y) + d'(y, z) \end{aligned}$$

geçerlidir.
O halde

$$d'(x, y) \leq d'(x, y) + d'(y, z)$$

geçerlidir.

Alıştırma. $X = C(0, 1)$, $[0, 1]$ üzerinde reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi olsun.

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| . dx$$

ve

$$d'(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

fonksiyonları X üzerinde metriktir? Bu iki metrik denk metrikler midir? d , Riemann integrallenebilir fonksiyonlar kümesi üzerinde metrik midir?

Çözüm.

i) f ve g sürekli ise $|f - g|$ de sürekli ve $d(f, g)$ iyi tanımlıdır, benzer şekilde $d'(f, g)$ de iyi tanımlıdır.

$$f = g \Rightarrow d(f, g) = 0$$

$|f - g|$ sürekli ve pozitif bir fonksiyon olduğundan

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| . dx = 0 \Rightarrow |f(x) - g(x)| = 0, \forall x \in [0, 1] \Leftrightarrow f = g$$

$f, g, h \in X$ olsun, $\forall x \in [0, 1]$ için

$$|f(x) - h(x)| = |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)|$$

$$\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$$

geçerlidir, dolayısıyla

$$\int_0^1 |f(x) - h(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)| dx$$

$$\Rightarrow d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$$

Not: a) Eğer f ve g sürekli reel değerli iki fonksiyon ise $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| .dx$ değeri f ve g fonksiyonlarının grafikleri, x -ekseni, $x = 0$ ve $x = 1$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanı olur. Örneğin $f, g \in X$ den alınan $f(x) = 1 - x^2$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \int_0^1 |(1 - x^2) - x^2| .dx = \int_0^1 |1 - 2x^2| .dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2x^2) .dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2x^2 - 1) .dx \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) Eğer X , $[0, 1]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonların kümesi olsun.

$$d^*(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| .dx$$

X üzerinde metrik değildir.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ise} \\ 1, & 0 < x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve her $x \in [0, 1]$ için $g(x) = 1$ alınırsa $f, g \in X$ fakat $d^*(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| .dx = 0$ geçerlidir, fakat $f \neq g$ geçerlidir.

$$\text{a) } f = g \Rightarrow d'(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = 0$$

$$d'(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = 0 \Rightarrow \forall x \in [0, 1] \text{ için}$$

$$0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = d'(f, g) = 0$$

Dolayısıyla $f = g$ geçerlidir.

b) $\forall f, g \in X$ için

$$d'(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x) - f(x)| = d'(g, f)$$

c) $f, g, h \in X$ olsun. Bu durumda $\forall x \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
 |f(x) - h(x)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \\
 &\leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g(x) - h(x)| \\
 &= d'(f, g) + d'(g, h) \\
 &\Rightarrow d'(f, h) \leq d'(f, g) + d'(g, h)
 \end{aligned}$$

Not: Eğer f ve g sürekli reel değerli iki fonksiyon ise $d'(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$ değeri f ve g fonksiyonlarının $x = 0$ ve $x = 1$ doğruları arasında kalan grafikleri arasındaki dikey uzaklığın en büyüğüdür. Örneğin $f, g \in X$ den alınan $f(x) = 1 - x^2$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned}
 d'(f, g) &= \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \\
 &= \sup_{x \in [0,1]} |(1 - x^2) - x^2| \\
 &= \sup_{x \in [0,1]} |1 - 2x^2| = 1
 \end{aligned}$$

3. Açık Yuvar Kavramı

Tanım. (X, d) metrik uzay'ında $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için

$B_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ kümesi ile tanımlanan $B_d(x_0, \varepsilon)$, x_0 merkezli, ε yarıçaplı açık yuvar,

$B_d[x_0, \varepsilon] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$ kümesi ile tanımlanan $B_d[x_0, \varepsilon]$, x_0 merkezli, ε yarıçaplı kapalı yuvar,

$S_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) = \varepsilon\}$ kümesi ile tanımlanan $S_d(x_0, \varepsilon)$, x_0 merkezli, ε yarıçaplı yuvar yüzeyi, olarak isimlendirilir.

Tanımlardan açıktır ki (X, d) metrik uzay'ında $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için

i) $S_d(x_0, \varepsilon) = B_d[x_0, \varepsilon] \setminus B_d(x_0, \varepsilon)$,

ii) $d(x_0, x_0) = 0 < \varepsilon \Rightarrow (x_0 \in B_d(x_0, \varepsilon)) \wedge (x_0 \in B_d[x_0, \varepsilon])$

iii) $S_d(x_0, \varepsilon) = \emptyset$

olabilir.

Örnek. d ayrık metrik olmak üzere (X, d) metrik uzayı gözönüne alınsın. $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_d(x_0, \varepsilon)$, $B_d[x_0, \varepsilon]$, $S_d(x_0, \varepsilon)$ kümelerini belirleyiniz.

Çözüm.

Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ veya $d(x, y) = 1$ geçerlidir. Bu durumda $\varepsilon > 1$ ise $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$ için

$$d(x, x_0) = 1 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (y \in B_d(x_0, \varepsilon) \Rightarrow x \in X \setminus \{x_0\} \subseteq B_d(x_0, \varepsilon)) \wedge (x \in B_d(x_0, \varepsilon))$$

$$\Rightarrow X \subseteq B_d(x_0, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow B_d(x_0, \varepsilon) = X$$

gerçeklendiğinden

$$B_d(x_0, \varepsilon) = \begin{cases} \{x_0\} & , 0 < \varepsilon \leq 1 \text{ ise} \\ X & , \varepsilon > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

geçerlidir.

$$B_d[x_0, \varepsilon] = \begin{cases} \{x_0\} & , 0 < \varepsilon < 1 \text{ ise} \\ X & , \varepsilon \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$S_d(x_0, \varepsilon) = \begin{cases} X \setminus \{x_0\} & , \varepsilon = 1 \text{ ise} \\ \emptyset & , \varepsilon \neq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

geçerlidir. O halde (X, d) metrik uzayında $\varepsilon \neq 1$ ise $S_d(x_0, \varepsilon) = \emptyset$ geçerlidir.

Örnek. $\mathbb{R}$ üzerinde, $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ ile tanımlı standart metrik gözönüne alınsın. $x_0 \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_d(x_0, \varepsilon)$, $B_d[x_0, \varepsilon]$, $S_d(x_0, \varepsilon)$ kümelerini belirleyiniz. $x, y \in \mathbb{R}$ için $(x, y) (\subseteq \mathbb{R})$ bir açık yuvar mıdır?

Çözüm.

$$\begin{aligned} B_d(x_0, \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) = |x - x_0| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} \\ &= (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_d[x_0, \varepsilon] &= \{x \in \mathbb{R} : d(x_0, x) = |x - x_0| \leq \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -\varepsilon \leq x - x_0 \leq \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon\} \\ &= [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_d(x_0, \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R} : d(x_0, x) = |x - x_0| = \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x - x_0 \pm \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = x_0 \pm \varepsilon\} \\ &= \{x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\} \end{aligned}$$

gerçeklenir. $\square$

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $x < y$ için $B_d(\frac{x+y}{2}, \frac{|y-x|}{2}) = \left(\frac{x+y}{2} - \frac{|y-x|}{2}, \frac{x+y}{2} + \frac{|y-x|}{2}\right) = (x, y)$ geçerlidir.

Alıştırma. $\mathbb{R}^2$ üzerinde $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, cin $d_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ ile tanımlı Öklidyen metriğe göre $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_{d_e}(\mathbf{a}, \varepsilon)$, $B_{d_e}[\mathbf{a}, \varepsilon]$, $S_{d_e}(\mathbf{a}, \varepsilon)$ kümelerini belirleyiniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} B_{d_e}(\mathbf{a}, \varepsilon) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_e((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < \varepsilon\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < \varepsilon^2 \right\} \end{aligned}$$

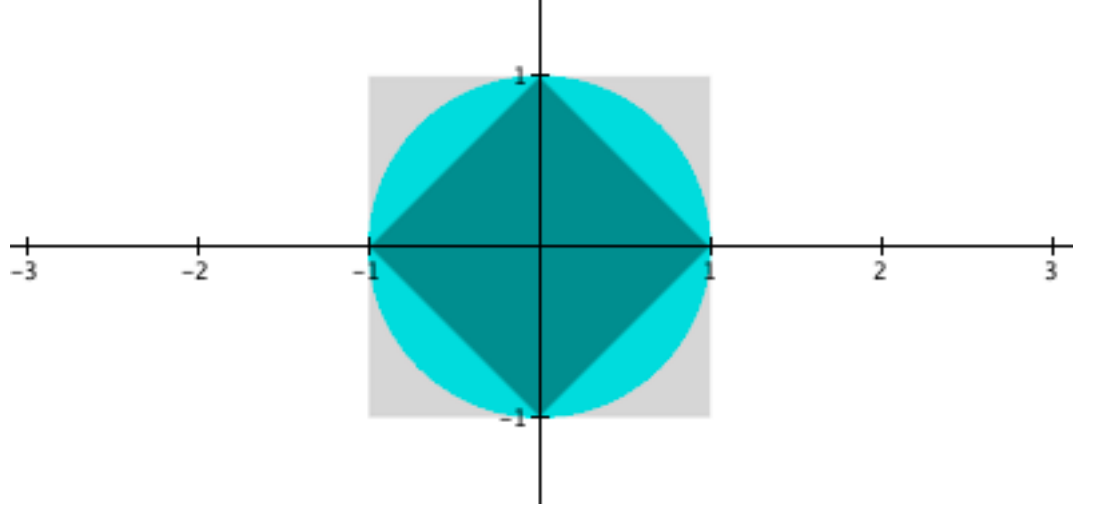
$$\begin{aligned}
B_{d_e}[\mathbf{a}, \varepsilon] &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_e((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq \varepsilon\} \\
&= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \leq \varepsilon \right\} \\
&= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq \varepsilon^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{d_e}(\mathbf{a}, \varepsilon) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_e((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = \varepsilon\} \\
&= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = \varepsilon \right\} \\
&= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = \varepsilon^2 \right\}
\end{aligned}$$

Bu üç metriğe göre düzlemde orjinin birim yarıçaplı açık yuvarları sırasıyla

$$\begin{aligned}
B_{d_e}((0, 0), 1) &= \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \\
B_{d_1}((0, 0), 1) &= \{(x, y) : |x| + |y| < 1\} \\
B_{d_\infty}((0, 0), 1) &= \{(x, y) : \max\{|x|, |y|\} < 1\}
\end{aligned}$$

olur.



4. Komşuluk Kavramı

Tanım. (X, d) bir *metrik uzay* ve $x \in X$ olsun. Bir

$U(\subseteq X)$ kümesi eğer $\exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq U$ gerçekleşiyorsa x noktasının **komşuluğu** olarak adlandırılır.

Örnek.

a) $\mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınırsa ;

i) (x, y) açık aralığı noktalarının her birinin bir komşuluğudur.

ii) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi noktalarının her birinin bir komşuluğudur.

iii) $[x, y]$ kapalı aralığı (x, y) açık aralığının her bir noktası için bir komşuluktur.

iv) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleri noktalarının hiç biri için bir komşuluk değildir.

b) $\mathbb{R}$ üzerinde ayrık metrik gözönüne alınırsa $\mathbb{R}$ nin her $A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi noktalarının her birinin komşuluğudur.

Teorem. (X, d) bir *metrik uzay* olsun. $N \subseteq X$ alt kümesinin $p \in X$ noktasının komşuluğu olması için gerek bir $B_d(x, \varepsilon)$ açık yuvarının $p \in B_d(x, \varepsilon) \subseteq N$ gerçekleşmek üzere var olmasıdır.

İspat. $N \subseteq X$ alt kümesi $p \in X$ noktasının komşuluğu olsun. Bu durumda $\exists \varepsilon > 0 : p \in B_d(p, \varepsilon) \subseteq N$ gerçekleşir, yani $p \in X$ noktasını içeren $B_d(p, \varepsilon)$ açık yuvarı N de kapsanmak üzere vardır.

Tersine $p \in N$ olsun ve bir $B_d(x, \varepsilon)$ açık yuvarı $p \in B_d(x, \varepsilon) \subseteq N$ de gerçekleşmek üzere var olsun. p merkezli bir açık yuvarın N de kapsanmak üzere var olduğunu göstermeliyiz.

$p \in B_d(x, \varepsilon) \Rightarrow d(x, p) < \varepsilon$ geçerlidir. Bu durumda $0 < \varepsilon - d(x, p)$ geçerlidir.

$\varepsilon_1 = \varepsilon - d(x, p)$ olsun. $\varepsilon_1 > 0$ dır. $y \in B_d(p, \varepsilon_1) \Rightarrow d(y, p) < \varepsilon_1$ geçerlidir. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:

$$d(y, p) < \varepsilon_1 \Rightarrow d(y, p) < \varepsilon - d(x, p)$$

$$\Rightarrow (d(x, y) \leq) d(x, p) + d(y, p) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(x, y) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow y \in B_d(x, \varepsilon)$$

$$B_d(p, \varepsilon_1) \subseteq B_d(x, \varepsilon) \subseteq N$$

Yani N, p nin komşuluğudur.

Teorem. (X, d) bir *metrik uzay*, $x \in X$ olsun. $\mathcal{N}_x$ ise x noktasının tüm komşuluklarının ailesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:

- a) $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x \Rightarrow N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$
 b) $(N \in \mathcal{N}_x) \wedge (N \subseteq M) \Rightarrow M \in \mathcal{N}_x$

İspat. a)

$$N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : (B_d(x, \varepsilon_1) \subseteq N_1) \wedge (B_d(x, \varepsilon_2) \subseteq N_2)$$

$$(\varepsilon = \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \} \Rightarrow (B_d(x, \varepsilon) \subseteq N_1) \wedge (B_d(x, \varepsilon) \subseteq N_2))$$

$$\Rightarrow B_d(x, \varepsilon) \subseteq N_1 \cap N_2$$

$$N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$$

b)

$$(N \in \mathcal{N}_x) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq N (\subseteq M) M \in \mathcal{N}_x$$

$$\Rightarrow B_d(x, \varepsilon) \subseteq M$$

$$\Rightarrow M \in \mathcal{N}_x$$

5. Açık Küme ve Topoloji Kavramı

Tanım. (X, d) bir *metrik uzay* olsun. $U \subseteq X$ alt kümesi noktalarının her birinin komşuluğu ise açık küme olarak isimlendirilir. Denk olarak, her bir $x \in U$ için $\exists \varepsilon_x > 0 : B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq U$ gerçekleşirse, $U \subseteq X$ alt kümesine açıktır, denir.

Örnek.

a) $\mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınırsa ;

i) Eğer $A = (0, 1)$ açık kümedir. $(0, 1]$, $[0, 1)$ veya $[0, 1]$ açık küme değildir.

ii) $x \in \mathbb{R}$ için $\{x\}$ açık küme değildir.

iii) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ veya $\mathbb{Q}$ açık küme değildir.

iv) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, açık küme değildir.

b) X üzerinde ayrık metrik gözönüne alınırsa X nin her $A \subseteq X$ alt kümesi açık kümedir. Özel olarak $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\{x\}$ açıktır.

c) $X = [0, 1)$ üzerinde $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınırsa $0 < a \leq 1$ için $[0, a)$ açık kümedir.

d) $X = \mathbb{Q}$ üzerinde $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınırsa

d1) $X = \mathbb{Q}$ açık bir kümedir.

d2) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ açık küme değildir. $\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2} = \frac{1}{2n(n+1)} = \varepsilon$ için $B_d(\frac{1}{n}, \varepsilon) \not\subseteq A$

Tanım. (X, d) bir *metrik uzay* ve $F \subseteq X$ olsun. Eğer F kümesinin tümleyeni $X \setminus F$ açık alt küme (ya da kısaca açık küme) ise F kümesi kapalı küme olarak isimlendirilir.

Teorem. Her (X, d) *metrik uzay*ında X ve $\emptyset$ açıktır.

İspat. $x \in X$ olsun, $\forall \varepsilon > 0$ için $B_d(x, \varepsilon) \subseteq X$ geçerli ve bu $\forall x \in X$ için doğru, o halde X açıktır. Eğer $\emptyset$ açık değil ise bir $\exists x \in \emptyset : \forall \varepsilon > 0$ için $B_d(x, \varepsilon) \not\subseteq \emptyset$ gerçekleşir. Ama $x \notin \emptyset$, çelişki yakaladık. $\emptyset$ açık kümedir.

Not. X ve $\emptyset$ birbirlerinin bütünleyenleri olduğu için aynı zamanda kapalıdır.

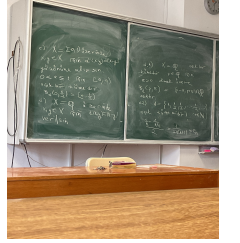
Teorem. (X, d) bir *metrik uzay* ve $y \in B_d(x, \varepsilon)$ ise $\exists \delta > 0 : B_d(y, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$, yani (X, d) metrik uzayında her açık yuvar açık bir kümedir, ya da her açık yuvar noktalarının her birinin bir komşuluğudur.

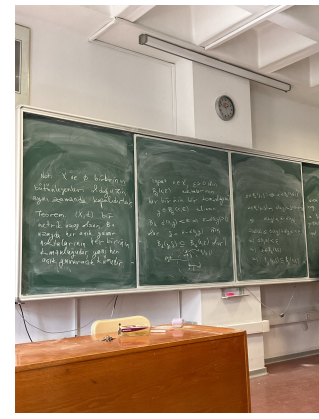
İspat. $y \in B_d(x, \varepsilon)$ olsun.

$$y \in B_d(x, \varepsilon) \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon - d(x, y) > 0$$

$\delta = \varepsilon - d(x, y)$ tanımlayalım.

İddia: $B_d(y, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$.





$z \in B_d(y, \delta)$ için $z \in B_d(x, \varepsilon)$ gerçekleşiyor mu?

$$\begin{aligned} z \in B_d(y, \delta) &\Rightarrow d(z, y) < \delta = \varepsilon - d(x, y) \\ &\Rightarrow d(z, y) < \varepsilon - d(x, y) \\ &\Rightarrow d(z, y) + d(x, y) < \varepsilon \end{aligned}$$

$d(x, z) \leq d(z, y) + d(x, y)$ olduğundan $d(x, z) < \varepsilon$ yani $z \in B_d(x, \varepsilon)$ elde edilir. O halde $B_d(y, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$ gerçekleşir. $\square$

Teorem. (X, d) bir metrik uzay ve $y \in X$ ve $\varepsilon > \delta > 0$ ise $B_d(y, \delta) \subseteq B_d(y, \varepsilon)$ geçerlidir.

İspat. $x \in B_d(y, \delta) \Rightarrow d(x, y) < \delta < \varepsilon \Rightarrow x \in B_d(y, \varepsilon)$ geçerlidir. $\square$

Tanım. (X, d) metrik uzayının bütün açık alt kümelerinin topluluğu τ_d , X üzerinde d tarafından üretilen topoloji olarak isimlendirilir.

Teorem. (X, d) metrik uzayının bütün açık alt kümelerinin topluluğu τ_d için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) $\emptyset$ ve X açık kümelerdir
- (ii) Eğer $\forall \alpha \in \Delta$ için U_α açık ise $\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ açıktır. (Diğer bir deyişle her açık küme ailesinin birleşimi açıktır.)
- (iii) Eğer $i \in \{1, \dots, n\}$ için U_i ler açık ise, $\bigcap_{i=1}^n U_i$ açıktır.

İspat.

(i) Bir metrik uzayda U kümesi açık ise $\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0 : B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq U$ gerçekleşmeli, $\emptyset$ un açık olmaması bu koşulu bozan bir elemanın varlığını gerektirir, ama $\emptyset$ un hiç bir elemanı olmadığından koşulu bozan bir elemanı da yoktur. O halde $\emptyset$ açıktır. $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon_x > 0$ için $\{x\} \subseteq B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq X$ doğrudur, yani X açıktır.

(ii) Eğer $x \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ ise bu durumda $\exists \alpha_1 \in \Delta : x \in U_{\alpha_1}$ geçerlidir. U_{α_1} açık olduğundan bir $\varepsilon_x > 0$, $B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq U_{\alpha_1}$ gerçekleşmek üzere vardır. $U_{\alpha_1} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ olduğundan

$$B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq U_{\alpha_1} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha.$$

gerçeklenir, dolayısıyla $\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ açıktır.

(iii) $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ ise $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $x \in U_i$ dir ve her bir U_i açık olduğundan $\exists \varepsilon_{x(i)}, > 0 : B_d(x, \varepsilon_{x(i)}) \subseteq U_{\alpha_i} \forall i \in \{1, \dots, n\}$ için gerçekleşir. $\varepsilon = \min \{\varepsilon_{x(i)} : i \in \{1, \dots, n\}\}$ alınırsa, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq U_{\alpha_i} \Rightarrow B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$ gerçekleşir. Yani $\bigcap_{j=1}^n U_j$ açıktır.

Uyarı: a) Boştan farklı bir X kümesinin alt kümelerinin bir $\tau (\subseteq \wp(X))$ ailesi yukarıdaki üç koşulu gerçeklerse bir topoloji olarak isimlendirilir, üzerinde τ topolojisi verilmiş X kümesi ile birlikte bu topolojik uzay (X, τ) ile gösterilir.

b) (X, d) metrik uzayının bütün açık alt kümelerinin topluluğu $\tau_d = \{U \subseteq X : U, (X, d) \text{ uzayında açık}\}$ topolojisi metrik topoloji veya d metriğinin

belirlediği topoloji olarak isimlendirilir. (X, τ_d) uzayına metrik topolojik uzay denir.

c) τ topolojisi ile X üzerinde d metriğinin ürettiği τ_d topolojisi eşit ise (X, τ) topolojik uzayı metriklenebilir topolojik uzay olarak isimlendirilir.

Alıştırma. $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği gözönüne alınsın..

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}?$$

Çözüm. $\{0\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ açıktır.

$x \neq 0$ ($x \notin \{0\}$) farzedelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \exists n^* \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n^*} < |x| \\ \Rightarrow x \notin \left(-\frac{1}{n^*}, \frac{1}{n^*}\right) \left(\supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) \\ \Rightarrow x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Yani $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)$ geçerlidir. Bu ise $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset \{0\}$ demektir. Sonuçta $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ elde edilir. $\square$

Teorem. $\mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınırsa $\forall G \in \tau_d \setminus \{\emptyset\}$ sayılabilir sayıda ayrık açık aralığın birleşimidir.

İspat. $G \in \tau_d \setminus \{\emptyset\}$ olsun. $x \in G$ olsun. G açık olduğundan x , G de kapsanan sınırlı açık bir aralığın merkezidir. I_x , G de kapsanan ve x noktasını içeren açık aralıkların birleşimi olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:

i) I_x , x noktasını içeren ve $I_x \subseteq G$ gerçekleyen bir açık aralıktır (Eğer $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ reel eksen üzerinde aralıkların $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i \neq \emptyset$ gerçekleyen boştan farklı bir ailesi ise $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ de bir aralıktır.)

ii) I_x , x noktasını içeren her açık aralığı kapsar ve $I_x \subseteq G$ dir.

iii) Eğer $y \in I_x$ ise $I_x = I_y$ dir.

iv) $x, y \in G$, $x \neq y$ ise ya $I_x = I_y$ veya $I_x \cap I_y = \emptyset$ gerçekleşir, çünkü $\exists z \in I_x \cap I_y$ ise bu durumda

$$(z \in I_x) \wedge (z \in I_y)$$

$$\Rightarrow (I_x = I_z) \wedge (I_y = I_z)$$

$$\Rightarrow I_x = I_y$$

Şimdi $x \in G$ noktalarına karşı gelen bütün farklı I_x kümelerinin ailesine $\mathcal{G}$ diyelim. Bu durumda $\mathcal{G}, G = \bigcup_{I \in \mathcal{G}} I$ gerçekleyen ayrık açık aralıkların ailesidir. $\mathcal{G}$ ailesinin sayılabilir olduğunu göstermeliyiz. $G_{\mathbb{Q}}$, G de kapsanan rasyonel sayıların kümesi olsun. $G_{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$ geçerlidir. $f : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{G}$ fonksiyonu $x \in G_{\mathbb{Q}}$ için $f(x) = I_x$ ile tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu iyi tanımlıdır, çünkü her $x \in G_{\mathbb{Q}}$ için $\mathcal{G}$ de tek bir I_x karşı gelir ($\mathcal{G}$ de farklı aralıklar aynı rasyonel sayıyı içeremez.) Ayrıca f $\mathcal{G}$ deki her bir aralık $G_{\mathbb{Q}}$ da bir rasyonel sayı içerdiğinden üzerinedir. $G_{\mathbb{Q}}$ kümesi sayılabilir olduğundan $\mathcal{G}$ sayılabilir.

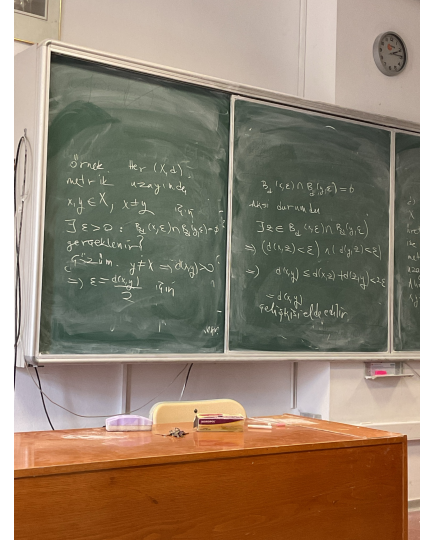
Örnek. Her (X, d) metrik uzayında $x, y \in X$ ve $y \neq x \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \varepsilon) = \emptyset$ gerçekleşir.

$y \neq x \Rightarrow d(x, y) > 0$, $\varepsilon = \frac{d(x, y)}{2}$ için $B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \varepsilon) = \emptyset$ gerçekleşir. Aksi durumda

$$\exists z \in B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \varepsilon) \Rightarrow (d(x, z) < \varepsilon) \wedge (d(y, z) < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\varepsilon = d(x, y)$$

çelişkisi elde edilir.



6. Denk Metrik Kavramı

Tanım. Bir $X (\neq \emptyset)$ üzerinde iki farklı metrik aynı topolojiyi üretirse bu metrikler denk metrikler olarak isimlendirilir.

Teorem. ρ ve d aynı X kümesi üzerinde iki metrik olsun. $k_1, k_2 > 0$ reel sayıları her $x, y \in X$ için $k_1 \cdot \rho(x, y) \leq d(x, y) \leq k_2 \cdot \rho(x, y)$ gerçekleşmek üzere varsa, X üzerinde ρ ve d metrikleri denk metriklerdir.

İspat.

U kümesi (X, d) metrik uzayında açık $x \in U$ olsun, bu durumda bir $\varepsilon > 0$, $B_d(x, \varepsilon) \subseteq U$ olacak şekilde vardır.

İddia: $B_\rho\left(x, \frac{\varepsilon}{k_2}\right) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$? Keyfi $y \in B_\rho\left(x, \frac{\varepsilon}{k_2}\right)$ için

$$\begin{aligned} y \in B_\rho\left(x, \frac{\varepsilon}{k_2}\right) &\Rightarrow \rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{k_2} \\ &\Rightarrow d(x, y) \leq k_2 \cdot \rho(x, y) < k_2 \cdot \frac{\varepsilon}{k_2} = \varepsilon \end{aligned}$$

geçerli olduğundan $y \in B_d(x, \varepsilon)$ ve y keyfi olduğundan $B_\rho\left(x, \frac{\varepsilon}{k_2}\right) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$ elde edilir. Bu durumda U , (X, ρ) metrik uzayında açık bir kümedir, yani d metriğinin ürettiği topoloji τ_d , ρ metriğinin ürettiği topoloji τ_ρ nun bir alt ailesidir $\tau_d \subseteq \tau_\rho$ geçerlidir.

V kümesi (X, ρ) metrik uzayında açık $x \in V$ olsun, bu durumda bir $\varepsilon > 0$, $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V$ olacak şekilde vardır.

$\varepsilon k_1 = \varepsilon^*$ için $B_d(x, \varepsilon^*) \subseteq B_\rho(x, \varepsilon)$?

Keyfi $y \in B_d(x, \varepsilon^*)$ için

$$\begin{aligned} y \in B_d(x, \varepsilon^*) &\Rightarrow d(x, y) < \varepsilon^* \\ &\Rightarrow k_1 \rho(x, y) \leq d(x, y) < \varepsilon^* \\ &\Rightarrow k_1 \rho(x, y) < \varepsilon^* \\ &\Rightarrow \rho(x, y) < \frac{1}{k_1} \varepsilon^* = \frac{1}{k_1} \varepsilon k_1 = \varepsilon \\ &\Rightarrow y \in B_\rho(x, \varepsilon) \end{aligned}$$

geçerli olduğundan $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$ ve y keyfi olduğundan $B_d(x, \varepsilon^*) \subseteq B_\rho(x, \varepsilon)$ elde edilir. Bu durumda V , (X, d) metrik uzayında açık bir kümedir ve $\tau_\rho \subseteq \tau_d$ gerçekleşir.

Sonuçta $\tau_\rho = \tau_d$ dir. $\square$

Tanım. (X, d) metrik uzayının bir $A \subseteq X$ alt kümesinin d metriğine göre sınırlı olması için $\text{gyk } A = \emptyset$ olması veya bir $M > 0$ reel sayısının her $x, y \in A$ için $d(x, y) \leq M$ gerçekleşmek üzere var olmasıdır. X kümesi üzerinde tanımlı bir d metriğinin sınırlı metrik olması için $\text{gyk } X$ kümesinin d metriğine göre sınırlı olmasıdır.

Teorem. Her metriğin denk olduğu bir sınırlı metrik vardır. Yani eğer (X, d) bir metrik uzay ise X üzerinde bir ρ sınırlı metriği $\tau_d = \tau_\rho$ gerçekleşmek üzere vardır.

İspat. (X, d) bir metrik uzay, her $x, y \in X$ için $\rho(x, y) = \min \{1, d(x, y)\}$ olsun. ρ nun sınırlı metrik olduğu açıktır. $\tau_d = \tau_\rho$ olduğunu göstereceğiz.

$U \in \tau_\rho$ olsun. $p \in U$, $\varepsilon > 0$ $B_\rho(p, \varepsilon) \subseteq U$ gerçekleşmek üzere vardır. $\delta = \varepsilon$ ve $x \in B_d(p, \delta)$ olsun. Bu durumda $d(x, p) < \delta$ ve ρ metriğinin tanımından $\rho(x, p) \leq d(x, p)$ dolayısıyla $\rho(x, p) < \delta = \varepsilon$ ve $B_d(p, \delta) \subseteq B_\rho(p, \varepsilon) \subseteq U$ gerçekleşir, $U \in \tau_d$ dir.

$p \in V \in \tau_d \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_d(p, \varepsilon) \subseteq V$ dir. Şimdi $\gamma = \min \{1, \varepsilon\}$ ve $x \in B_\rho(p, \gamma)$ olsun. $\varepsilon < 1$ ve $\varepsilon \geq 1$ durumlarını ayrı ayrı irdelleyeceğiz.

i) $\varepsilon < 1$ ise $\gamma = \varepsilon$ ve dolayısıyla $\rho(x, p) < \gamma \Rightarrow \rho(x, p) = d(x, p)$ gerçekleşir. O halde $d(x, p) < \gamma = \varepsilon$ ve böylece $x \in B_d(p, \varepsilon)$ geçerlidir.

ii) Eğer $\varepsilon \geq 1$ ise $\gamma = 1$ dir. $x \in B_\rho(p, \gamma)$, $\min \{1, d(x, p)\} = \rho(x, p) < \gamma = 1$ yine $\rho(x, p) = d(x, p)$ olur, böylece $d(x, p) < \gamma = 1 < \varepsilon$ geçerlidir. Bu durumda $B_\rho(p, \gamma) \subseteq B_d(p, \varepsilon) \subseteq V \Rightarrow V \in \tau_\rho$

Örnek. d_e , d_1 ve d_∞ metrikleri $\mathbb{R}^2$ üzerinde denk metriklerdir, gösterin.

Çözüm. $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun.

$$|x_1 - y_1| \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

ve

$$|x_2 - y_2| \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) &= d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \\ &= \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \\ &\leq d_e(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

eşitsizliği $d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_e(\bar{x}, \bar{y})$ verir.

$$\begin{aligned} d_e(\bar{x}, \bar{y}) &\leq d_e(\bar{x}, (y_1, x_2)) + d_e((y_1, x_2), \bar{y}) \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - x_2)^2} + \sqrt{(y_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - y_2)^2} \\ &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = d_1(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

sonuçta $d_e(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_1(\bar{x}, \bar{y})$ geçerlidir.

$$\begin{aligned} d_1(\bar{x}, \bar{y}) &= \underbrace{|x_1 - y_1|}_{\leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}} + \underbrace{|x_2 - y_2|}_{\leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}} \\ &\leq 2 \cdot \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 2 \cdot d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

Sonuçta $d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_e(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_1(\bar{x}, \bar{y}) \leq 2 \cdot d_\infty(\bar{x}, \bar{y})$ geçerlidir.

Alıştırma. d boştan farklı bir X kümesi üzerinde bir metrik olmak üzere $x, y \in X$ için $\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ ile tanım ρ metriği gözönüne alınsın. d ve ρ X üzerinde denk metrikler midir?

Çözüm. $U, (X, d)$ metrik uzayında açık bir küme, $x \in U$ olsun. Bu durumda $\exists r > 0 : B_d(x, r) \subseteq U$ gerçekleşir. Fakat her $x, y \in X$ ve $r > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} &< \frac{r}{1 + r} \Rightarrow r \cdot d(x, y) + d(x, y) < r d(x, y) + r \\ &\Rightarrow d(x, y) < r \\ &\Rightarrow B_\rho\left(x, \frac{r}{1 + r}\right) \subseteq B_d(x, r) \subseteq U \end{aligned}$$

gerçeklendiğinden $U, (X, \rho)$ metrik uzayında açıktır.

Tersine $U, (X, \rho)$ metrik uzayında açık bir küme, $x \in U$ olsun. Bu durumda bir $r > 0, B_\rho(x, r) \subseteq U$ gerçekleşmek üzere vardır.

Durum1. $r < 1$ ise bu durumda her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) < \frac{r}{1 - r} \Rightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \rho(x, y) < r$$

olur, çünkü

$$\begin{aligned} d(x, y) &< \frac{r}{1 - r} \Rightarrow d(x, y) - r d(x, y) < r \\ &\Rightarrow d(x, y) < r + r d(x, y) = r(1 + d(x, y)) \\ &\Rightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \rho(x, y) < r \end{aligned}$$

gerçeklenir. Böylece $B_d\left(x, \frac{r}{1 - r}\right) \subseteq B_\rho(x, r) \subseteq U$ gerçekleşir

Durum2. $r \geq 1$ ise bu durumda her $x, y \in X$ için $\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq 1 \leq r$ ve dolayısıyla $B_\rho(x, r) = X$ olur ki bu da $U = X$ olmasını gerektirir. O halde her iki durumda $U, (X, d)$ metrik uzayında açıktır.

Örnek. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$ ile tanımlı d_∞ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir, gösterin.

d_∞ ve d_p $\left(d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde denk metrik-tir, gösterin.

Çözüm. a) i) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $|x_i - y_i| \geq 0$ olduğundan $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ dir.

ii) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k| = 0$$

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\} \text{ için } |x_k - y_k| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

iii)

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k| = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k| = d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_p(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

iv) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$|x_k - z_k| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k|$$

$$\leq d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$\Rightarrow d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

b) d_∞ ve d_p $\mathbb{R}^n$ üzerinde denk metrik midir?
 $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ için

$$|x_k - y_k|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p = (d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^p$$

$$\Rightarrow (|x_k - y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq ((d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow |x_k - y_k| \leq d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Son ifade üzerinden maksimum alınırsa

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k| \leq d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

elde edilir.

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$ için

$$|x_k - y_k|^p \leq \max_{1 \leq k \leq n} (|x_k - y_k|^p) = (d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^p$$

gerçeklenir. k üzerinden toplam alınıp p -yinci kök alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p &\leq n \cdot (d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^p \\ \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq n^{\frac{1}{p}} \cdot d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

O halde d_∞ ve d_p $\mathbb{R}^n$ üzerinde denk metriktir.

7. Uzaklık ve Çap

Tanım. (X, d) metrik uzayının bir $A \subseteq X$ alt kümesinin d metriğine göre sınırlı olması için gerek $A = \emptyset$ olması veya bir $M > 0$ reel sayısının her $x, y \in A$ için $d(x, y) \leq M$ gerçekleşmek üzere var olmasıdır. X kümesi üzerinde tanımlı bir d metriğinin sınırlı metrik olması için gerek X kümesinin d metriğine göre sınırlı olmasıdır.

Tanım. (X, d) metrik uzay, $A, B \subset X$ için A ve B arasındaki uzaklık

$$dist(A, B) = \begin{cases} \infty & , A = \emptyset \text{ veya } B = \emptyset \text{ ise} \\ \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\} & A \neq \emptyset \neq B \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanır. $dist(a, b) = d(\{a\}, \{b\})$ dir. $dist(x, A) = d(\{x\}, A)$.

Teorem. $A, A^*, B \subset X$ için aşağıdakiler, geçerlidir:

a) $dist(A, B) = \infty \iff A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$.

b) $dist(A, B) = dist(B, A)$

c) $A \subset A^* \Rightarrow dist(A^*, B) \leq dist(A, B)$

d) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow dist(A, B) = 0$

İspat. a) Tanımdan açıktır.

b) $A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$ ise $dist(A, B) = \infty = dist(B, A)$ geçerlidir,

$A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ ise

$$dist(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

$$= \inf \{d(b, a) : a \in A, b \in B\} = dist(B, A)$$

c) $A = \emptyset$ ise her durumda $dist(A^*, B) \leq \infty$. $B = \emptyset$ ise $dist(A^*, B) = \infty = dist(A, B)$

$A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ ise

$$dist(A^*, B) = \inf \{d(a^*, b) : a^* \in A^*, b \in B\}$$

$$\leq \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\} = dist(A, B)$$

geçerlidir.

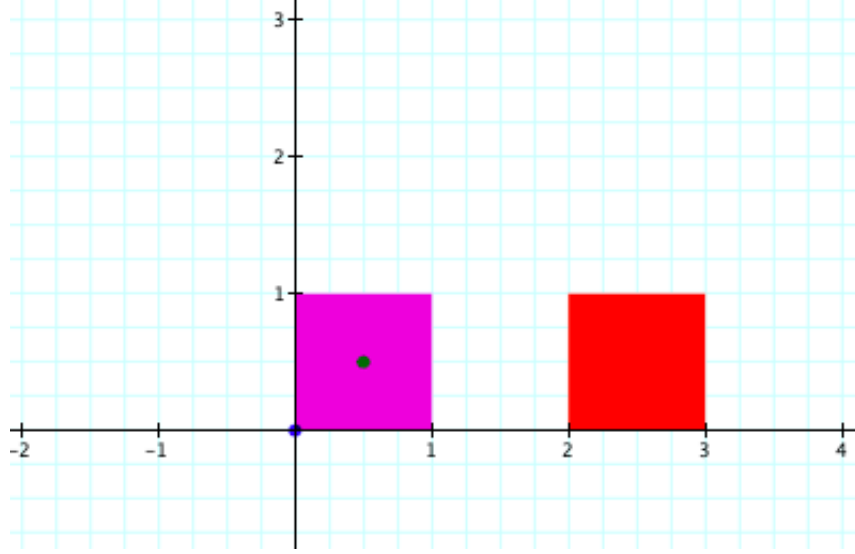
d) $a \in A \cap B$ ise $dist(A, B) \leq d(a, a) = 0$ dolayısıyla $dist(A, B) = 0$

□

Örnek. $\mathbb{R}^2$ üzerinde Öklidyen metrik verilsin. $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1\}$, $B = \{(x, y) : 2 < x < 3, 0 < y < 1\}$, $C = \{(0, 0)\}$, $D = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ olsun.

Bu durumda $dist(A, B) = 1$, $dist(A, C) = 0$

, $dist(C, B) = 2$, $dist(D, A) = 0$, $dist(D, B) = \frac{3}{2}$ gerçekleşir.



Tanım. (X, d) metrik uzay $A \subseteq X$ olsun. A nın $\delta(A)$ veya $\text{çap}(A)$ ile gösterilen çapı $x, y \in A$ olmak üzere $d(x, y)$ uzaklıklarının en küçük üst sınırıdır, yani

$$\delta(A) = \text{çap}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$$

ile tanımlıdır. Çapı sonlu olan kümeler sınırlı küme olarak isimlendirilir.

Örnek. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. $[0, 1]$ aralığı bu metrik uzayda sınırlıdır.

$B_d(0, 1)$ açık yuvarı sınırlıdır.

$(-\infty, 0]$ yarı doğrusu sınırlı değildir.

Tanım. (Y, ρ) metrik uzay olmak üzere, bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu $f(X)$ sınırlı ise sınırlı fonksiyon olarak isimlendirilir.

Örnek. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. $f(x) = x^2$ ile tanımlı $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ yi $[0, \infty)$ a resmeder dolayısıyla fonksiyon sınırlı değildir.

$f(x) = \sin x$ ise $\mathbb{R}$ yi $[-1, 1]$ aralığına resmeder dolayısıyla fonksiyon sınırlıdır.

Teorem. X keyfi bir küme (Y, ρ) metrik uzay olmak üzere, bütün $f : X \rightarrow Y$ sınırlı fonksiyonlarının kümesi $\Phi(X, Y)$ üzerinde $d(f, g) = \sup \{\rho(f(x), g(x))\}$ bir metriktir.

İspat. f ve g , X den (Y, ρ) metrik uzayına sınırlı fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$d(f, g) = \sup \{\rho(f(x), g(x))\}$$

sınırlıdır?

$a \in X$ olsun. Bu durumda

$$\rho(f(x), g(x)) \leq \rho(f(x), f(a)) + \rho(f(a), g(x))$$

$$\leq \rho(f(x), f(a)) + \rho(f(a), g(a)) + \rho(g(a), g(x))$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$d(f, g) \leq \text{çap}[f(X)] + \rho(f(a), g(a)) + \text{çap}[g(X)]$$

geçerlidir, yani d sınırlıdır.

i) Her f, g için $d(f, g) \geq 0$

ii) $d(f, g) = 0 \iff f = g$?

Gerçekten $\sup\{\rho(f(x), g(x))\} = 0 \Rightarrow$ her $x \in X$ için $f(x) = g(x)$.

$f = g \iff d(f, g) = 0$

iii) $d(f, g) = d(g, f)$

iv)

$$d(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x))\}$$

$$\leq \sup[\rho(f(x), h(x)) + \rho(h(x), g(x))]$$

$$\leq \sup[\rho(f(x), h(x))] + \sup[\rho(h(x), g(x))]$$

$$= d(f, h) + d(h, g)$$

Teorem. (X, d) metrik uzay $A, B \subseteq X$ olsun.

a) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ve $A \subseteq B$ ise $\text{çap}(A) \leq \text{çap}(B)$ dır.

b) $A \cap B \neq \emptyset$ ise $\text{çap}(A \cup B) \leq \text{çap}(A) + \text{çap}(B)$ geçerlidir.

İspat. a) $x, y \in A$ olmak üzere

$$\delta(A) = \text{çap}(A) = \sup_{x, y \in A} \{d(x, y)\}$$

geçerlidir. $A \subseteq B$ olduğundan

$$\text{çap}(A) = \sup_{x, y \in A} \{d(x, y)\} \leq \sup_{x, y \in B} \{d(x, y)\} = \text{çap}(B)$$

b) A ve B arasındaki uzaklığın

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

olduğunu biliyoruz. (X, d) metrik uzay $A, B \subseteq X$ ise

$$\text{çap}(A \cup B) \leq \text{çap}(A) + \text{çap}(B) + \text{dist}(A, B)$$

geçerlidir, ama $dist(A, B) = 0$ olduğundan

$$\zeta ap(A \cup B) \leq \zeta ap(A) + \zeta ap(B)$$

gerçeklenir. Çünkü $A \subseteq B$ ise $A \cup B = B$ ise

$$\zeta ap(A \cup B) = \zeta ap(B)$$

$$\Rightarrow \zeta ap(A \cup B) \leq \zeta ap(B) + \zeta ap(A)$$

$B \subseteq A$ ise $A \cup B = A$ ise

$$\zeta ap(A \cup B) = \zeta ap(A)$$

$$\Rightarrow \zeta ap(A \cup B) \leq \zeta ap(A) + \zeta ap(B)$$

$x, y \in A \cup B$ keyfi seçilsin.

Durum 1.

Eğer $x, y \in A (\subseteq A \cup B)$ ise $d(x, y) \leq \zeta ap(A)$ dolayısıyla $d(x, y) \leq \zeta ap(A) + \zeta ap(B)$

Durum 2.

Eğer $x, y \in B (\subseteq A \cup B)$ ise $d(x, y) \leq \zeta ap(B)$ dolayısıyla

$$d(x, y) \leq \zeta ap(B) + \zeta ap(A)$$

Durum 3.

Eğer $x \in A$ $y \in B$ ise $A \cap B \neq \emptyset$ olduğundan

$$\exists u \in A \cap B \Rightarrow (u \in A) \wedge (u \in B)$$

$$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y)$$

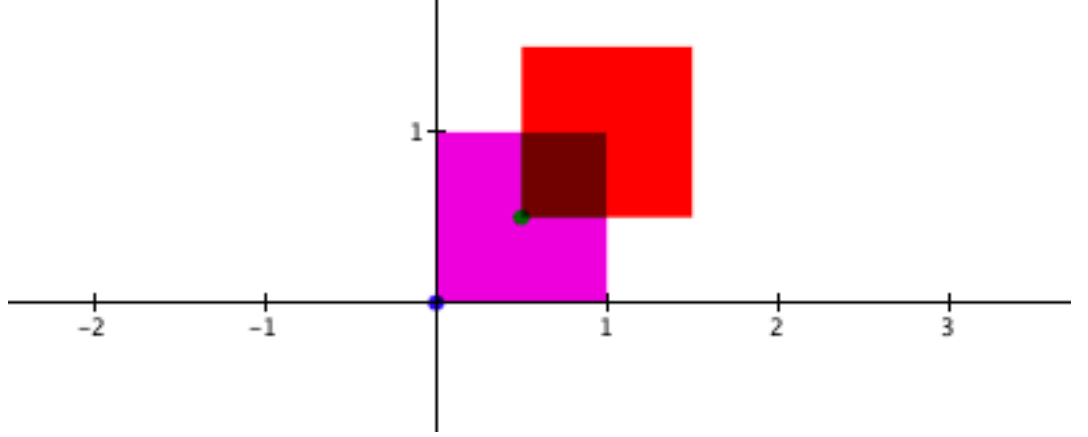
$$\leq \sup_{x, u \in A} \{d(x, u)\} + \sup_{u, y \in B} \{d(u, y)\}$$

$$\leq \zeta ap(A) + \zeta ap(B)$$

dolayısıyla

$$d(x, y) \leq \zeta ap(A) + \zeta ap(B)$$

$$\zeta ap(A \cup B) = \sup_{x, y \in A \cup B} \{d(x, y)\} \leq \zeta ap(A) + \zeta ap(B)$$



8. İç Kavramı

Tanım. (X, d) metrik uzayında $A \subseteq X$ olsun. $\mathcal{C}_A = \{U \subseteq X : U \text{ açık ve } B \subseteq A\}$ olsun. $\emptyset \in \mathcal{C}_A \Rightarrow \mathcal{C}_A \neq \emptyset$ geçerlidir. $\mathring{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_A} B$ olsun. Bu A da kapsaman en büyük açık kümedir. $\mathring{A}$, A nın içi olarak isimlendirilir.

Teorem. (İçin karakterizasyonu) (X, d) metrik uzay, $A \subseteq X$ olsun.

$x \in \mathring{A}$ için $\exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq A$ gerçekleşmesidir.

İspat.

$(\Rightarrow) x \in \mathring{A}$ olsun. Tanımdan $\mathring{A}$ açık olduğundan $\exists \varepsilon_x > 0 : B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq \mathring{A} (\subseteq A)$

$\Rightarrow B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq A$ gerçekleşir.

$(\Leftarrow) \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq A$ gerçekleşsin. Bu durumda $B_d(x, \varepsilon) \in \mathcal{C}_A \Rightarrow B_d(x, \varepsilon) \subseteq \mathring{A} \subseteq A$ gerçekleşir.

Uyarı. a) (X, d) metrik uzayında $A \subseteq X$ için A° kümesinin elemanları

A nın iç noktaları olarak isimlendirilir:

$A^\circ = \{x \in A : \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq A\}$.

b) $A = A^\circ$ ise yani A nın her bir noktası iç nokta ise A kümesi X in açık alt kümesi olarak isimlendirilir.

Teorem.

i) $\mathring{A}$, A da kapsanan en büyük açık kümedir.

ii) A nın açık olması için $\text{gyk } A$ nın açık yuvarların birleşimi olmasıdır.

İspat. i) $B \subseteq A$ ise B nin iç noktaları A nın da iç noktalarıdır. Dolayısıyla $\mathring{B} \subseteq \mathring{A}$ geçerlidir. A nın her açık alt kümesi $\mathring{A}$ de kapsanır

($B = \overset{\circ}{B}$) ve A daki her açık yuvar $\overset{\circ}{A}$ de kapsanır. Bu ise $B_d(x, \varepsilon) \subseteq A$ ise $B_d(x, \varepsilon) \subseteq \overset{\circ}{A}$ geçerlidir ve $\overset{\circ}{A}$ açık kümedir.

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{x \in A} \{x : \exists \varepsilon_x > 0, B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq A\} = \bigcup_{x \in A} B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq \overset{\circ}{A}$$

$x \in B_d(y, \delta) \Rightarrow d(x, y) < \delta < \varepsilon \Rightarrow x \in B_d(y, \varepsilon)$ geçerlidir.

ii) A açık bir küme olsun. Bu durumda A nın her noktası iç noktadır ve A nın her bir x noktası için bir $B_d(x, \varepsilon_x)$ açık yuvarı $B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq A$ da gerçekleşmek üzere vardır. $x \in B_d(x, \varepsilon_x)$ olduğundan

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq A$$

□

Teorem. (X, d) metrik uzay $A, B \subseteq X$ ise bu durumda

- a) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$
- b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
- c) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$

geçerlidir.

İspat. a) $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow B_d(x, \varepsilon) \subseteq B \Rightarrow x \in \overset{\circ}{B} \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$

- b) $x \in (A \cap B)^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq A \cap B$
 $\Rightarrow (B_d(x, \varepsilon) \subseteq A) \wedge (B_d(x, \varepsilon) \subseteq B)$
 $\Rightarrow (x \in \overset{\circ}{A}) \wedge (x \in \overset{\circ}{B}) \Rightarrow x \in A^\circ \cap B^\circ$
 $\Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$ (1)

$y \in A^\circ \cap B^\circ \Rightarrow (y \in \overset{\circ}{A}) \wedge (y \in \overset{\circ}{B})$
 $\Rightarrow (\exists \varepsilon_1 > 0 : B_d(y, \varepsilon_1) \subseteq A) \wedge (\exists \varepsilon_2 > 0 : B_d(y, \varepsilon_2) \subseteq B)$
 $\xRightarrow{\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} B_d(y, \varepsilon) \subseteq A \cap B \Rightarrow y \in (A \cap B)^\circ$
 $\Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$ (2)

(1) ve (2) den eşitlik elde edilir.

- c) $x \in A^\circ \cup B^\circ \Rightarrow (x \in A^\circ) \vee (x \in B^\circ)$
 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (B_d(x, \varepsilon) \subseteq A) \vee (B_d(x, \varepsilon) \subseteq B)$
 $\Rightarrow (B_d(x, \varepsilon) \subseteq A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cup B)^\circ$
 $\Rightarrow A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$

Uyarı. $(A \cup B)^\circ \subseteq A^\circ \cup B^\circ$ genel olarak doğru değildir.

$\mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınırsa, $A = (-1, 0]$ ve $B = [0, 1)$ için $(A \cup B)^\circ = (-1, 1)$,
 $A^\circ = (-1, 0)$, $B^\circ = (0, 1)$ dolayısıyla

$$(-1, 1) = (A \cup B)^\circ \not\subseteq A^\circ \cup B^\circ = (-1, 0) \cup (0, 1)$$

geçerlidir.

Örnek. Her (X, d) metrik uzayında $x \in X$ için $X \setminus \{x\}$ açıktır?
(Yani (X, d) metrik uzayında $\forall x \in X$ için $\{x\}$ kapalıdır).

Çözüm. $y \in X \setminus \{x\}$ ise $y \neq x \Rightarrow d(x, y) > 0$ ve $\varepsilon = \frac{d(x, y)}{2}$ için $B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \varepsilon) = \emptyset$ gerçekleşir, bu $B_d(y, \varepsilon) \subseteq X \setminus B_d(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus \{x\}$ yani $y \in (X \setminus \{x\})^\circ$ verir.

$(\{x\} \subseteq B_d(x, \varepsilon) \Rightarrow X \setminus B_d(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus \{x\})$

9. Kapalı Küme

Tanım. (X, d) bir *metrik uzay* ve $F \subseteq X$ olsun. Eğer F kümesinin tümleyeni $X \setminus F$ açık alt küme (ya da kısaca açık küme) ise F kümesi kapalı küme olarak isimlendirilir.

Teorem. (X, d) *metrik uzayında* her $B_d[x, \varepsilon]$ kapalı yuvarı kapalı bir kümedir.

İspat. $X \setminus B_d[x, \varepsilon] = \{y \in X : d(x, y) > \varepsilon\}$ olur. $y \in X \setminus B_d[x, \varepsilon]$ olsun. Bu durumda $d(x, y) > \varepsilon$ olduğundan $\delta = d(x, y) - \varepsilon > 0$ olur. $B_d(y, \delta) \subseteq X \setminus B_d[x, \varepsilon]$ geçerlidir, gösterelim. $z \in B_d(y, \delta)$ olsun. Bu durumda $d(z, y) < \delta$ geçerlidir.

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, z) + \delta$$

gerçeklendiğinden

$$\varepsilon = d(x, y) - \delta < d(x, z)$$

gerçeklenir. Buradan $z \notin B_d[x, \varepsilon] \Rightarrow z \in X \setminus B_d[x, \varepsilon]$ olur. O halde $B_d(y, \delta) \subseteq X \setminus B_d[x, \varepsilon]$ geçerlidir, yani $X \setminus B_d[x, \varepsilon]$ açık $B_d[x, \varepsilon]$ kapalıdır. $\square$

Örnek. (X, d) ayrık *metrik uzayında* her A alt kümesi hem açık hemde kapalıdır?

Çözüm. Her $x \in X$ için $B_d(x, 1) = \{x\}$ olduğundan her $x \in A$ için $B_d(x, 1) = \{x\} \subseteq A$, yani A kümesi dolayısıyla X in her alt kümesi açıktır. Bu durumda $X \setminus A \subseteq X$ olduğundan $X \setminus A$ da açıktır, açık kümenin tümleyeni kapalı olduğundan $X \setminus (X \setminus A) = A$ kümesi de kapalıdır. O halde ayrık metrik uzayda her alt küme kapalıdır. Sonuçta X ayrık metrik uzayında her A alt kümesi hem açık hem de kapalıdır.

Teorem. (X, d) *metrik uzayı gözönüne alınsın.*

a) Sonlu sayıda kapalı kümeden oluşan alt küme ailesinin birleşimi kapalıdır.

b) Keyfi kapalı küme ailesinin arakesiti yine kapalıdır.

İspat. a) $\{F_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ X de kapalı kümelerin sonlu bir ailesi olsun. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $\mathbb{C}_X F_i$ X de açık yani $\mathbb{C}_X F_i \in \tau_d$ olsun. Bu durumda $\bigcap_{i=1}^n \mathbb{C}_X F_i \in \tau_d$ olur, yani $\bigcap_{i=1}^n \mathbb{C}_X F_i$ açık dolayısıyla bütünleyeni

$$\text{kapalıdır. } \mathbb{C}_X \left(\bigcap_{i=1}^n \mathbb{C}_X F_i \right) = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{C}_X \mathbb{C}_X F_i = \bigcup_{i=1}^n F_i \text{ kapalıdır.}$$

b) $\{F_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ X de kapalı kümelerin Δ indis kümesiyle indisli bir ailesi olsun. $\forall \alpha \in \Delta$ için $\mathbb{C}_X F_\alpha$ X de açıktır, bu durumda $\bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C}_X F_\alpha \in \tau_d \Rightarrow \mathbb{C}_X \left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C}_X F_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \Delta} (\mathbb{C}_X \mathbb{C}_X F_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \in \tau_d$. $\square$

Teorem. (Kapalı kümenin Karakterizasyonu) (X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A nın kapalı olması için $\forall x \in \mathbb{C}_X A, \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, gerçekleşmesidir.

İspat. $(\Rightarrow)$ A kapalı olsun, keyfi $x \in \mathbb{C}_X A$ seçilsin. Bu durumda $\mathbb{C}_X A = U$ açık küme olduğundan $\exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq U$ gerçekleşir, bu ise $B_d(x, \varepsilon) \cap A \subseteq (\mathbb{C}_X A) \cap A = \emptyset \implies B_d(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ demektir.

$(\Leftarrow)$ $\forall x \in \mathbb{C}_X A, \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, gerçekleşsin. Bu $\forall x \in \mathbb{C}_X A, \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C}_X A$ demektir, yani $\mathbb{C}_X A$ açık, A kapalıdır.

Örnek. Herhangi bir (X, d) metrik uzayında her sonlu $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ alt kümesi kapalıdır.?

Çözüm. Yukarıdaki teoremden hareketle $\forall x \notin F$ için $\exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ gerçekleştiğini göstermek yeterlidir.

$x \notin F$ olsun, bu durumda $\varepsilon_i = d(x, x_i) > 0$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) gerçekleşir. $\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{\varepsilon_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ için $\varepsilon > 0$ dır.

Bu ise $B_d(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ verir. O halde F kapalıdır.

Örnek. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. Bu durumda $[a, b], \mathbb{N}, \mathbb{Z}, [a, \infty)$ alt kümeleri bu metrik uzayda kapalı kümelerdir.

Örnek. (X, d) bir metrik uzay, $\mathcal{A}$ ise bu metrik uzayda kapalı kümelerin ailesi olsun.

a) $X, \emptyset \in \mathcal{A}$

b) $F_1, F_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{A}$

c) $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \in \mathcal{A}$ gerçekleşir mi?

Çözüm. b)

$$F_1, F_2 \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathbb{C}_X (F_1 \cup F_2)$$

$$\Rightarrow (\exists \varepsilon_1 > 0 : B_d(x, \varepsilon_1) \cap F_1 = \emptyset) \wedge (\exists \varepsilon_2 > 0 : B_d(x, \varepsilon_2) \cap F_2 = \emptyset)$$

gerçeklenir. $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ için $B_d(x, \varepsilon) \cap (F_1 \cup F_2) = \emptyset$ geçerlidir, yani $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{A}$ dır.

c)

$$x \in \mathbb{C}_X \left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \right) \Rightarrow \exists \alpha^* \in \Delta x \notin F_{\alpha^*} (\in \mathcal{A})$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C}_X F_{\alpha^*} \subseteq \mathbb{C}_X \left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \right)$$

$$\Rightarrow B_d(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C}_X \left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \right)$$

$$\Rightarrow B_d(x, \varepsilon) \cap \left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \right) = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \in \mathcal{A}$$

10. Kapanış

Tanım. (X, d) bir metrik uzayında $A \subseteq X$ için A kümesini içeren kapalı kümelerin arakesiti (=en küçük kapalı üst kümesi) $\overline{A}$, A 'nın kapanışdır ve her $A \subseteq X$ için $A \subseteq \overline{A}$ geçerlidir.

Önerme. (X, d) bir metrik uzayında $A, B \subseteq X$ için

a) $A \subseteq B$ ise $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

geçerlidir.

İspat.

a) $A \subseteq B$ olsun ve $\mathcal{C}_A = \{K : A \subseteq K \text{ ve } K \text{ kapalı}\}$ olsun. $(A \subseteq B \subseteq \overline{B}) \wedge (\overline{B} \text{ kapalı}) \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{C}_A$ ve $\overline{A} = \bigcap_{K \in \mathcal{C}_A} K \subseteq \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

b) $A \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{A}$ ve $\overline{A}$ kapalı olduğundan $(\overline{A} \subseteq) \overline{\overline{A}} = \bigcap_{K \in \mathcal{C}_{\overline{A}}} K \subseteq \overline{A} \Rightarrow$

$$\overline{A} = \overline{\overline{A}}$$

c)

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$$

$$B \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \quad (*)$$

verir. $A \cup B \subseteq \underbrace{\overline{A \cup B}}_{\text{kapalı}}$ yani, $\overline{A \cup B} (\in \mathcal{C}_{A \cup B})$ hem A hem de B yi kapsayan kapalı bir küme, bu durumda

$$A \cup B \subseteq \overline{A \cup B} = \bigcap_{K \in \mathcal{C}_{A \cup B}} K \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \quad (**)$$

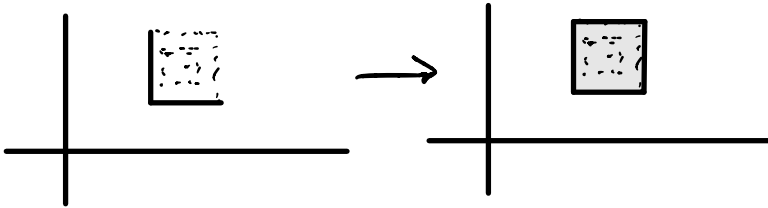
(*) ve (**) dan eşitlik gelir. $\square$

Teorem. (Kapanışın Karakterizasyonu) (X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda $x \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter, $\forall \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır.

Not: $x \in X$ noktası $\forall \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ gerçekleşiyorsa **kapanış noktası** olarak isimlendirilir, $\overline{A}$ bu koşulu sağlayan noktaların kümesidir.

İspat. $(\Rightarrow) x \in \overline{A}$ olsun. $\exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ gerçekleştiğini farzedelim. Bu $A \subseteq \bigcup_{\varepsilon > 0} B_d(x, \varepsilon)$ olması demektir. $M = \bigcup_{\varepsilon > 0} B_d(x, \varepsilon)$ olsun. Bu durumda M kapalıdır ve

$$A \subseteq M \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{M} = M$$



$$\Rightarrow \overline{A} \cap B_d(x, \varepsilon) \subseteq M \cap B_d(x, \varepsilon) = \mathbb{C}_X B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(x, \varepsilon) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \overline{A} \cap B_d(x, \varepsilon) = \emptyset$$

gerçeklenir. $x \in \overline{A} \cap B_d(x, \varepsilon)$ olduğundan bu mümkün değildir. Bu çelişki, $\forall \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ olduğunu gösterir.

Tersine $\forall \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ gerçeklensin. $x \in \overline{A}$ olduğunu gösterelim.

$x \notin \overline{A} \left(= \bigcap_{K \in \mathcal{C}_A} K \right)$ farzedelim. Bu durumda $\exists K^* \in \mathcal{C}_A : x \notin K^*$ gerçekleşir, $x \in \mathbb{C}_X K^*$ ve $\mathbb{C}_X K^*$ açıktır, $\exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C}_X K^*$ geçerlidir. O halde

$$K^* \cap B_d(x, \varepsilon) \subseteq K^* \cap \mathbb{C}_X K^* = \emptyset$$

$$\Rightarrow A \cap B_d(x, \varepsilon) \subseteq$$

$$\left(\bigcap_{K \in \mathcal{C}_A} K \right) \cap B_d(x, \varepsilon) \subseteq K^* \cap B_d(x, \varepsilon) = \emptyset$$

ve dolayısıyla $A \cap B_d(x, \varepsilon) = \emptyset$ olur ki bu da mümkün değildir. O halde $x \in \overline{A}$ dir.

Tanım. (X, d) bir metrik uzay $x \in X$, $A \subseteq X$ olsun. $x \in \overline{A}$, $\varepsilon > 0$ keyfi $B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ olsun, olası iki durum vardır:

i) $\exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$, bu durumda x noktası A nın izole noktası olarak isimlendirilir.

ii) $\forall \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ bu durumda x noktası A nın yığılma noktası olarak isimlendirilir. A nın yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir, ve A nın türev kümesi olarak isimlendirilir. Dolayısıyla $\overline{A} = A \cup A'$ geçerlidir. Bir kümenin kapalı olması için gyk yığılma noktalarını içermesidir.

Uyarı. A nın izole noktası her zaman A kümesindedir, A nın yığılma noktası A da olmayabilir, yani $x \in X$ noktasının izole noktası olması için gyk $x \in A \setminus A'$ olmasıdır.

Teorem. (X, d) bir metrik uzay $A \subseteq X$ olsun. A nın kapalı olması için gyk A nın bütün yığılma (limit) noktalarını içermesi $A' \subseteq A$ gerçekleşmesidir.

İspat. A kapalı olsun. $A' \subseteq A$ gerçekleştiğini göstermeliyiz. $x \in A'$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ gerçekleşir. $x \notin A$

olsun. Bu durumda $x \in X \setminus A$ ve A kapalı olduğundan $X \setminus A$ açık kümedir. Bu durumda $\exists \varepsilon^* > 0 : B_d(x, \varepsilon^*) \subseteq X \setminus A$ gerçekleşir, bu ise $B_d(x, \varepsilon^*)$ açık yuvarının A nın hiç bir noktasını içermemesi demektir, çelişki.

Tersine $A' \subseteq A$ gerçeklensin. A nın kapalı olduğunu göstereceğiz. $x \in X \setminus A$ olsun. Bu durumda $x \notin A$ ve $A' \subseteq A$ olduğundan $x \notin A'$ geçerlidir. Bu durumda $\exists \varepsilon' > 0 : B_d(x, \varepsilon') \subseteq X \setminus A$ gerçekleşir, bu ise $X \setminus A$ kümesinin açık, A nın kapalı olması demektir.

Önerme. $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

İspat. $x \in A'$ için $\forall \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ olmasıydı. Fakat $B \supseteq A$ ve dolayısıyla

$$B_d(x, \varepsilon) \cap (B \setminus \{x\}) \supseteq B_d(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

gerçeklenir, o halde $x \in A' \Rightarrow x \in B'$ yani $A' \subseteq B'$.

Teorem. (X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda $A \cup A'$ kapalıdır.

İspat. $X \setminus (A \cup A')$ alt kümesinin açık olduğunu göstereceğiz. $x \in X \setminus (A \cup A')$ olsun. Bu durumda $x \notin A' \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ gerçekleşir.

$$z \in B_d(x, \varepsilon)$$

(I)

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : (B_d(z, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)) \wedge (B_d(z, \delta) \cap A = \emptyset)$$

$$\Rightarrow z \notin A'$$

$$B_d(x, \varepsilon) \cap A' = \emptyset$$

(II)

(I) $\wedge$ (II) $\longrightarrow$

$$B_d(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus (A \cup A')$$

olur ve sonuçta, x keyfi olduğundan $X \setminus (A \cup A')$ açıktır.

Teorem. (X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda $\bar{A} = A \cup A'$ geçerlidir.

İspat. $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow A' \subseteq (\bar{A})' \subseteq \bar{A} \Rightarrow A \cup A' \subseteq \bar{A}$ (1) *Bunun gibi*
 $A \cup A'$ kapalı olduğundan

$$A \subseteq A \cup A' \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A \cup A'} = A \cup A' \quad (2)$$

gerçeklenir.

(1) ve (2) den $\bar{A} = A \cup A'$ gerçekleşir.

Teorem. (X, d) bir metrik uzay $A \subseteq X$, $x \in \bar{A}$ olsun. $x \in A' \iff \forall \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap A$ kesişiminin sonsuz olmasıdır.

İspat. $\Leftarrow$ yığılma noktası tanımından açıktır.

mmik ispat

*IR üzerinde
Kapalı - iç*

Sinarda

Soru : Her tek nokta karesi kapalı mıdır?
(1)

② $B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \varepsilon) = \emptyset$ bulunur mu? T_2 uzay mı

59

$\Rightarrow x \in A'$ olsun, çelişki yakalamak için bir $\varepsilon > 0$ için $B_d(x, \varepsilon) \cap A$ kesişiminin sonlu olduğunu farzedelim yani

$$B_d(x, \varepsilon) \cap A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

olsun.

$$F = \{a_1, \dots, a_n\} \setminus \{x\}$$

olmak üzere

$$U = B_d(x, \varepsilon) \setminus F = B_d(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{C}_X \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{x\}) \in \tau_d \cap \mathcal{N}_x$$

olsun. Bu durumda U açık ve $x \in U$ dur. Bu durumda $\exists \varepsilon^* > 0$: $B_d(x, \varepsilon^*) \subseteq U$ geçerlidir. Bu durumda $B_d(x, \varepsilon^*) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$ ve $B_d(x, \varepsilon^*) \cap A = \emptyset$ veya $B_d(x, \varepsilon^*) \cap A = \{x\}$ gerçekleşir. O halde $B_d(x, \varepsilon^*) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ geçerlidir. Bu ise yığılma noktası olma tanımını ile çelişir.

Teorem. (X, d) bir metrik uzay $A \subseteq X$ olsun. $x \in X$ ise $x \in \bar{A}$ olması için gkyk $U \subseteq X$ açık $x \in U$ için $U \cap A \neq \emptyset$ gerçekleşmesidir.

İspat. $x \in \bar{A}$, $U \in \tau_d$ ve $x \in U$ olsun. Eğer $x \in A$ ise $U \cap A \neq \emptyset$ geçerlidir. Eğer $x \in A'$ ise bir $\varepsilon > 0$, $B_d(x, \varepsilon) \subseteq U$ olacak şekilde seçelim. x, A nın yığılma noktası olduğundan $B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ve dolayısıyla $U \cap A \neq \emptyset$.

Tersine $U \subseteq X$ açık $x \in U$ iken $U \cap A \neq \emptyset$ olsun. Eğer $x \in A$ ise $A \subseteq \bar{A}$ olduğundan, $x \in \bar{A}$ dir. Eğer $x \notin A$ ise her bir $\varepsilon > 0$ için $B_d(x, \varepsilon)$, A ile kesişmeli fakat $x \notin A$ dir. Böylece $(B_d(x, \varepsilon) \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, dolayısıyla $x \in A'$ olur. O halde $x \in A \cup A' = \bar{A}$ gerçekleşir. $\square$

Önerme. (X, d) bir metrik uzayında $A \subseteq X$ için $\bar{A}$, A yı içeren en küçük kapalı kümedir.

~~İspat.~~ (X, d) bir metrik uzay $A \subseteq X$ olsun. $\bar{A}$ kümesinin kapalı küme olduğunu göstereceğiz. Gerçekten eğer $x \notin \bar{A}$ ise bir $B_d(x, \varepsilon)$ açık yuvarı $B_d(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ gerçekleşmek üzere vardır. Eğer $y \in B_d(x, \varepsilon)$ ise $B_d(x, \varepsilon)$ açık küme olduğundan $\exists \delta > 0: B_d(y, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$ gerçekleşir. O halde $B_d(y, \delta) \cap A = \emptyset$ dolayısıyla $y \notin \bar{A}$ geçerlidir. Sonuç olarak $B_d(y, \delta) \subseteq \mathbb{C}_X(\bar{A})$ ve dolayısıyla $\mathbb{C}_X(\bar{A})$ açık $\bar{A}$ kapalıdır.

Eğer $B, A \subseteq B$ gerçekleyen kapalı bir küme ise her bir $x \in \mathbb{C}_X B$ için, bir açık yuvar $B_d(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C}_X B$ gerçekleşmek üzere vardır. O halde $B_d(x, \varepsilon) \cap B = \emptyset \Rightarrow B_d(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$

geçerlidir. O halde $\mathbb{C}_X B$ nin hiç bir elemanı A nın kapanış noktası değildir. O halde $\bar{A} \subseteq B$ geçerlidir. $\square$

Sonuç. $\forall A \subset X$ için, A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul

$$A = \bar{A}$$

olmasıdır.

Önerme. (X, d) metrik uzay, $x \in X, \varepsilon > 0$ ise $\overline{B_d(x, \varepsilon)} \subseteq B_d[x, \varepsilon]$ geçerlidir.

A

İspat. $B_d[x, \varepsilon]$, $B_d(x, \varepsilon)$ yi kapsayan kapalı küme olduğundan sonuç açıktır.

Uyarı. $\overline{B_d(x, \varepsilon)} \neq B_d[x, \varepsilon]$ olabilir.

Örnek. $\mathbb{R}$ üzerinde ayırık metrik d gözönüne alınsın. $\overline{B_d(0, 1)} = \{0\} \neq \mathbb{R} = B_d[0, 1]$ geçerlidir.

Önerme. (X, d) bir metrik uzayında $A \subseteq X$ için

a) $\overset{\circ}{A} = \mathbb{C}_X \left(\overline{(\mathbb{C}_X A)} \right)$

b) $\overline{A} = \mathbb{C}_X \left((\mathbb{C}_X A)^\circ \right)$

geçerlidir.

İspat. a)

$$x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq A$$

$$\iff \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{C}_X A) = \emptyset$$

$$\iff x \notin \overline{(\mathbb{C}_X A)}$$

$$\iff x \in \mathbb{C}_X \left(\overline{(\mathbb{C}_X A)} \right)$$

bu da gösterilmesi gerekendir.

b) $\mathbb{C}_X \left(\overset{\circ}{B} \right) = \overline{(\mathbb{C}_X B)}$ ifadesini gözönüne alalım

$$B = \mathbb{C}_X A \Rightarrow \mathbb{C}_X \left((\mathbb{C}_X A)^\circ \right) = \overline{(\mathbb{C}_X [\mathbb{C}_X A])} = \overline{A}$$

□

B

11. Diğer Topolojik Kavramlar

Tanım. (X, d) bir *metrik uzay* ve $A \subseteq X$ olsun. Bir $x (\notin A)$ noktası, eğer $\exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$ gerçekleşiyorsa, A kümesinin dış noktası olarak isimlendirilir ve dış noktaların kümesi $Ext(A)$ ile gösterilir. Yani

$$Ext(A) = (\mathbb{C}_X A)^\circ$$

$$= \{x \in X \setminus A : \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A\}$$

geçerlidir.

Tanım. (X, d) bir *metrik uzay* ve $A \subseteq X$ olsun. $A \subseteq X$ alt kümesinin iç noktaları ve dış noktaları dışındaki diğer bütün noktalar sınır kümesi olarak isimlendirilir ve $\partial(A)$ ile gösterilir.

$$\partial(A) = \mathbb{C}_X [(\mathbb{C}_X A)^\circ \cup A^\circ]$$

$$= \{x : \forall \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \text{ ve } B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$$

gerçeklenir, ayrıca

$$\partial(A) = \mathbb{C}_X [(\mathbb{C}_X A)^\circ \cup A^\circ]$$

$$= [\mathbb{C}_X (\mathbb{C}_X A)^\circ \cap \mathbb{C}_X (A^\circ)]$$

$$= \overline{A} \cap \mathbb{C}_X (A^\circ) = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{C}_X (A)}$$

ile gerçekleşir

Örnek. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. Bu durumda $\partial\mathbb{Q}, \partial[0, 1], \partial((0, 1) \cup \{2\} \cup (3, 4))$ kümelerini belirleyiniz.

a) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ve $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ geçerli olduğundan

$$\partial(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

geçerlidir.

$$= \overline{A} \cap \mathbb{C}_X (A^\circ) = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{C}_X (A)}$$

b)

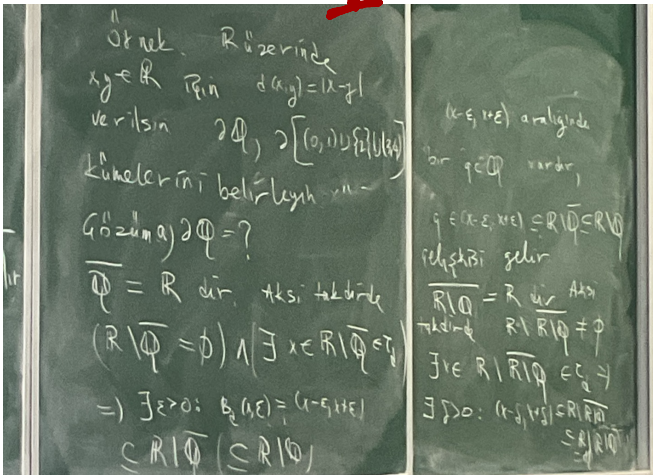
$$\partial[0, 1] = \overline{[0, 1]} \setminus [0, 1]^\circ = [0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\}$$

$$\overline{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \text{ dir.}$$

Ödev!

Aksi taktirde

$$\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} = \emptyset$$



c)

$$\partial[(0,1) \cup \{2\} \cup (3,4)] = \overline{[(0,1) \cup \{2\} \cup (3,4)]} \setminus [(0,1) \cup \{2\} \cup (3,4)]^\circ$$

$$= ([0,1] \cup \{2\} \cup [3,4]) \setminus [(0,1) \cup (3,4)] = \{0,1,2,3,4\}$$

Alıştırma. $(\partial A)^\circ = \emptyset$ olmak zorunda mıdır? (Yol gösterme: $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. Bu uzayda rasyonel sayılar kümesinin sınırını gözönüne alın).

$$A = \mathbb{Q} \implies \bar{A} = \mathbb{R}, \dot{A} = \emptyset, \partial A = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}. (\partial A)^\circ = \mathbb{R}$$

Alıştırma. (X, d) bir topolojik uzay, $A, B \subset X$ olsun. Sınır operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir, gösterin.

$$1) \dot{A} = A \setminus \partial A ?$$

$$A \setminus B = A \cap \mathbb{C}_X B$$

Soru: $A \subseteq B$ ise $\partial A \subseteq \partial B$ olmak zorunda mı?

$$B = \partial A \Rightarrow$$

$$? \quad A \setminus \partial A = A \cap \mathbb{C}_X \partial A = A \cap (\dot{A} \cup (\mathbb{C}_X A)^\circ)$$

$$= ((A \cap \dot{A}) \cup (A \cap (\mathbb{C}_X A)^\circ)) = \dot{A} \cup \emptyset = \dot{A}$$

Çözüm: $\mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ verilsin.

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \text{ onda } \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

$$\partial \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$$

$$\partial \mathbb{Q} \not\subseteq \partial \mathbb{R}$$

$$2) \bar{A} = A \cup \partial A ?$$

$$A \cup \partial(A) = A \cup (\bar{A} \cap \mathbb{C}_X A)$$

$$= ((A \cup \bar{A}) \cap (A \cup \mathbb{C}_X A)) = \bar{A} \cap X = \bar{A}$$

Soru: $A \subseteq B$ ise

$$3) \partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B) ?$$

$\partial B \subseteq \partial A$ olm. zorunda mı?

$$\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \cap \mathbb{C}_X(A \cup B) = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \mathbb{C}_X A \cap \mathbb{C}_X B$$

Ç: $d, \mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği dir.

$$\subset \left(\bar{A} \cap \left(\mathbb{C}_X A \cap \mathbb{C}_X B \right) \right) \cup \left(\bar{B} \cap \left(\mathbb{C}_X A \cap \mathbb{C}_X B \right) \right)$$

$$A = \mathbb{Q}^+, B = \mathbb{Q} \Rightarrow A \subseteq B$$

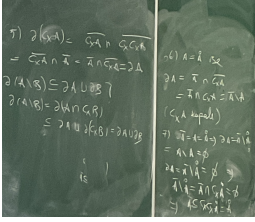
$$\partial A = [0, \infty), \partial B = \mathbb{R}$$

$$\partial B \not\subseteq \partial A$$

$$4) \partial(A \cap B) \subset \partial(A) \cup \partial(B) ?$$

$$\partial(A \cap B) = \overline{A \cap B} \cap \mathbb{C}_X(A \cap B) = \overline{A \cap B} \cap \mathbb{C}_X A \cap \mathbb{C}_X B$$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{A \cap B} \cap (\overline{C_X A} \cup \overline{C_X B}) \subseteq (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{C_X A} \cup \overline{C_X B}) \\
 &= ((\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{C_X A}) \cup ((\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{C_X B}) \\
 &\subseteq (\overline{A} \cap \overline{C_X A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C_X B}) = \partial(A) \cup \partial(B)
 \end{aligned}$$



5) $\partial A = \partial(C_X A)$?

$$\begin{aligned}
 \partial(C_X A) &= \overline{C_X A} \cap C_X \overline{C_X A} = \overline{C_X A} \cap \overline{A} = \overline{A} \cap \overline{C_X A} = \partial A \\
 6) A = \overset{\circ}{A} &\Rightarrow \partial A = \overline{A} \setminus A \\
 \partial A &= \overline{A} \cap \overline{C_X A} = \overline{A} \cap \overline{C_X A} = \overline{A} \cap C_X A = \overline{A} \setminus A
 \end{aligned}$$

$C_X A$ kapalı

7) $\partial A = \emptyset$ için gerek $\overline{A} = A = \overset{\circ}{A}$ olmasıdır?

$$\begin{aligned}
 \partial A &= \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = A \setminus A = \emptyset \\
 \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \emptyset &\Rightarrow \overline{A} \cap C_X \overset{\circ}{A} = \emptyset \Rightarrow \overline{A} \subseteq C_X C_X \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A} \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overset{\circ}{A} \\
 \overline{A} \subseteq \overset{\circ}{A} &\Rightarrow \overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq \overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A} \Rightarrow \overline{A} = A = \overset{\circ}{A}
 \end{aligned}$$

Ya da

$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \emptyset \Rightarrow X = C_X \overline{A} \cup \overset{\circ}{A}$ geçerlidir. Buradan hareketle

$$\overline{A} = \overline{A} \cap X = \overline{A} \cap (C_X \overline{A} \cup \overset{\circ}{A}) = \emptyset \cup (\overline{A} \cap \overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{A}$$

$$A = A \cap X = A \cap (C_X \overline{A} \cup \overset{\circ}{A}) = \emptyset \cup (A \cap \overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{A}$$

elde edilir. Sonuçta $\overline{A} = \overset{\circ}{A} = A$ geçerlidir.

8) $X \setminus \partial A = \overset{\circ}{A} \cup (C_X A)^\circ$?

$$\begin{aligned}
 X \setminus \partial A &= X \setminus (\overline{A} \cap \overline{C_X A}) = C_X \overline{A} \cup C_X (\overline{C_X A}) \\
 &= (C_X A)^\circ \cup \overset{\circ}{A}
 \end{aligned}$$

9) $\overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset$?

10) i) A kapalı $\iff \partial A \subseteq A$?

$$(\Rightarrow) A \text{ kapalı} \Rightarrow \partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = A \setminus \overset{\circ}{A} = A \cap C_X \overset{\circ}{A} \subseteq A \Rightarrow \partial A \subseteq A$$

$$(\Leftarrow) \partial A \subseteq A \Rightarrow \overline{A} = A \cup \partial A \stackrel{\partial A \subseteq A}{=} A$$

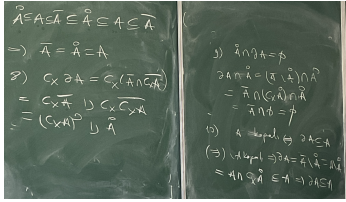
ii) i) A açık $\iff A \cap \partial A = \emptyset$?

$$(\Rightarrow) A \text{ açık} \Rightarrow C_X A \text{ kapalı}$$

$$\Rightarrow \partial(C_X A) \subseteq C_X A$$

$$\partial(A) = \partial(C_X A) \Rightarrow \partial(A) \subseteq C_X A$$

+ Bonus : $\partial(A \setminus B) \subseteq \partial A \cup \partial B$?
 $\partial(A \setminus B) = \partial(A \cap C_X B)$
 $\subseteq \partial A \cup \partial(C_X B)$
 $= \partial A \cup \partial B$



metrik metrik

Denk metrik olma

homotopik kavramı

Uzayda denk metrik olma kavramı

δ metrik ise

$$\frac{1}{x} \cdot d(x, y) \text{ gibi..}$$

uygun yarımetrik
seçilirse denk olur.

Sınırlar sorusu

Norm kavramı

Kapalılık - iç - dış

$$\Rightarrow A \cap \partial(A) \subseteq A \cap \mathbb{C}_X A = \emptyset$$

$$(\Leftrightarrow) A \cap \partial(A) = \emptyset \Rightarrow A \cap \partial A = A \cap (\overline{A} \setminus \mathring{A}) = A \setminus \mathring{A} = \emptyset \Rightarrow$$

$$(\mathring{A} \subseteq A) A \subseteq \mathring{A} \Rightarrow A = \mathring{A}$$

Örnek. $\partial\partial\partial A = \partial\partial A$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{C}_X A}$ ve $\partial A = \overline{\partial A}$

$$\partial\partial A = \overline{\partial A} \cap \overline{\mathbb{C}_X \partial A} = \partial A \cap \overline{\mathbb{C}_X \partial A}$$

$$\partial\partial\partial A = \overline{\partial\partial A} \cap \overline{\mathbb{C}_X \partial\partial A}$$

$$= \partial\partial A \cap \overline{\mathbb{C}_X (\partial A \cap \overline{\mathbb{C}_X \partial A})}$$

$$= \partial\partial A \cap \overline{(\mathbb{C}_X \partial A \cup \mathbb{C}_X \overline{\mathbb{C}_X \partial A})}$$

$$= \partial\partial A \cap (\overline{\mathbb{C}_X (\partial A)} \cup \overline{\mathbb{C}_X \overline{\mathbb{C}_X \partial A}})$$

$$= \partial\partial A \cap (\mathbb{C}_X (\partial A)^\circ \cup \overline{(\partial A)^\circ})$$

$$= \partial\partial A \cap X = \partial\partial A$$

Alıştırma: $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. $A = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cup (1, 2)$ için $\partial\partial A = \partial A$ eşitliği geçerli midir?

$$\overline{A} = \overline{([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cup (1, 2)} = \overline{([0, 1] \cap \mathbb{Q})} \cup \overline{(1, 2)} = [0, 1] \cup [1, 2] = [0, 2]$$

$$\mathring{A} = (([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cup (1, 2))^\circ = (1, 2)$$

$$\partial A = [0, 2] \setminus (1, 2) = [0, 1] \cup \{2\}$$

$$\partial\partial A = \overline{([0, 1] \cup \{2\})} \setminus ([0, 1] \cup \{2\})^\circ$$

$$= ([0, 1] \cup \{2\}) \setminus (0, 1) = \{0, 1, 2\} \neq \partial A$$

Örnek. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. $A = \mathbb{N}$ için her $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ için $x \in (-\infty, 1)$ veya $x \in [1, \infty) \setminus \mathbb{N}$ geçerlidir. $x \in (-\infty, 1)$ ise $\varepsilon = \frac{|1-x|}{3}$ için

$B_d(x, \varepsilon) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, $x \in [1, \infty) \setminus \mathbb{N}$ için $\exists n \in \mathbb{N} : n < x < n + 1$, $\varepsilon = \frac{1}{3} \min \{x - n, n + 1 - x\} \Rightarrow B_d(x, \varepsilon) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ geçerlidir. $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ dir.

$n \in \mathbb{N}$ için $0 < \varepsilon < 1$ ise $(n - \varepsilon, n + \varepsilon) \cap \mathbb{N} = \{n\}$ yani $\mathbb{N}$ nin her elemanı izole noktadır.

Örnek. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın.

a) $A = \mathbb{Q}$ için $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir. $x \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olsun $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ sonsuz sayıda rasyonel sayı içerir dolayısıyla

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

geçerlidir. O halde her $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ nun yığılma noktasıdır.

b) $A = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$ olsun. Bu durumda $\overline{A} = A \cup \{0\}$ geçerlidir. $\forall \varepsilon > 0$, $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap A$ sonsuz bir kümedir. Dolayısıyla 0 yığılma noktasıdır.

$$x = \frac{1}{n} \text{ ise}$$

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right\}$$

için

$$\left(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon \right) \cap A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

gerçeklenir, yani her bir $x = \frac{1}{n}$ izole noktadır.

Uyarı. (X, d) bir metrik uzay $A \subseteq X$ olsun. $A' = \{x \in \overline{A} : x \text{ bir yığılma noktası}\}$ olduğundan $\overline{A} = A \cup A'$ geçerlidir. O halde A kapalıdır $\iff A' \subseteq A$

Tanım. $A = A'$ ise A mükemmel küme olarak isimlendirilir.

Eğer her $x \in A$ izole nokta ise A ya ayrık küme denir.

Örnek. $A = [0, 1]$ mükemmel kümedir.

Örnek. $A = \mathbb{N}$ veya $A = \mathbb{Z}$ ayrıktır. Her sonlu küme ayrıktır.

Örnek. $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, 3, \dots\}$ ise Bu durumda $\overline{A} = A \cup \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{0\}$, $A' = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{0\}$, $A'' = \{0\}$, $A''' = \emptyset$ geçerlidir.

Tanım. (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer $D \subseteq X$ ve $\overline{D} = X$ ise, D kümesi X de yoğunur, denir.

Örnek. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. Bu durumda $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ve $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ geçerlidir. Yani $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğunur.

$\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$ farzedelim. $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} (\in \tau_d) : B_d(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gerçekleşir, bu ise $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ çelişkisini verir, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Herhangi iki reel sayı arasında daima bir rasyonel sayı seçilebilir.

Teorem. (X, d) bir metrik uzay $D \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

a) $\overline{D} = X$

b) $\forall U \in \tau_d \setminus \{\emptyset\}$ için $U \cap D \neq \emptyset$

c) $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0$ için $B_d(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ geçerlidir.

İspat. b) $\Rightarrow$ a) $\overline{D} \neq X$ farzedelim. Bu durumda $X \setminus \overline{D} \neq \emptyset \wedge X \setminus \overline{D} \in \tau_d \Rightarrow (X \setminus \overline{D}) \cap D = \emptyset$. Çelişki.

a) $\Rightarrow$ b) $\overline{D} = X$ olsun. $\exists U \in \tau_d \setminus \{\emptyset\}$ için $U \cap D = \emptyset$ farzedelim.

$$U \cap D = \emptyset \Rightarrow D \subseteq X \setminus U (\neq X)$$

$$\Rightarrow (X =) \overline{D} \subseteq \overline{X \setminus U} = X \setminus U (\subsetneq X) \text{ Çelişki!}$$

$$\forall U \in \tau_d \setminus \{\emptyset\}, U \cap D \neq \emptyset$$

Ya da kapamış karakterizasyonundan, $x \in \overline{D} = X$ olması için gyk, $\forall \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ olmasıdır. $U \in \tau_d \setminus \{\emptyset\}$ için $U = \bigcup_{x \in U} B_d(x, \varepsilon_x)$ ve

$$U \cap D = \left(\bigcup_{x \in U} B_d(x, \varepsilon_x) \right) \cap D = \bigcup_{x \in U} \underbrace{(B_d(x, \varepsilon_x) \cap D)}_{\neq \emptyset} \neq \emptyset$$

b) $\Rightarrow$ c) $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0$ için $B_d(x, \varepsilon) \in \tau_d \setminus \{\emptyset\}$ olduğundan açıktır.

c) $\Rightarrow$ a) Kapanmış karakterizasyonundan açıktır. $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0$ için $B_d(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{D}$ ve $\overline{D} = X$ gerçekleşir.

Tanım. Bir (X, d) metrik uzayı sayılabilir **bir** $D (\subseteq X)$ alt kümesi $\overline{D} = X$ gerçekleşmek üzere varsa ayrılabilir uzay olarak adlandırılır.

Önerme. (X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ olsun. $x, y \in X$ için

$$|dist(x, A) - dist(y, A)| \leq d(x, y)$$

geçerlidir.

İspat. $A \neq \emptyset$ farzedelim. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists z \in A : d(y, z) < dist(y, A) + \varepsilon$ gerçekleşir. Böylece

$$dist(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + dist(y, A) + \varepsilon$$

ve

$$dist(x, A) - dist(y, A) < d(x, y) + \varepsilon$$

gerçeklenir. ε keyfi olduğundan

$$dist(x, A) - dist(y, A) \leq d(x, y)$$

gerçeklenir ve kabullerin simetrisinden aynı zamanda

$$dist(y, A) - dist(x, A) \leq d(x, y)$$

geçerlidir.

Alıştırma. (X, d) metrik uzay, $\emptyset \neq A \subset X$, $x \in X$ için

$$dist(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

ile tanımlandığını biliyoruz.

a) $dist(x, A) = dist(\{x\}, A)$ vardır, gösteriniz?

b) $dist(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$

geçerlidir, gösterin. Bu bilgiden hareketle metrik uzaylarda tek nokta kümesi kapalıdır, gösterin?

c) $dist(x, A) = dist(x, \overline{A})$

İspat. a) $\{d(x, a) : a \in A\} \neq \emptyset$ ($d(a, a) = 0 \in \{d(x, a) : a \in A\} \neq \emptyset$) Aynı zamanda $\forall a \in A$ için $d(x, a) \geq 0$ olduğundan $dist(x, A)$ vardır.

b) $\varepsilon > 0$ ve $B_d(x, \varepsilon)$ x merkezli ve $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık yuvar olsun. Bu durumda en büyük alt sınır özelliği kullanılarak

$$x \in \overline{A} \iff \forall \varepsilon > 0, B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A : d(x, a_\varepsilon) < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A : 0 \leq d(x, a_\varepsilon) < \varepsilon + 0$$

$$\iff \left(\inf_{a \in A} d(x, a) = 0 \right) dist(x, A) = 0$$

elde edilir.

Hatırlatma: i) $p = \inf(A) \iff (p \text{ alt sınırdır}) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A, a_\varepsilon < p + \varepsilon)$

ii) $p = \sup(A) \iff (p \text{ üst sınırdır}) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A, a_\varepsilon > p - \varepsilon)$
 $a \in X$ için $\{x \in X : d(x, \{a\}) = 0\} = \{a\}$ yani $\{a\}$ kapalıdır.

c)

$$A \subseteq \overline{A} \Rightarrow dist(x, A) \geq dist(x, \overline{A})(*)$$

geçerlidir.

Yine her $a \in A$ ve her $b \in \overline{A}$ için

$$dist(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, b) + \underline{d(b, a)}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\text{dist}(x, A) \leq d(x, b) + \text{dist}(b, A)$$

gerçeklenir, fakat $b \in \overline{A}$ olduğundan $\text{dist}(b, A) = 0$ dır, ve böylece

$$\text{dist}(x, A) \leq d(x, b), \forall b \in \overline{A}$$

geçerlidir. $b \in \overline{A}$ üzerinden tekrar infimum alınırsa

$$\text{dist}(x, A) \leq \text{dist}(x, \overline{A}) (**)$$

eşitsizliği elde edilir.

Alıştırma. (X, d) bir metrik uzay olsun. $A \subseteq X$ alt kümesinin kapalı olması için gk her $x \in X \setminus A$ için

$$(e\text{bas } \{d(x, a) : a \in A\} =) \text{dist}(x, A) \neq 0$$

gerçeklenmesidir.

Çözüm. A kapalı olsun, $X \setminus A$ açıktır. Böylece her bir $x \in X \setminus A$ için $\exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$ gerçekleşir. Bu durumda $\text{dist}(x, A) \geq \varepsilon$ ve $\text{dist}(x, A) \neq 0$ geçerlidir.

Her $x \in X \setminus A$ için $\text{dist}(x, A) \neq 0$ olsun. $\varepsilon = \text{dist}(x, A)$ için $B_d(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$ gerçekleşir, yani $X \setminus A$ açık, A kapalıdır, çünkü $A = X \setminus (X \setminus A)$ geçerlidir.

12. Diziler

Tanım. (X, d) metrik uzayında bir (x_n) dizisine $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ ise veya $\varepsilon > 0$ verildiğinde bir $N (= N(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq N \text{ için } d(x_n, x) < \varepsilon$$

gerçeklenmek üzere varsa $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x$, yani dizi $x \in X$ noktasına yakınsar, denir.

Denk olarak (X, d) metrik uzayında bir (x_n) dizisine, $\forall \varepsilon > 0, \exists N (= N(\varepsilon)) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in B_d(x, \varepsilon)$ gerçekliyorsay $x \in X$ noktasına yakınsar denir, $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x$ ya da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ yazılır.

Lemma. Bir (X, d) metrik uzayında yakınsak (x_n) dizisi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilen tek bir noktaya yakınsar.

İspat. $x_n \rightarrow x$ ve $x_n \rightarrow y, x \neq y$ farzedelim. Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ için, N_1 ve N_2 doğal sayıları

$$\forall n \geq N_1 \text{ için } d(x_n, x) < \varepsilon/2 \text{ ve } \forall n \geq N_2 \text{ için } d(x_n, y) < \varepsilon/2$$

olacak şekilde bulunabilir. $N = \max(N_1, N_2)$ alınırsa $\forall n \geq N$ için

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan, $d(x, y) = 0$ ve $x = y$ dir.

Ya da $x, y \in X, x \neq y$ için $\exists B_d(x, \varepsilon), B_d(y, \varepsilon) : B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \varepsilon) = \emptyset$ gerçekleşir.

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 \Rightarrow x_n \in B_d(x, \varepsilon)$$

$$x_n \rightarrow y \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2 \Rightarrow x_n \in B_d(y, \varepsilon)$$

$N = \max(N_1, N_2)$ alınırsa $\forall n \geq N$ için $x_n \in B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \varepsilon) = \emptyset$ çelişkisi elde edilir. $\square$

Teorem. (X, d) bir metrik uzay $A \subseteq X$ olsun.

a) $x \in X$ noktasının $\overline{A}$ kümesine ait olması için gerek $\exists \{x_n\} \subseteq A : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gerçekleşmesidir.

$$\text{b) } A \text{ kapalıdır} \iff \forall x_n \in A : (x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in A)$$

c) Ayrıca $x \in A'$ için gerek $\exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gerçekleşmesidir.

İspat. a) $(\Rightarrow)$ $x \in \overline{A}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0, B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}, B_d(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ geçerlidir. Bu son arakesit ne bağlı en az bir nokta içerir, bu noktaya x_n diyelim. O halde her bir n için $x_n \in B_d(x, \frac{1}{n})$ ve $x_n \in A$ dır. Sonuçta

$$\forall n \in \mathbb{N} : (0 < \frac{1}{n}) d(x, x_n) < \frac{1}{n}$$

ve limit durumunda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ geçerlidir.

$(\Leftarrow) x \in X, \exists \{x_n\} \subseteq A : x_n \rightarrow x$ gerçeklensin. $\forall \varepsilon > 0, B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ gerçeklendiğini göstereceğiz. $\varepsilon > 0$ için $\{x_n\}$ yakınsak olduğundan $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$ için $d(x, x_n) < \varepsilon$ gerçekenir. O halde $\forall n \geq N$ için $x_n \in B_d(x, \varepsilon)$ geçerlidir. Dolayısıyla $B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ veya $x \in \overline{A}$ geçerlidir.

b) $(\Leftarrow) A \subseteq \overline{A}$ her zaman doğru olduğundan $\overline{A} \subseteq A$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x \in \overline{A}$ olsun. (a) şikkından $\exists \{x_n\} \subseteq A : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ geçerlidir. Hipotezden A daki bütün yakınsak diziler A da bir noktaya yakınsadığından $x \in A$ ve $\overline{A} \subseteq A$ geçerlidir.

$(\Rightarrow) A$ kapalı yani $\overline{A} = A$ olsun. $\{x_n\} \subseteq A : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ olsun. (a) dan $x \in \overline{A}$ ve $A = \overline{A}$ olduğundan $x \in A$ dır.

c) $x \in A'$ olsun. $x_1 \in A$, $x_1 \in (B_d(x, 1) \setminus \{x\}) \cap A$ olmak üzere seçilsin, bunu yapabiliriz çünkü $x \in A'$ olduğundan $x_1 \in (B_d(x, 1) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ geçerlidir. Bu şekilde devam ederek $x_1, \dots, x_n \in A \setminus \{x\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ için $x_i \in (B_d(x, \frac{1}{i}) \setminus \{x\}) \cap A$ olmak üzere seçilebilir. $(B_d(x, \frac{1}{n+1}) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $x_{n+1} \in (B_d(x, \frac{1}{n+1}) \setminus \{x\}) \cap A$ seçerek devam edebiliriz. Bu durumda $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$ elde edilir.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Arşimet özelliğinden $\exists N \in \mathbb{N} : N > \frac{1}{\varepsilon} (\Rightarrow \frac{1}{N} < \varepsilon)$ ve bu durumda $\forall n \geq N \wedge (\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon) \Rightarrow x_n \in B_d(x, \frac{1}{n}) \subseteq B_d(x, \varepsilon) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Tersine $\exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gerçeklensin. Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in B_d(x, \varepsilon) \Rightarrow (B_d(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \square$

13. Metrik Alt Uzay

Tanım. (X, d) bir metrik uzay, $Y \subseteq X$ olsun. $\forall x, y \in Y$ için $d_Y(x, y) = d(x, y)$ ile tanımlı $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Y üzerinde bir metriktir. d_Y metriği $Y (\subseteq X)$ üzerinde d metriğinin ürettiği metrik yada relatif metrik olarak isimlendirilir. (Y, d_Y) uzayı (X, d) metrik uzayının metrik alt uzayı olarak isimlendirilir.

Örnek. $[0, 1]$, $(0, 1)$, $[0, 1)$ ve $\mathbb{Q}$, $(\mathbb{R}, |.|)$ standart metrik uzayının alt uzaylarıdır. $(\mathbb{R}, |.|)$ metrik uzayının kendisi de $(\mathbb{C}, |.|_{\mathbb{C}})$ uzayının alt uzayıdır. $\mathbb{R}$ ise $\mathbb{R}^2$ metrik uzayının alt uzayıdır. $[a, b]$ üzerinde tanımlı polinomların kümesi de $\mathcal{C}[a, b]$ üzerinde uniform metriğin alt uzayıdır.

Uyarı. Eğer Y bir X metrik uzayının alt uzayı ise Y de açık (sırasıyla kapalı) bir alt küme X de açık (sırasıyla kapalı) olmak zorunda değildir.

Örnek. $Y, (\mathbb{R}, |.|)$ metrik uzayının alt uzayı olsun.

a) $Y = [0, 1]$ ise $(0, \frac{1}{2}]$ Y de açıktır ama $\mathbb{R}$ de açık değildir.

b) $Y = (0, 1)$ ise $[\frac{1}{2}, 1)$ Y de kapalıdır ama $\mathbb{R}$ de kapalı değildir.

Lemma. (X, d) bir metrik uzay, (Y, d_Y) altuzayı olsun. $p \in Y$, $\varepsilon > 0$ ise $B_d(p, \varepsilon)$ (X, d) uzayında açık yuvar, $B_{d_Y}(p, \varepsilon)$ (Y, d_Y) alt uzayında açık yuvar olmak üzere

$$B_{d_Y}(p, \varepsilon) = B_d(p, \varepsilon) \cap Y$$

geçerlidir.

İspat.

$$B_d(p, \varepsilon) \cap Y = \{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\} \cap Y$$

$$\stackrel{Y \subseteq X}{=} \{x \in Y : d(x, p) < \varepsilon\}$$

$$= B_{d_Y}(p, \varepsilon)$$

Önerme. (X, d) bir metrik uzay, (Y, d_Y) altuzayı olsun. $p \in Y$ ve $\varepsilon > 0$ ise

a) $G (\subseteq Y)$ alt kümesinin (Y, d_Y) alt uzayında açık olması için gyk (X, d) de açık bir H kümesinin $G = Y \cap H$ gerçekleşmek üzere var olmasıdır.

b) $A (\subseteq Y)$ alt kümesinin (Y, d_Y) alt uzayında kapalı olması için gyk (X, d) de kapalı bir F kümesinin $A = Y \cap F$ gerçekleşmek üzere var olmasıdır.

İspat. a) (X, d) metrik uzayında ve (Y, d_Y) metrik alt uzayında x merkezli $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık yuvarlar sırasıyla $B_d(x, \varepsilon)$ ve $B_{d_Y}(x, \varepsilon)$ ile gösterilsin. G, Y de açık olsun, bu durumda Y deki açık yuvarların bir birleşimi olarak yazılabilir, o halde $x \in G$ olmak üzere uygun $\varepsilon_x > 0$

sayıları aracılığıyla $G = \bigcup_{x \in G} B_{d_Y}(x, \varepsilon_x)$ yazılabilir. Lemmadan her bir $B_{d_Y}(x, \varepsilon_x)$ açık yuvarı için

$$B_{d_Y}(x, \varepsilon_x) = B_d(x, \varepsilon_x) \cap Y,$$

geçerlidir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} G &= \bigcup_{x \in G} B_{d_Y}(x, \varepsilon_x) = \bigcup_{x \in G} (B_d(x, \varepsilon_x) \cap Y) \\ &= \left(\bigcup_{x \in G} B_d(x, \varepsilon_x) \right) \cap Y \end{aligned}$$

$$H = \bigcup_{x \in G} B_d(x, \varepsilon_x) \text{ } (X, d) \text{ de açıktır.}$$

Tersine $G = Y \cap H$ ve $H, (X, d)$ de açık olsun. G nin (Y, d_Y) de açık olduğunu göstermeliyiz. $x \in G$ olsun. Bu durumda $x \in Y$ ve $x \in H$ dir. $H, (X, d)$ de açık olduğundan bir $\varepsilon > 0$, $B_d(x, \varepsilon) \subseteq H$ gerçekleşmek üzere vardır. $B_{d_Y}(x, \varepsilon_x) = B_d(x, \varepsilon) \cap Y \subseteq H \cap Y = G$ gerçekleşir. $G, (Y, d_Y)$ de açıktır.

b) $A (\subseteq Y)$ alt kümesinin (Y, d_Y) alt uzayında kapalıdır $\iff Y \setminus A$ (Y, d_Y) alt uzayında açıktır.

$$\iff Y \setminus A = H \cap Y : H, (X, d) \text{ üst uzayında açıktır.}$$

$$\iff A = Y \setminus (H \cap Y)$$

$$\iff A = Y \cap \mathbb{C}_X(H \cap Y) = Y \cap (\mathbb{C}_X H \cup \mathbb{C}_X Y) = (Y \cap \mathbb{C}_X H) \cup (Y \cap \mathbb{C}_X Y) = (Y \cap \mathbb{C}_X H).$$

$$\begin{aligned} (F = \mathbb{C}_X H) \\ \iff A = Y \cap F \text{ (Burada } F = \mathbb{C}_X H \text{ } X \text{ de kapalıdır.)} \end{aligned}$$

Sonuç. a) $(Y, d_Y), (X, d)$ metrik uzayının alt uzayı ve $A \subseteq Y$ olsun.

a) A, Y de açık ve Y de X de açık ise A da X de açıktır.

b) A, Y de kapalı ve Y de X de kapalı ise A da X de kapalıdır.

Teorem. $(Y, d_Y), (X, d)$ metrik uzayının alt uzayı ve $A \subseteq Y$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:

a) $x \in Y$ noktasının (Y, d_Y) , de $A (\subseteq Y)$ alt kümesinin limit noktası olması için gyk x noktasının A nın (X, d) deki limit noktası olmasıdır.

b) $A (\subseteq Y)$ alt kümesinin (Y, d_Y) deki kapanışı $\overline{A}^Y$, $\overline{A}$ A nın X deki kapanışı olmak üzere $\overline{A} \cap Y$ ye eşittir, yani $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$ geçerlidir.

İspat.

a) $(A)^Y = Y \cap A'$?

$x \in (A)^Y$, $B_d(x, \varepsilon)$ (X, d) de x noktasını içeren keyfi bir açık yuvar olsun. $x \in B_d(x, \varepsilon) \cap Y$ ve $B_d(x, \varepsilon) \cap Y (= B_{d_Y}(x, \varepsilon))$, Y alt metrik

uzayında açıktır

$$\begin{aligned}\emptyset &\neq (B_d(x, \varepsilon) \cap Y) \cap (A - \{x\}) \\ &\Rightarrow B_d(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow x \in A' \cap Y\end{aligned}$$

$x \in A' \cap Y$ alalım. x i içeren $B_{d_Y}(x, \varepsilon) (\subseteq Y)$ açık yuvarı göz önüne alalım. Bu durumda $B_{d_Y}(x, \varepsilon) = B_d(x, \varepsilon) \cap Y$ olacak şekilde $B_d(x, \varepsilon)$ açık yuvarı vardır. Hipotezden $B_d(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$. $A \subseteq Y$ ve

$$\begin{aligned}B_d(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \cap Y &= B_{d_Y}(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow B_{d_Y}(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset\end{aligned}$$

ve $x \in (A)^Y$.

b) $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$?

$\overline{A}^Y$, Y de kapalı olduğundan X de kapalı bir F kümesi ($A \subseteq F$) $\overline{A}^Y = F \cap Y$ ($\subseteq F$) gerçekleşmek üzere vardır. $A \subseteq F \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{F} = F \Rightarrow \overline{A} \cap Y \subseteq F \cap Y = \overline{A}^Y$

Sonuçta $\overline{A} \cap Y \subseteq \overline{A}^Y$ (1) kapsamı geçerlidir. $\overline{A} \cap Y$, Y alt uzayında A yı kapsayan kapalı küme olduğundan $\overline{A}^Y \subseteq \overline{A} \cap Y$ (2) kapsamı da geçerlidir. (1) ve (2) den $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$ gerçekleşir.

14. Metrik Çarpım Uzayları

X ve Y boştan farklı birer küme olsun. X ve Y nin $X \times Y$ ile gösterilen kartezyen çarpımı $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ ile tanımlanır.

(X, d_X) ve (Y, d_Y) birer metrik uzay ise $X \times Y$ üzerinde bir $d_{X \times Y}$ metriği tanımlanabilir.

Örnek. (X, d_X) ve (Y, d_Y) birer metrik uzay ise $i \in \{1, 2\}$ için $x_i \in X, y_i \in Y$ olmak üzere $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ için

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max \{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

ile tanımlı $d_{X \times Y} : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$ metriktir?

Çözüm.

i) $d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0 \Leftrightarrow \max \{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} = 0 \Leftrightarrow d_X(x_1, x_2) = d_Y(y_1, y_2) = 0$

geçerlidir, d_X ve X üzerinde, d_Y ve Y üzerinde metrik olduğundan $d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

geçerlidir.

ii) d_X ve d_Y simetrik olduğundan $d_{X \times Y}$ de simetriktir.

$$\begin{aligned} d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max \{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} \\ &= \max \{d_X(x_2, x_1), d_Y(y_2, y_1)\} = d_{X \times Y}((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \end{aligned}$$

iii) $i \in \{1, 2, 3\}$ için $x_i \in X, y_i \in Y$ olmak üzere $d_X(x_1, x_2) \leq d_X(x_1, x_3) + d_X(x_3, x_2)$ ve

$$d_Y(y_1, y_2) \leq d_Y(y_1, y_3) + d_Y(y_3, y_2)$$

geçerli olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max \{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} \\ &\leq \max \{d_X(x_1, x_3) + d_X(x_3, x_2), d_Y(y_1, y_3) + d_Y(y_3, y_2)\} \leq \\ &\max \{d_X(x_1, x_3), d_Y(y_1, y_3)\} + \max \{d_X(x_3, x_2), d_Y(y_3, y_2)\} \\ &= d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d_{X \times Y}((x_3, y_3), (x_2, y_2)) \end{aligned}$$

Uyarı. (X, d_X) ve (Y, d_Y) birer metrik uzay ise $X \times Y$ üzerinde yukarıda verilen $d_{X \times Y}$ metriği, d_X ve d_Y metriklerinin çarpım metriği olarak isimlendirilir. Ayrıca (X, d_X) ve (Y, d_Y) birer metrik uzay ise $X \times Y$ üzerinde farklı metrikler tanımlanabilir:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y \text{ için}$$

$$d^*((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \left[(d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_2))^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$d^{**}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

fonksiyonları da $X \times Y$ üzerinde birer metriktir. Her iki fonksiyonunda metrik olduğunu göstermek alıştırmaya bırakılmıştır.

Teorem. $X \times Y$ üzerinde $d_{X \times Y}$, d^* ve d^{**} denk metriklerdir.

İspat. $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ için

$$(d^*((x_1, y_1), (x_2, y_2)))^2 = (d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_2))^2$$

$$\leq 2(d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^*((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \sqrt{2}d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

$$d_X(x_1, x_2) \leq \left[(d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_2))^2 \right]^{\frac{1}{2}} = d^*((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \wedge$$

$$d_Y(y_1, y_2) \leq \left[(d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_2))^2 \right]^{\frac{1}{2}} = d^*((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

$$\Rightarrow \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} \leq d^*((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

$$\Rightarrow d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d^*((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \sqrt{2}d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

ve

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

$$\leq d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) = d^{**}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

$$d^{**}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

$$\leq \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} + \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

$$\Rightarrow d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d^{**}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq 2.d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

gerçeklendiğinden bu metrikler denk metriklerdir.

Teorem. (X, d_X) ve (Y, d_Y) birer metrik uzay olsun. Bir G kümesinin $(X \times Y, d_{X \times Y})$ çarpım uzayında açık olması için gerek $G_1 (X, d_X)$ de açık, $G_2 (Y, d_Y)$ de açık olmak üzere $G = G_1 \times G_2$ olmasıdır.

İspat. G , $X \times Y$ de açık olsun. Bu durumda

$$G = \bigcup_{(x,y) \in G} B_{d_{X \times Y}}((x,y), \varepsilon)$$

gerçeklenir. $(x', y') \in B_{d_{X \times Y}}((x,y), \varepsilon)$ için

$$d_{X \times Y}((x,y), (x', y')) = \max \{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (d_X(x, x') < \varepsilon) \wedge (d_Y(y, y') < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow (x' \in B_{d_X}(x, \varepsilon)) \wedge (y' \in B_{d_Y}(y, \varepsilon))$$

yani $B_{d_{X \times Y}}((x,y), \varepsilon) \subseteq B_{d_X}(x, \varepsilon) \times B_{d_Y}(y, \varepsilon)$ geçerlidir.

$$(a, b) \in B_{d_X}(x, \varepsilon) \times B_{d_Y}(y, \varepsilon) \Rightarrow a \in B_{d_X}(x, \varepsilon) \wedge b \in B_{d_Y}(y, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow (d_X(x, a) < \varepsilon) \wedge (d_Y(y, b) < \varepsilon) \Rightarrow \max \{d_X(x, a), d_Y(y, b)\} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow B_{d_X}(x, \varepsilon) \times B_{d_Y}(y, \varepsilon) \subseteq B_{d_{X \times Y}}((x,y), \varepsilon)$$

Dolayısıyla $B_{d_{X \times Y}}((x,y), \varepsilon) = B_{d_X}(x, \varepsilon) \times B_{d_Y}(y, \varepsilon)$ geçerlidir. Dolayısıyla

$$G = \bigcup_{(x,y) \in G} B_{d_{X \times Y}}((x,y), \varepsilon) = \bigcup_{(x,y) \in G} B_{d_X}(x, \varepsilon) \times B_{d_Y}(y, \varepsilon)$$

$$= \left(\bigcup_x B_{d_X}(x, \varepsilon) \right) \times \left(\bigcup_y B_{d_Y}(y, \varepsilon) \right)$$

$$G_1 = \bigcup_x B_{d_X}(x, \varepsilon) \in \tau_{d_X} \text{ ve } G_2 = \bigcup_y B_{d_Y}(y, \varepsilon) \in \tau_{d_Y} \text{ için } G =$$

$G_1 \times G_2$ gerçekleşir.

Tersine $G_1 (X, d_X)$ de açık, $G_2 (Y, d_Y)$ de açık olmak üzere $G = G_1 \times G_2 \subseteq X \times Y$ olsun. $(x, y) \in G$ olsun. Bu durumda $x \in G_1$ ve $y \in G_2$ dir. $G_1 (X, d_X)$ de açık, $G_2 (Y, d_Y)$ de açık olduğundan $\varepsilon_x > 0$ ve $\varepsilon_y > 0$, $B_{d_X}(x, \varepsilon_x) \subseteq G_1$ ve $B_{d_Y}(y, \varepsilon_y) \subseteq G_2$ gerçekleşmek üzere vardır. $\varepsilon = \min \{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}$ gözönüne alalım. Bu durumda

$$B_{d_{X \times Y}}((x,y), \varepsilon) = B_{d_X}(x, \varepsilon) \times B_{d_Y}(y, \varepsilon) \subseteq G_1 \times G_2 = G$$

gerçeklenir, yani G açıktır.

Alıştırma. Her bir $i \in \mathbb{N}$ için X_i üzerinde d_i metriği gözönüne alınsın. Her bir $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ çifti için

$d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$ ile tanımlanan d fonksiyonu da $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ üzerinde bir metriktir?

Çözüm. i) Her bir $i \in \mathbb{N}$ için d_i , X_i üzerinde metrik olduğu için $d_i(x_i, y_i) \geq 0 \Rightarrow d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)} \geq 0$ geçerlidir.

ii)

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(y_i, x_i)}{1 + d_i(y_i, x_i)} = d((y_i)_{i \in \mathbb{N}}, (x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = d(y, x) \end{aligned}$$

iii) $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ için

$$d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)} = 0 \iff \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)} = 0 (\forall i \in \mathbb{N})$$

$$\iff d_i(x_i, y_i) = 0 (\forall i \in \mathbb{N}) \iff x_i = y_i (\forall i \in \mathbb{N}) \iff x = y$$

iv) $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}, z = (z_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ olmak üzere her bir $i \in \mathbb{N}$ için $d_i(x_i, z_i) \leq d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)$ geçerli olduğundan

$$\begin{aligned} &d(x, y) + d(y, z) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \left[\frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)} + \frac{d_i(y_i, z_i)}{1 + d_i(y_i, z_i)} \right] \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \left\{ \left[1 - \frac{1}{1 + d_i(x_i, y_i)} \right] + \left[1 - \frac{1}{1 + d_i(y_i, z_i)} \right] \right\} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \left\{ 2 - \left[\frac{2 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i) + d_i(x_i, y_i) \cdot d_i(y_i, z_i)} \right] \right\} \\ &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \left\{ 2 - \left[\frac{2 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in N} \frac{1}{2^i} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)} \right] \right\} \\
&\geq \sum_{i \in N} \frac{1}{2^i} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{1 + d_i(x_i, z_i)} \right] \right\} \\
&= \sum_{i \in N} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, z_i)}{1 + d_i(x_i, z_i)} = d(x, z)
\end{aligned}$$

Burada

$$1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i) + d_i(x_i, y_i) \cdot d_i(y_i, z_i) \geq 1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{2 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)} &\geq \frac{2 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i) + d_i(x_i, y_i) \cdot d_i(y_i, z_i)} \\
\Rightarrow 1 - \left[\frac{1}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)} \right] &= \frac{d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)} \\
&= \frac{2(1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)) - (2 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i))}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)} \\
&= 2 - \frac{2 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)} \leq 2 - \frac{2 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i) + d_i(x_i, y_i) \cdot d_i(y_i, z_i)} \\
&\text{ve}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_i(x_i, z_i) \leq d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i) &\Rightarrow 1 + d_i(x_i, z_i) \leq 1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i) \\
\Rightarrow \frac{1}{1 + d_i(x_i, z_i)} &\geq \frac{1}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)} \\
\Rightarrow -\frac{1}{1 + d_i(x_i, z_i)} &\leq -\frac{1}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)} \\
\Rightarrow 1 - \frac{1}{1 + d_i(x_i, z_i)} &\leq 1 - \frac{1}{1 + d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri kullanıldı.

15. Taban Kavramı

Tanım: (X, d) bir *metrik uzay* olsun. $\mathcal{B} \subseteq \tau_d$ ailesi $\forall G \in \tau_d$ için $\exists \mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B} : G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_G} B$ gerçekleşiyorsa, (X, d) *metrik uzayının açık kümeleri için bir taban* olarak isimlendirilir. Bu tanım, $G \in (\tau_d \setminus \{\emptyset\})$ ve $x \in G$ için $\exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq G$ gerçekleşmesine denktir, çünkü aşağıdakiler geçerlidir:

$$\begin{aligned} G \in \tau_d &\Rightarrow \exists \mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B} : G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_G} B \\ &\Rightarrow x \in G \left(= \bigcup_{B \in \mathcal{B}_G} B \right) \\ &\Rightarrow \exists B_x \in \mathcal{B}_G (\subseteq \mathcal{B}) : x \in B_x \subseteq G \end{aligned}$$

Teorem. (X, d) bir *metrik uzay* olsun. X deki bütün açık yuvarların ailesi $\mathcal{B} = \{B_d(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ (X, d) *metrik uzayının açık kümeleri için bir taban*dır.

İspat. $G \in (\tau_d \setminus \{\emptyset\})$ ve $x \in G$ olsun. Açık alt küme tanımından $\exists \varepsilon_x > 0 : x \in B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq G$ gerçekleşir.

Not: $\mathcal{B} = \{B_d(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ ailesinin (X, d) *metrik uzayının açık kümeleri için bir taban* olması için aşağıdaki iki koşulun gerçekleşmesi yeterlidir:

- a) $X = \bigcup \{B_d(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$
- b) $B_d(x, \varepsilon), B_d(y, \delta) \in \mathcal{B}, z \in B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \delta) \Rightarrow \exists B_d(z, \alpha) : B_d(z, \alpha) \subset B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \delta)$

İspat. Gerçekten $\mathcal{B} = \{B_d(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ ailesi bu iki koşulu sağlar.

a)

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup \{B_d(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\} \stackrel{B_d(x, \varepsilon) \subseteq X}{\subseteq} X$$

b) $B_d(x, \varepsilon), B_d(y, \delta) \in \mathcal{B}, z \in B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \delta)$ olsun.

$$\alpha = \min \{\varepsilon - d(x, z), \delta - d(y, z)\}$$

olsun. $d(x, z) < \varepsilon, d(y, z) < \delta$ olduğundan $\alpha > 0$ geçerlidir.

İddia: $B_d(z, \alpha) \subset B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \delta)$?

$q \in B_d(z, \alpha)$ olsun. Bu durumda $d(z, q) < \alpha$ v e dolayısıyla

$$\begin{aligned} d(x, q) &\leq d(x, z) + d(z, q) \\ &< d(x, z) + \alpha \\ &\leq d(x, z) + (\varepsilon - d(x, z)) = \varepsilon \end{aligned}$$

Bu durumda $B_d(z, \alpha) \subset B_d(x, \varepsilon)$ geçerlidir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} d(y, q) &\leq d(y, z) + d(z, q) \\ &< d(y, z) + \alpha \\ &\leq d(y, z) + (\delta - d(y, z)) = \delta \end{aligned}$$

$B_d(z, \alpha) \subset B_d(y, \delta)$ ve sonuçta $B_d(z, \alpha) \subset B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \delta)$ geçerlidir. $\square$

Tanım (X, d) metrik uzay, $x \in X$ olsun. $\mathcal{B}_x = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Omega} (\subseteq \tau_d \cap \mathcal{N}_x)$ bu metrik uzayda x noktasını içeren açık kümelerin bir ailesi olsun. x noktasını içeren boştan farklı her G açık kümesine karşılık ($G \in (\tau_d \setminus \{\emptyset\}) \cap \mathcal{N}_x$) bir $B_\mu \in \mathcal{B}_x = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$, $x \in B_\mu \subseteq G$ gerçekleşmek üzere varsa $\mathcal{B}_x = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ ailesi x noktasında yerel taban olarak isimlendirilir. Yani

$$\forall G \in (\tau_d \setminus \{\emptyset\}) \cap \mathcal{N}_x, \exists B_\mu \in \mathcal{B}_x = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Omega} (\subseteq \tau_d \cap \mathcal{N}_x) : x \in B_\mu \subseteq G$$

$\Rightarrow \mathcal{B}_x = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ ailesi x noktasında yerel taban olarak isimlendirilir. Bir (X, d) metrik uzayı her noktasında sayılabilir yerel tabana sahip ise 1. sayılabilir uzay olarak isimlendirilir.

Tanım (X, d) metrik uzayı X in açık alt kümelerinden oluşan sayılabilir bir tabana sahip ise ikinci sayılabilir uzay olarak isimlendirilir.

Örnek. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. $a \in \mathbb{R}$ ve her $\delta > 0$ için τ_d de bütün $B_d(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$ açık yuvarlarının ailesi a noktasında $a \in \mathbb{R}$ merkezli bir yerel taban, olası bütün açık yuvarların ailesi $\mathcal{B} = \{B_d(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\} = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ ise tabandır. Aslında $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ve $\{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}\}$ aileleri de bu metrik uzay için bir tabandır. $\{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}\}$ sayılabilir taban olduğu için bu metrik uzay 2. sayılabilir bir uzaydır.

Teorem. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. Bu metrik uzay 1. sayılabilir bir uzaydır.

İspat. $p \in \mathbb{R}$ keyfi bir nokta olsun.

$$\begin{aligned} B_d(p, \frac{1}{n}) &= \{x : p - \frac{1}{n} < x < p + \frac{1}{n}\} \\ &= \left(p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

olmak üzere $\mathcal{B}_p = \{B_d(p, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesini gözönüne alalım. Açık aralıkların bu $\mathcal{B}_p$ ailesi sayılabilirdir. $\mathcal{B}_p$ yerel taban mıdır? $U (\in \tau_d \cap \mathcal{N}_p)$ p noktasını içeren keyfi bir açık küme ise

$$\exists B_d(p, \varepsilon) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subseteq U : p \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$$

geçerlidir. Arşimet özelliğinden $\exists k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{k} < \varepsilon$$

olacak şekilde seçilebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} B_k &= \{x : p - \frac{1}{k} < x < p + \frac{1}{k}\} \\ &= \left(p - \frac{1}{k}, p + \frac{1}{k}\right) \subseteq (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subseteq U \end{aligned}$$

gerçeklenir. O halde $\mathcal{B}_p$ yerel tabandır. $\square$

Uyarı. Her ikinci sayılabilir uzay 1. sayılabilir uzaydır ama tersi doğru olmak zorunda değildir.

Örnek. X sayılamaz kümesi üzerinde d ayrık metrik olsun. Bu durumda X 1. sayılabilir uzaydır ama 2. sayılabilir uzay değildir.

Teorem. Her (X, d) metrik uzayı 1. sayılabilir uzaydır.

İspat. (X, d) bir metrik uzay ve $a \in X$ herhangi bir nokta olsun. $B_d(a, r) = \{y \in X : d(a, y) < r\}$ bu metrik uzayda bir açık yuvar belirler. $B_d(a, \frac{1}{n})$ ($n \in \mathbb{N}$) ailesi $a \in X$ noktasında bir yerel tabandır. G , a yı içeren açık küme ise $\exists \varepsilon > 0 : B_d(a, \varepsilon) \subseteq G$ ve Arşimet özelliğinden $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$ bu durumda $B_d(a, \frac{1}{n}) \subseteq B_d(a, \varepsilon) \subseteq G$ yani

$$\exists B_d(a, \frac{1}{n}) : a \in B_d(a, \frac{1}{n}) \subseteq G.$$

geçerlidir. $\square$

Not. Her metrik uzay 2. sayılabilir olmak zorunda değildir. Sayılamaz küme üzerinde ayrık metrik örneğini vermiştik.

Teorem. 2. sayılabilir bir metrik uzayın her alt metrik uzayı da 2. sayılabilir uzaydır.

İspat. (X, d) 2. sayılabilir bir metrik uzay $Y \subseteq X$ ve (Y, τ_{d_Y}) da Y üzerindeki metrik alt uzay olsun. $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi (X, d) nun sayılabilir tabanı olsun. (Y, τ_{d_Y}) da sayılabilir tabana sahip mi?

$\mathcal{B}_Y = \{Y \cap B_n : B_n \in \mathcal{B}\}$ sayılabilir ve $\mathcal{B}_Y$ ailesi τ_{d_Y} için bir tabandır. (Y, τ_{d_Y}) da 2. sayılabilir uzaydır?

$H \in \tau_{d_Y}$ ve $x \in H$ olsun. Bu durumda $\exists G \in \tau_d : H = G \cap Y$ gerçekleşir.

$$\begin{aligned} H &\in \tau_{d_Y} \wedge x \in H \Rightarrow x \in G \cap Y \\ &\Rightarrow x \in G \wedge x \in Y \\ &\Rightarrow \exists B_{n_o} \in \mathcal{B} : x \in B_{n_o} \subseteq G \text{ ve } x \in Y \\ &\Rightarrow x \in B_{n_o} \cap Y \subseteq G \cap Y = H \\ &\Rightarrow B_{n_o} \cap Y \in \mathcal{B}_Y \end{aligned}$$

O halde $\mathcal{B}_Y, \tau_{d_Y}$ için bir tabandır. (Y, τ_{d_Y}) de ikinci sayılabilir uzaydır.

16. Süreklilik

Tanım: *i)* (X, d_X) ve (Y, d_Y) birer metrik uzay, $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun bir $x_0 \in X$ noktasında *süreklili* olması için gerek ve yeter koşul, verilen her bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısının $d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ gerçekleşmek üzere var olması yani $f(B_{d_X}(x_0, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)$ gerçekleşmesidir.

ii) $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ fonksiyonu $\forall x \in X$ noktasında sürekli ise sürekli fonksiyon olarak isimlendirilir.

Örnek. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. $f : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$, $f(x) = 3x + 1$ sürekli midir?

Çözüm. f fonksiyonunun bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında *süreklili* olması için gerek ve yeter koşul, verilen her bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısının $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ gerçekleşmek üzere var olmasıdır. $f(x_0) = 3x_0 + 1$, $\varepsilon > 0$ olsun. $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ seçebiliriz, eğer $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{3}$ ise

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |3x + 1 - 3x_0 - 1| \\ &= |3x - 3x_0| = 3|x - x_0| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Teorem. (X, d_X) ve (Y, d_Y) birer metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, $a \in X$ olsun, bu durumda f in a noktasında sürekli olması için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gerçekleyen her $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ gerçekleşmesidir.

İspat. f , a noktasında sürekli, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ olsun. $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin Y de $f(a)$ ya yakınsadığını göstermek istiyoruz. $\varepsilon > 0$ verilsin. Süreklilikten

$$\exists \delta > 0, d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

yani

$$f(B_{d_X}(a, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)$$

geçerlidir. $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow a$ gerçekleştiğinden bir $N \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ iken $d_X(x, a) < \delta$ gerçekleşmek üzere seçilebilir. Şimdi $n \geq N$ farzedelim. δ nın seçiminden

$$d_X(x_n, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$$

gerçeklenir. O halde $n \geq N$ için $d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ yani $f(x_n) \rightarrow f(a)$ gerçekleşir.

Tersini ispatlamak için f in a noktasında sürekli olmadığını farzedelim. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ sayısı, $\forall \delta > 0, \exists x \in X : d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$ gerçekleşmek üzere vardır. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için

bir x_n , $d_X(x_n, a) < \frac{1}{2^n}$ fakat $d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$ gerçekenmek üzere seçilebilir. $n \rightarrow \infty$ için $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ gerçeklendiği için $x_n \rightarrow a$ gerçekenir ama $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$ olduğundan $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ geçerlidir. $\square$

Not. Bu teorem metrik uzaylarda geçerlidir, topolojik uzaylarda doğru olmak zorunda değildir.

Örnek. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. $f : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$, $f(x) = x^2$ sürekli mi?

Çözüm. $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = (-1)^n \subseteq \mathbb{R}$ dizisi gözönüne alınsın. $n \rightarrow \infty$ için $f(x_n) = 1 \rightarrow f(1)$ fakat $n \rightarrow \infty$ için (x_n) dizisi yakınsak değildir.

Alıştırma. Eğer $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ise (r_n) artan rasyonel sayı dizisi $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ gerçekenmek üzere vardır?

Çözüm. Eğer $x \in \mathbb{R}$ ise $x - 1$ ve x arasında r_1 rasyonel sayısı, $x - 1 < r_1 < x$ gerçekenmek üzere seçilebilir.

r_2 rasyonel sayısı da

$$\max \left\{ r_1, x - \frac{1}{2} \right\} < r_2 < x$$

gerçekenmek üzere seçilebilir. Bu şekilde devam edilerek bir $r_n < x$ rasyonel sayısı seçildiğinde r_{n+1} rasyonel sayısı

$$\max \left\{ r_n, x - \frac{1}{n+1} \right\} < r_{n+1} < x$$

gerçekenmek üzere seçilir. (r_n) rasyonel sayı dizisi artan dır ve

$$x - \frac{1}{n} < r_n < x$$

oldüğundan sıkıştırma teoreminden $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ geçerlidir.

Not. Benzer şekilde bir rasyonel sayı alındığında bu sayıya yakınsayan artan bir irrasyonel sayı dizisi inşa edilebilir.

Örnek. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x \in \mathbb{Q} \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } x \notin \mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlansın. f hiç bir noktada sürekli değildir?

Çözüm. Eğer $a \in \mathbb{Q}$ ise bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} (\subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ irrasyonel sayı dizisi $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow a$ gerçekenmek üzere seçilebilir. Şimdi $f(a) = 1$ fakat $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(x_n) = 0$ dır ve $f(x_n)$ dizisinin her bir terimi $= 0$ olduğundan bu dizi 1 e yakınsamaz, $f(x_n) \not\rightarrow 1$. Benzer şekilde eğer $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ise bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} (\subseteq \mathbb{Q})$ rasyonel sayı dizisi $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow a$ gerçekenmek üzere seçilebilir. Şimdi $f(a) = 0$ fakat $\forall n \in \mathbb{N}$

için $f(x_n) = 1$ dir ve $f(x_n)$ dizisinin her bir terimi $= 1$ olduğundan bu dizi 0 e yakınsamaz, $f(x_n) \nrightarrow 0$. $\square$

Teorem. Metrik uzaylar arasındaki bir $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir :

(i) $\forall a \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, a) > 0, d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$
 $(f(B_{d_X}(a, \delta))) \subseteq B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)$.

(ii) Y de açık olan her $V (\in \tau_{d_Y})$ kümesi için $f^{-1}(V) (\in \tau_{d_X})$ X de açıktır.

(iii) Y de kapalı olan her H kümesi için $f^{-1}(H)$ X de kapalıdır.

(iv) $\forall A \subseteq X$ için $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ gerçekleşir.

İspat. (ii) $\Rightarrow$ (i): $\forall V \in \tau_{d_Y}$ için $f^{-1}(V) \in \tau_{d_X}$ gerçeklensin. $a \in X$ olsun ve

$$V = B_{d_Y}(f(a), \varepsilon) = \{y : y \in Y, d_Y(f(a), y) < \varepsilon\}$$

gözönüne alalım. Hipotezden $f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)) \in \tau_{d_X}$ ve $a \in f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \varepsilon))$ olduğundan bir $\delta > 0$, $B_{d_X}(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \varepsilon))$ gerçekleşmek üzere vardır. Bu ise her bir $x \in B_{d_X}(a, \delta)$ için yani $d_X(x, a) < \delta$ iken $f(x) \in B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)$ olması ya da denk olarak $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ olması demektir. Bu ise a noktasında sürekli olma tanımından başka bir şey değildir. Bu a , X de keyfi seçilmiş nokta olduğundan f in X in her noktasında sürekli olması, yani f in sürekli olması demektir.

(i) $\Rightarrow$ (ii): $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ sürekli olsun. $V \in \tau_{d_Y}$ ve $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ olsun. $f^{-1}(V) = \emptyset$ ise $\emptyset \in \tau_{d_X}$ gerçekleştiğini not edelim. $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ ise $f^{-1}(V) \in \tau_{d_X}$ gerçekleştiğini göstermek istiyoruz. $a \in f^{-1}(V)$ olsun, bu

$$f(a) \in f(f^{-1}(V)) \subset V \Rightarrow f(a) \in V$$

verir. $V \in \tau_{d_Y}$ olduğundan bir $\varepsilon > 0$, $B_{d_Y}(f(a), \varepsilon) \subset V$ olacak şekilde vardır. Sürekliliğin tanımından bir $\delta > 0$,

$$d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

gerçeklenmek üzere vardır. Ama bu

$$f(B_{d_X}(a, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(a), \varepsilon) \subset V$$

demektir, sezgisel olarak bu ifade f in a ya δ dan yakın noktaları $f(a)$ ya ε dan yakın noktalara göndermesi şeklinde yorumlanabilir.

$$f(B_{d_X}(a, \delta)) \subseteq V$$

$$\Rightarrow a \in B_{d_X}(a, \delta) \subseteq f^{-1}(f(B_{d_X}(a, \delta))) \subseteq f^{-1}(V)$$

$$\Rightarrow a \in B_{d_X}(a, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$$

O halde $f^{-1}(V)$ den seçtiğimiz her nokta için o noktayı içeren bir açık yuvar $f^{-1}(V)$ de kapsanmak üzere vardır. O halde $f^{-1}(V)$ nin her noktası iç noktadır, dolayısıyla $f^{-1}(V)$ açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): (ii) doğru, $H \subseteq Y$ de kapalı alt küme olsun. Bu durumda $\mathbb{C}_Y H$ Y nin açık alt kümesi yani $\mathbb{C}_Y H \in \tau_{d_Y}$ olur. (ii) den $f^{-1}(\mathbb{C}_Y H) = f^{-1}(Y \setminus H) = X \setminus f^{-1}(H)$ açık dolayısıyla $f^{-1}(H)$ X de kapalıdır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $A \subseteq X$ olsun. $f(A) \subset \overline{f(A)} \Rightarrow A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ ve $f^{-1}(\overline{f(A)})$ X de kapalıdır.

$$\begin{aligned} A &\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \Rightarrow \\ \overline{A} &\subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})} = f^{-1}(\overline{f(A)}) \\ \Rightarrow f(\overline{A}) &\subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)} \end{aligned}$$

gerçeklenir. Yani (iii) $\Rightarrow$ (iv): doğrudur.

(iv) $\Rightarrow$ (i): (iv) doğru, $a \in X$ olsun. f in a noktasında sürekli olduğunu göstereceğiz.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ ve $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow a$ olsun. Eğer $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ ise bir $\varepsilon > 0$ sayısı her $k \in \mathbb{N}$ için $\exists n_k \geq k$:

$d_Y(f(x_{n_k}), f(a)) \geq \varepsilon$ gerçekleşmek üzere seçilebilir. $A = \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ gözönüne alınsın. $x_n \rightarrow a$ olduğundan $x_{n_k} \rightarrow a$ gerçekleşir. O halde $a \in \overline{A}$ olur ve (iv) den $f(a) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow f(a) \in \overline{f(A)}$ gerçekleşir, fakat $B_{d_Y}(f(a), \varepsilon) \cap f(A) = \emptyset$ çelişkisi elde edilir. O halde $f(x_n) \rightarrow f(a)$ ifadesi doğru değildir, f fonksiyonu a noktasında süreklidir. $\square$

Örnek. $X = Y = C[0, 1]$, $[0, 1]$ üzerinde reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi üzerinde

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$$

metriği verilsin, $\phi : X \rightarrow Y$ fonksiyonu her $f \in C[0, 1]$ (ve $0 \leq t \leq 1$) için

$$(\phi(f))(t) = \int_0^t f(s).ds$$

ile tanımlı ise ϕ fonksiyonu süreklidir?

$$\text{Not: } f, g \in C[0, 1] \text{ için } \int_0^1 |f(x).g(x)|.dx \leq \left(\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \right) \cdot \int_0^1 |g(x)|.dx$$

geçerlidir. Gerçekten

$\forall x \in [0, 1]$ için

$$|f(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, 1] \text{ için } |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \left(\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \right) |g(x)|$$

$\Rightarrow \forall x \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x) \cdot g(x)| \cdot dx &= \int_0^1 |f(x)| \cdot |g(x)| \cdot dx \leq \int_0^1 \left(\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \right) |g(x)| dx \\ &= \left(\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \right) \int_0^1 |g(x)| dx \end{aligned}$$

Çözüm. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\begin{aligned} |(\phi(f))(t) - (\phi(g))(t)| &= \left| \int_0^t f(s) \cdot ds - \int_0^t g(s) \cdot ds \right| \\ &\leq \int_0^t |f(s) - g(s)| \cdot ds \end{aligned}$$

geçerlidir. Notta verilen eşitsizlik ve ispatı gözüne alınırsa

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1] \text{ için } |f(x) - g(x)| \cdot 1 &\leq \left(\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \right) \cdot 1 \stackrel{(t \in [0,1])}{\Rightarrow} \\ \int_0^t |f(s) - g(s)| \cdot 1 \cdot ds &\leq \left(\sup_{s \in [0,1]} |f(s) - g(s)| \right) \int_0^t ds \\ &= t \cdot \left(\sup_{s \in [0,1]} |f(s) - g(s)| \right) \leq \sup_{s \in [0,1]} |f(s) - g(s)| = d_\infty(f, g) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla her $f, g \in C[0, 1]$ için

$$d_\infty(\phi(f), \phi(g)) \leq d_\infty(f, g)$$

gerçeklenir. $\delta = \varepsilon$ alınırsa iddia açıktır. ($d_\infty(f, g) < \delta \Rightarrow d_\infty(\phi(f), \phi(g)) \leq d_\infty(f, g) < \varepsilon$)

Alıştırma. I açık aralığının her bir noktasında sürekli reel değerli bir f fonksiyonu verilsin, I da bir x_0 noktası ve I nın her bir niçin $x_0 \in I_n$ ve $\lim_n |I_n| = 0$ (burada $|I_n|$ I_n aralığının uzunluğu) gerçekleyen keyfi bir $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ alt aralık ailesi için

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} f(x) dx$$

geçerlidir?

Çözüm. $\epsilon > 0$ verilsin $\delta > 0$ sayısı $|x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ gerçekleşmek üzere seçilsin. Bu durumda $|I_n| < \delta$ iken

$$\begin{aligned} \left| f(x_0) - \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} f(x) dx \right| &= \frac{1}{|I_n|} \left| \int_{I_n} (f(x_0) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} |f(x) - f(x_0)| dx \\ &< \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} \epsilon dx \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Örnek. (X, d) bir metrik uzay ve her bir $i \in \{1, \dots, n\}$ için $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ ile tanımlı $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu süreklidir?

Çözüm. x_0, X de keyfi bir nokta olsun. Her bir f_i sürekli olduğundan verilen bir $\epsilon > 0$ için her bir $i \in \{1, \dots, n\}$ indisine karşılık bir $\delta_i > 0$ sayısı her $x \in X$ ve her $i \in \{1, \dots, n\}$ için

$$d(x, x_0) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$$

gerçeklenmek üzere vardır. $\delta = \min \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ alınırsa

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow$$

$$d(f(x), f(x_0)) = \left\{ (f_1(x) - f_1(x_0))^2 + \dots + (f_n(x) - f_n(x_0))^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

gerçeklenir. Böylece f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir. x_0 keyfi seçildiğinden f X üzerinde süreklidir.

Örnek. (X, d) bir metrik uzay, her bir $i \in \{1, \dots, n\}$ için $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olmak üzere, her bir $x \in X$ için $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ ile tanımlı $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu gözönüne alınsın. Eğer f X üzerinde sürekli ise, her bir f_i X üzerinde süreklidir, gösteriniz.

Çözüm. Her bir $i \in \{1, \dots, n\}$ için

$$d(f(x), f(y)) = \left(\sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq d(f(x), f(y))$$

geçerlidir. $x_0 \in X$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin f_i sürekli mi? $f, x_0 \in X$ noktasında sürekli olduğundan $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$:

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) = \left(\sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(x_0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \left(\sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(x_0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

geçerlidir. $i \in \{1, \dots, n\}$ için $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$ geçerlidir. Yani her bir f_i süreklidir.

Teorem. Metrik uzaylar arasındaki bir $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek Y deki her $B_{d_Y}(y, \delta)$ için

$$f^{-1}(B_{d_Y}(y, \delta)) \in \tau_{d_X}$$

gerçeklenmesidir.

İspat. $\Rightarrow$ f sürekli ve $B_{d_Y}(y, \delta)$ ise Y de açık yuvar olsun. $B_{d_Y}(y, \delta)$ Y de açık küme olduğundan son teoremin (ii) şikkından $f^{-1}(B_{d_Y}(y, \delta)) \in \tau_{d_X}$ gerçekleşir.

$\Leftarrow$ Y deki her $B_{d_Y}(y, \delta)$ açık yuvarı için $f^{-1}(B_{d_Y}(y, \delta))$ X de açık olsun. $f(a)$, Y de bir nokta ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)$ Y de bir açık yuvardır. $f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)) \in \tau_{d_X}$ dir. Bu durumda

$$a \in f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \varepsilon))$$

ve $f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \varepsilon))$ X de açıktır. Dolayısıyla $B_{d_X}(a, \delta)$ açık yuvarı $B_{d_X}(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \varepsilon))$ gerçekleşmek üzere vardır. Böylece

$$x \in B_{d_X}(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)$$

geçerlidir, yani f süreklidir.

Örnek. (X, d) ayrık metrik uzay, (Y, ρ) herhangi bir metrik uzay olsun. Her $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ fonksiyonu süreklidir. $\forall V \in \tau_\rho$ için $f^{-1}(V) \in \tau_d$, çünkü X üzerinde ayrık metrik olduğu için $\forall U \subseteq X \Rightarrow U \in \tau_d$ geçerlidir. O halde $f^{-1}(V) \subseteq X \Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau_d$ olur.

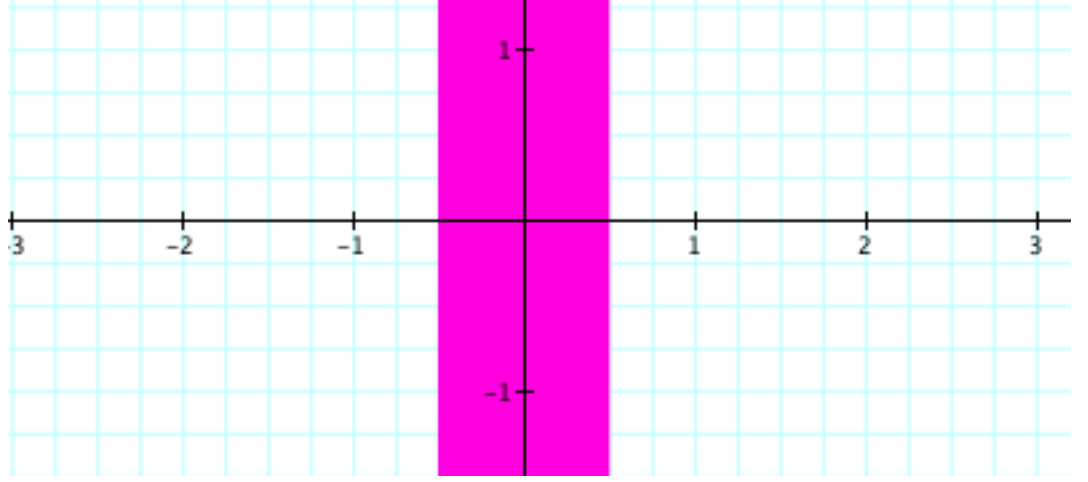
Örnek. $X = \mathbb{R}^2$ üzerinde $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ üzerinde

$$d_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

metriği, $Y = \mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $f((x, y)) = x$ ile tanımlı $f : (\mathbb{R}^2, d_e) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ fonksiyonu süreklidir?

Çözüm. $a \in \mathbb{R}$ için $B_d(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$ ve $f^{-1}((a - \delta, a + \delta)) = \{(x, y) : a - \delta < x < a + \delta\}$ $\mathbb{R}^2$ üzerinde açıktır. f süreklidir.

Örneğin $0 \in \mathbb{R}$ ve $B_d(0, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ için $f^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = \{(x, y) : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$ dir.



Hatırlatma. a) Eğer $f(X) = Y$ ise, f fonksiyonuna, Y kümesi üzerine bir fonksiyon veya *sürjektif fonksiyon* denir. Diğer bir deyişle, $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürjektif olması için gerek ve yeter koşul $\forall y \in Y$ nin en azından bir $x \in X$ in görüntüsü olmasıdır.

(b) Herhangi iki $x_1, x_2 \in X$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksiyonuna *birebir* veya *injektif fonksiyon* denir. f fonksiyonunun birebir olması için gerek ve yeter koşul, X kümesinin farklı elemanlarının görüntülerinin farklı olmasıdır. Bu da $\forall y \in f(X)$ in, X kümesine ait tek bir elemanın görüntüsü olmasını gerektirir.

(c) Eğer f hem birebir hem de üzerine bir fonksiyon ise, f fonksiyonuna *bijektif fonksiyon* denir.

(d) $f : X \rightarrow Y$ bijektif olsun. Bu durumda

$$h(y) = x \text{ için } \text{gyk } f(x) = y$$

ile verilen $h : Y \rightarrow X$ fonksiyonu f in tersi olarak isimlendirilir ve f^{-1} ile gösterilir. $f^{-1} : Y \rightarrow X$, $f^{-1} \circ f = I_X$ ve $f \circ f^{-1} = I_Y$ gerçekleyen bir fonksiyondur.

(e) $f : X \rightarrow Y$ bijektif fonksiyon ise $f^{-1} : Y \rightarrow X$ de bijektif fonksiyondur.

Tanım. (X, d_X) ve (Y, d_Y) birer metrik uzay, $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ injektif, örten ve sürekli bir fonksiyon ve tersi $f^{-1} : (Y, d_Y) \rightarrow (X, d_X)$ sürekli bir fonksiyon ise f fonksiyonu bir homeomorfizma (homeomorfi

yada topolojik eşyapı dönüşümü) olarak isimlendirilir, . (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzayları arasında bir homeomorfi varsa bu uzaylara homeomorf uzaylar denir ve $X \cong Y$ yazılır.

Teorem. $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ bir biyektif fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

- (a) f bir homeomorfidir.
- (b) $G \in \tau_{d_X}$ için $gyk f(G) \in \tau_{d_Y}$
- (c) $F \subset X$ alt kümesinin τ_{d_X} -kapalı olması için $gyk f(F) \subset Y$ alt kümesinin τ_{d_Y} -kapalı olmasıdır.

İspat:

(a) $\Rightarrow$ (b) f bir homeomorfi olsun. Bu durumda tanımdan f ve f^{-1} süreklidir. f^{-1} sürekli olduğundan G, X de açıksa $(f^{-1})^{-1}(G) = f(G)$ Y de açıktır. Fakat $(f^{-1})^{-1}(G) = f(G)$ dir. O halde $f(G)$ Y de açıktır.

$f(G)$ Y de açık olsun. f sürekli olduğunda $f^{-1}(f(G)) \stackrel{f}{=} G$ X de açıktır.

(b) $\Rightarrow$ (c) F, X de kapalı olsun. Bu durumda $X - F \in \tau_{d_X}$. Hipotezden $f(X - F) \in \tau_{d_Y}$ geçerlidir ve f nin biyektifliği $f(X - F) = Y - f(F)$ olduğundan $f(F), Y$ de kapalıdır.

$f(F), Y$ de kapalı olsun. $Y - f(F)$ Y de açıktır. Bu durumda $Y - f(F) = f(X - F)$ açıktır, (b) den $X - F$ X de açıktır, (b) den $X - F$ X de kapalıdır.

(c) $\Rightarrow$ (a) W τ_{d_Y} -kapalı olsun. $f(f^{-1}(W)) \stackrel{f}{=} W$ τ_{d_Y} -kapalı olduğundan hipotezden $f^{-1}(W)$ τ_{d_X} -kapalıdır, dolayısıyla f süreklidir.

F, X de kapalı olsun. Hipotezden $f(F)$ τ_{d_Y} -kapalı olduğu için $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ kapalı f^{-1} süreklidir.

Teorem. $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ sürekli, $g \circ f = I_X$ ve $f \circ g = I_Y$ ise f bir homeomorfi ve $g = f^{-1}$ dir.

İspat. $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ şeklinde verilen iki fonksiyonun bileşke fonksiyonları $g \circ f = I_X$ ve $f \circ g = I_Y$ gerçekleşiyor ise f ve g nin biyektif

fonksiyon ve $g = f^{-1}$ dir. O halde f ve f^{-1} sürekli, dolayısıyla f bir homeomorfidir.

Örnek. $\mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın.

$(\mathbb{R}, d)$ uzayı, $(\mathbb{R}, d)$ nin $(-1, 1)$ üzerinde belirlediği metrik alt uzaya homeomorftur. $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), y = f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ ($|f(x)| = \frac{|x|}{1 + |x|} < 1$) fonksiyonu süreklidir. Bu fonksiyonun tersi olan $g(y) = \frac{y}{1 - |y|}$ ile tanımlı $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da süreklidir.

$$x \xrightarrow{f} \frac{x}{1+|x|} \xrightarrow{g} \frac{\frac{x}{1+|x|}}{1 - \frac{|x|}{1+|x|}} = x$$

olduğundan $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ ve benzer şekilde

$$y \xrightarrow{g} \frac{y}{1-|y|} \xrightarrow{f} \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1 + \frac{|y|}{1-|y|}} = y \quad (1-|y| > 0)$$

geçerli olduğundan $f \circ g = I_{(-1,1)}$ geçerlidir. O halde $g = f^{-1}$ ve f bir homeomorfidir. Dolayısıyla $\mathbb{R} \cong (-1, 1)$ geçerlidir.

Tanım. (X, d_X) ve (Y, d_Y) birer metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu, verilen her $\epsilon > 0$ sayısına, her $x, y \in X$ için $d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ gerçekleşmek üzere bir $\delta > 0$ karşı geliyorsa, düzgün sürekli fonksiyon olarak isimlendirilir.

Uyarı. (X, d_X) ve (Y, d_Y) birer metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun sürekliliği ve düzgün sürekliliği aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Süreklilik:

$$(\forall \epsilon > 0) (\forall x \in X) (\exists \delta > 0) (\forall x' \in X)$$

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

Düzgün süreklilik

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in X) (\forall x' \in X)$$

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

Uyarı. x noktasında sürekli bir fonksiyon için δ nın değeri hem x e hem de ϵ sayısına bağlı olabilirken yani $\delta = \delta(x, \epsilon)$ iken, düzgün sürekli bir fonksiyon için yalnızca $\delta = \delta(\epsilon)$ geçerlidir.

Önerme (X, d) bir metrik uzay, $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun. $x \in X$ için $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu $f(x) = \text{dist}(x, A)$ ile tanımlansın. f düzgün süreklidir.

İspat. $a \in A$ olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$\text{dist}(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

yani

$$\text{dist}(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

geçerlidir. $a \in A$ üzerinden infimum alınır, $\text{dist}(y, A)$ nın yeri değiştirilirse

$$\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) \leq d(x, y)$$

elde edilir. Simetriden x ve y nin yeri değiştirilirse

$$\text{dist}(y, A) - \text{dist}(x, A) \leq d(x, y)$$

elde edilir, dolayısıyla

$$|f(x) - f(y)| = |\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$$

geçerlidir. $\varepsilon > 0$ verilsin, $\delta = \varepsilon$ alınırsa

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

gerçeklenir, yani f düzgün süreklidir.

Örnek. $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)}$ ($= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$) olmak üzere $f_\beta : (\mathbb{R}^n, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$, $f_\beta(\mathbf{x}) = \beta \cdot \mathbf{x}$ fonksiyonu tanımlansın. f_β bir homeomorfizmadır? ($\beta \cdot \mathbf{x} = \beta \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\beta \cdot x_1, \dots, \beta \cdot x_n)$, $\|\beta \cdot \mathbf{x}\| = |\beta| \cdot \|\mathbf{x}\|$, $d(\beta \cdot \mathbf{x}, \beta \cdot \mathbf{y}) = |\beta| \cdot d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gerçekleşir).

Çözüm. $\varepsilon > 0$ verilsin, $\delta = \frac{\varepsilon}{|\beta|}$ seçilirse

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta &\Rightarrow d(f_\beta(\mathbf{x}), f_\beta(\mathbf{y})) = d(\beta \cdot \mathbf{x}, \beta \cdot \mathbf{y}) \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (\beta \cdot x_i - \beta \cdot y_i)^2\right)} = \sqrt{\left(\beta^2 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)} \\ &= |\beta| \cdot d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{|\beta|} = \varepsilon \end{aligned}$$

$f_\beta : (\mathbb{R}^n, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ düzgün sürekli, dolayısıyla süreklidir.

$f_\beta^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\beta} \mathbf{x}$ ve $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left(f_\beta^{-1} \circ f_\beta\right)(\mathbf{x}) = f_\beta^{-1}(f_\beta(\mathbf{x})) = f_\beta^{-1}(\beta \cdot \mathbf{x}) = \frac{1}{\beta} \beta \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

ve

$$\left(f_\beta \circ f_\beta^{-1}\right)(\mathbf{x}) = f_\beta\left(f_\beta^{-1}(\mathbf{x})\right) = f_\beta\left(\frac{1}{\beta} \mathbf{x}\right) = \frac{1}{\beta} \cdot \beta \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

dolayısıyla f_β bijektiftir.

f_β^{-1} de süreklidir. Gerçekten $a \in \mathbb{R}^n$ keyfi bir nokta, $\varepsilon > 0$ olsun, $\delta = |\beta| \cdot \varepsilon$ alınırsa

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} d\left(f_\beta^{-1}(\mathbf{x}), f_\beta^{-1}(\mathbf{a})\right) &= d\left(\frac{1}{\beta}\mathbf{x}, \frac{1}{\beta}\mathbf{a}\right) \\ &= \frac{1}{|\beta|}d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \frac{1}{|\beta|}|\beta| \cdot \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

f_β^{-1} a noktasında sürekli, f_β bir homeomorfidir.

Tanım. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar olsun. Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu eğer $\exists K > 0 : \forall x, y \in X$ için $\rho(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y)$ gerçekleşiyorsa Lipschitz fonksiyonu olarak isimlendirilir.

Teorem. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ düzgün sürekli fonksiyon olsun. f Cauchy dizilerini Cauchy dizilerine resmeder.

İspat. (x_n) , X de bir Cauchy dizisi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $\exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ geçerlidir. Dolayısıyla $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \delta$ gerçekleşir. Bu bilgileri toplarsak

$$n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

gerçeklenir. Yani $(f(x_n))$, Y de bir Cauchy dizisidir.

Uyarı. Genel olarak sürekli bir fonksiyon Cauchy dizilerini Cauchy dizilerine resmetmek zorunda değildir. Bunun için en basit örnek, $x \in (0, \infty)$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ ile tanımlanan $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy dizisini, Cauchy dizisi olmayan $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine resmeder.

Tanım. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar, $x \in X$ olsun. Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu eğer $\forall x, y \in X$ için $\rho(f(x), f(y)) = d(x, y)$ gerçekliyorsa izometri olarak isimlendirilir. Eğer f üzerine bir izometri ise X e Y ye izometrik denir. Üzerine izometri izomorfi olarak isimlendirilir.

Uyarı. Açıktır ki bir izometri bir Lipschitz fonksiyonu dolayısıyla düzgün sürekli fonksiyondur.

Örnek. $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$ ise $z \in \mathbb{C}$ için $f_\omega(z) = \omega z$ ile tanımlı $f_\omega : (\mathbb{C}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$ fonksiyonu bir izomorfidir?

Çözüm. $u \in \mathbb{C}$ keyfi kompleks sayısı gözönüne alınırsa $\frac{u}{\omega} \in \mathbb{C}$ dir ve $f_\omega\left(\frac{u}{\omega}\right) = \omega \frac{u}{\omega} = u$ geçerlidir, yani f_ω örtendir.

Ayrıca $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için

$$|f_\omega(z_1) - f_\omega(z_2)| = |\omega z_1 - \omega z_2| = |\omega| |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$$

olduğundan f izometridir. O halde f_ω izomorfidir.

Örnek. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $f(x, y) = x + iy$ ile tanımlı $f : (\mathbb{R}^2, d_e) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$ fonksiyonu bir izometridir?

Çözüm. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

olmak üzere, her $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_e(a, b) = d_e((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)|$$

$$= |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |f(a) - f(b)| = \rho(f(a), f(b))$$

gerçeklendiğinden f izometridir.

Örnek. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ uzayının $X = [0, 1]$ üzerinde belirlediği metrik d_X , $Y = [0, 3]$ üzerinde belirlediği metrik d_Y olmak üzere için $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 3x$ ile tanımlı $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ fonksiyonu bir izometri midir?

Çözüm. Her $x, y \in X$ için

$$d_Y(f(x), f(y)) = |3x - 3y| = 3 \cdot |x - y| = 3d_X(x, y)$$

$$\Rightarrow d_X(x, y) \neq d_Y(f(x), f(y))$$

dolayısıyla f bir izometri değildir.

Örnek. $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = (x, 0)$ ile tanımlı $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_e)$ fonksiyonu bir izometridir, ama izomorfi değildir?

Çözüm. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d_e(f(x), f(y)) = \sqrt{(x - y)^2 + (0 - 0)^2} = |x - y|$$

gerçeklendiğinden f izometridir. $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ için $f(x) = (0, 1)$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ yoktur. f üzerine olmadığı için izomorfi değildir.

Önerme. *Üzerine bir izometri bir homeomorfizmadır.*

İspat. Bir izometri injektif yani birebirdir, aksi halde $x \neq y$ için $0 = \rho(f(x), f(y)) = d(x, y) \neq 0$ çelişkisi elde edilirdi.

$$d(x, y) < \delta (= \varepsilon) \Rightarrow (d(x, y) =) \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

gerçeklenir, yani f süreklidir..

$\forall x', y' \in Y$ için $\exists x, y \in X : f(x) = x', f(y) = y'$ ve f üzerine izometri olduğundan

$$\rho(x', y') = \rho(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

$$\stackrel{f^{-1}}{=} d(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))) = d(f^{-1}(x'), f^{-1}(y'))$$

geçerlidir, o halde f^{-1} de izometridir, dolayısıyla süreklidir.

Önerme. a) Bir Cauchy dizisinin izometri altındaki görüntüsü yine bir Cauchy dizisidir.

b) Yakınsak bir dizinin izometri altındaki görüntüsü yakınsak bir dizidir.

İspat. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ izometri olsun.

a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X de bir Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$ gerçekleşir. Bu durumda $\forall n, m \geq N$ için $\rho(f(x_n), f(x_m)) = d(x_n, x_m) < \varepsilon$ gerçekleşir.

b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X de yakınsak bir dizi, $x_n \rightarrow x$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ geçerlidir. Bu durumda, $\forall n \geq N$ için $\rho(f(x_n), f(x)) = d(x_n, x) < \varepsilon$ dur. Böylece $f(x_n) \rightarrow f(x)$ dir.

Lemma. Eğer (X, d) , (Y, ρ) ve (Z, σ) metrik uzaylar ve $g : X \rightarrow Y$, $f : Y \rightarrow Z$ sürekli ise, bileşke fonksiyon $f \circ g : X \rightarrow Z$ süreklidir.

İspat. $\epsilon > 0$ verilsin ve $x \in X$ olsun. f sürekli olduğundan bir $\delta_1 > 0$ (ϵ ve $f \circ g(x) = f(g(x))$ e bağlı)

$$\rho(g(x), y) < \delta_1 \text{ iken } \sigma(f(g(x)), f(y)) < \epsilon$$

gerçeklenmek üzere bulunabilir. Yine

g sürekli olduğundan bir $\delta_2 > 0$ (δ_1 ve $g(x)$ e bağlı)

$$d(x, t) < \delta_2 \text{ iken } \rho(g(x), g(t)) < \delta_1$$

gerçeklenmek üzere bulunabilir. O halde

$$d(x, t) < \delta_2 \text{ iken } \sigma(f(g(x)), f(g(t))) < \epsilon \text{ geçerlidir. } \square$$

Alıştırma. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde sırasıyla karşı gelen Öklidyen metrikler tanımlı olsun.

(i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. $(f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu süreklidir?

(ii) $M(x, y) = xy$ ile verilen $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.

(iii) Bileşke kuralını kullanarak $m(x, y) = f(x)g(y)$ ile verilen $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm. (i) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $\epsilon > 0$ verilsin. Bir $\delta_1 > 0$ sayısı

$$|x - s| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(s)| < \frac{\epsilon}{2}$$

gerçeklenmek ve $\delta_2 > 0$ sayısı da

$$|y - t| < \delta_2 \Rightarrow |g(y) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2}$$

gerçeklenmek üzere vardır. Eğer $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ tanımlarsak, bu durumda $d_e((x, y), (s, t)) (= \|(x, y) - (s, t)\|_2) < \delta \Rightarrow$

$$|x - s| < \delta \leq \delta_1 \text{ ve } |y - t| < \delta \leq \delta_2$$

dolayısıyla

$$|f(x) - f(s)| < \epsilon/2 \text{ ve } |g(y) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2}$$

geçerlidir.

$$d_e((f(x), g(y)), (f(s), g(t))) \leq d_e((f(x), g(y)), (f(s), g(y))) + d_e((f(s), g(y)), (f(s), g(t)))$$

$$\leq \sqrt{(f(x) - f(s))^2 + (g(y) - g(y))^2} + \sqrt{(f(s) - f(s))^2 + (g(y) - g(t))^2}$$

$$= |f(x) - f(s)| + |g(y) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

gerçeklenir.

Ya da $\|\cdot\|_2$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde Öklidyen norm olmak üzere $(f(x), g(y)) = (f(x), 0) + (0, g(y))$ ve $(f(s), g(t)) = (f(s), 0) + (0, g(t))$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|(f(x), g(y)) - (f(s), g(t))\|_2 &= \|((f(x), 0) + (0, g(y))) - ((f(s), 0) + (0, g(t)))\|_2 \\ &= \|((f(x), 0) - (f(s), 0)) + ((0, g(y)) - (0, g(t)))\|_2 \\ &\leq \|(f(x), 0) - (f(s), 0)\|_2 + \|(0, g(y)) - (0, g(t))\|_2 \\ &= |f(x) - f(s)| + |g(y) - g(t)| < \epsilon \end{aligned}$$

gerçeklenir.

17. Kompakt Metrik Uzaylar

Tanım. Bir X metrik uzayının açık kümelerinin (sayılabilir ya da sayılamaz) bir $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ topluluğu, $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ gerçekliyorsa X in açık örtülüğü olarak isimlendirilir. Bir X metrik uzayı her açık örtülüğü sonlu alt örtülüğe sahip ise kompakt metrik uzay olarak isimlendirilir. Yani $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ topluluğu X için açık örtülüğü ise

$$\exists \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} \subseteq \Delta : X \subseteq \bigcup_{n=1}^N U_{\alpha_n}$$

gerçeklenir.

(X, d_X) metrik uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. $A (\subseteq X)$ alt kümesine A üzerindeki (A, d_A) metrik alt uzayına göre kompaktsa kompakt denir.

Teorem. (X, d_X) metrik uzayı ve $A \subseteq X$ üzerindeki (A, d_A) metrik alt uzayı gözönüne alınsın. A metrik alt uzayının kompakt olması için gerek A nın τ_{d_X} -açık her açık örtülüğünün sonlu alt örtülüğe sahip olmasıdır.

İspat. $(\Leftarrow) \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ A nın τ_{d_A} -açık örtülüğü olsun $(\bigcup_{\alpha \in \Delta} \underbrace{G_\alpha}_{\in \tau_{d_A}} = A)$.

Metrik alt uzay tanımından

$$\exists H_\alpha \in \tau_{d_X} : G_\alpha = A \cap H_\alpha \subset H_\alpha$$

geçerlidir. Böylece $A = \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} H_\alpha$ yani $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ A nın τ_{d_X} -açık örtülüğüdür. A kümesi τ_{d_X} -kompakt alt küme olduğundan $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ örtülüğünün sonlu bir alt örtülüğü

$$A \subseteq H_{\alpha_1} \cup \dots \cup H_{\alpha_n} \quad (H_{\alpha_i} \in \{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta})$$

olacak şekilde vardır, bu durumda

$$\begin{aligned} A &= A \cap (H_{\alpha_1} \cup \dots \cup H_{\alpha_n}) \\ &= (A \cap H_{\alpha_1}) \cup \dots \cup (A \cap H_{\alpha_n}) \\ &= G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n} \end{aligned}$$

geçerlidir. Böylece $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ sonlu bir $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ alt örtülüğü kapsar ve (A, d_A) kompakttır.

$\Rightarrow \{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ A nın τ_{d_X} -açık örtülüğü olsun. Her bir $\alpha \in \Delta$ için $G_\alpha = A \cap H_\alpha$ tanımlayalım, bu durumda

$$\begin{aligned} A &\subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} H_\alpha \\ \Rightarrow A &= A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} H_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Delta} (A \cap H_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Ama $G_\alpha \in \tau_{d_A}$ ve böylece $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ A nın τ_{d_A} -açık örtülüğüdür. Hipotezden A , τ_{d_A} -kompakt olduğundan $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ sonlu bir $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ alt örtülüğü kapsar. Buna göre

$$\begin{aligned} A &= G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n} \\ &= (A \cap H_{\alpha_1}) \cup \dots \cup (A \cap H_{\alpha_n}) \\ &= A \cap (H_{\alpha_1} \cup \dots \cup H_{\alpha_n}) \\ &\subseteq H_{\alpha_1} \cup \dots \cup H_{\alpha_n} \end{aligned}$$

geçerlidir. O halde $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ sonlu bir $\{H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_n}\}$ alt örtülüğüne indirgenebilir, dolayısıyla A , τ_{d_X} - kompakttır.

Örnek: a) $\mathbb{R}$ üzerinde standart metriğin $(0, 1)$ üzerinde belirlediği metrik alt uzaya göre $(0, 1)$ topolojik uzayı kompakt değildir.

Çözüm. $(0, 1)$ in, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $U_n = \left(0, 1 - \frac{1}{n+1}\right)$ açık alt kümelerinin oluşturduğu $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ailesi gözönüne alınsın.

$$(0, 1) = \bigcup_n \left(0, 1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

olduğundan $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $(0, 1)$ in bir açık örtülüğüdür. Sonlu sayıda U_n ile $(0, 1)$ örtülemez. Bir an için bunun mümkün olduğunu, $U_{n(1)}, U_{n(2)}, \dots, U_{n(k)}$ sonlu ailesinin $(0, 1)$ in bir örtülüğü olduğunu, farzedelim. $n_\ell = \max\{n(1), n(2), \dots, n(k)\}$ olsun bu durumda

$$\begin{aligned} U_{n(1)} \cup U_{n(2)} \cup \dots \cup U_{n(k)} &= \left(0, 1 - \frac{1}{n_\ell + 1}\right) \\ &\neq (0, 1) \end{aligned}$$

O halde $(0, 1)$ üzerindeki metrik alt uzaya göre kompakt değildir. $\square$

Örnek: Sonsuz X kümesi üzerinde d ayrık metriği gözönüne alınsın. X kompakt değildir, gösterin,

Çözüm. $\forall x \in X$ için $B_d(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$ olduğundan $\{B_d(x, \frac{1}{2}) : x \in X\}, X$ için bir açık örtülüdür. $\bigcup_{x \in X} B_d(x, \frac{1}{2}) = \bigcup_{x \in X} \{x\} = X$ geçerlidir. Ama X sonsuz olduğundan $\{B_d(x, \frac{1}{2}) : x \in X\}$ ailesinin sonlu alt ailesi sonlu nokta kümesinden ibarettir, X i örten sonlu alt örtülüş yoktur.

Örnek: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ kompakt değildir, gösterin,

Çözüm. $\mathbb{R}$ nin, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $U_n = (-n, n)$ açık alt kümelerinin oluşturduğu $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ailesi gözönüne alınsın.

$$\mathbb{R} = \bigcup_n (-n, n)$$

Çünkü $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\exists n' \in \mathbb{N} : n' > |x| \Rightarrow x \in (-n', n') \subseteq \bigcup_n (-n, n)$ ve $\bigcup_n (-n, n) \subseteq \mathbb{R}$ her zaman doğrudur. Sonlu sayıda U_n ile $\mathbb{R}$ örtülemez. Bir an için bunun mümkün olduğunu, $U_{n(1)}, U_{n(2)}, \dots, U_{n(k)}$ sonlu ailesinin $\mathbb{R}$ nin bir örtülüğü olduğunu, farzedelim. $n_\ell = \max\{n(1), n(2), \dots, n(k)\}$ olsun bu durumda

$$\begin{aligned} U_{n(1)} \cup U_{n(2)} \cup \dots \cup U_{n(k)} &= U_{n_\ell} \\ &= (-n_\ell, n_\ell) \neq \mathbb{R} \end{aligned}$$

geçerlidir. $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ açık örtülüğü $\mathbb{R}$ yi örten sonlu bir alt örtülüşe sahip değildir yani $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ kompakt değildir.

Örnek: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ metrik uzayının $A = (0, 1)$ üzerinde belirlediği metrik alt uzayın kompakt olmadığını gösterin. Yol Gösterme: $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ için $G_n = (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$ kümelerinden oluşan $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ açık örtülüştür sonlu alt örtülüşe sahip olmadığını gösterin.

Çözüm. $(0, 1) = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$, fakat $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ ailesi $A = (0, 1)$ i örten sonlu alt örtülüşe sahip olabilir mi? Bu ailenin sonlu bir alt ailesi $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$ formundadır. Eğer $\varepsilon = \min\{a_1, \dots, a_n\}$ alırsa $\varepsilon > 0$ ve

$(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \dots \cup (a_n, b_n) \subseteq (\varepsilon, 1)$ gerçekleşir. Fakat $(0, \varepsilon] \cap (\varepsilon, 1) = \emptyset$ olduğundan $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}, A = (0, 1)$ için sonlu örtülüş değildir. $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ ailesi sonlu alt örtülüşe sahip değildir, dolayısıyla A kompakt değildir.

Örnek. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ metrik uzayının $A = (0, 1]$ üzerinde belirlediği metrik alt uzay olsun. $\{(\frac{1}{n}, 1] : n \in \mathbb{N} \setminus \{\infty\}\}$ ailesi, A için sonlu alt örtülüşe sahip olmayan bir açık örtülüş olduğu için A kompakt değildir.

[The Heine–Borel Theorem.] $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği verilsin. Kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığı kompakttır.

İspat. $\mathcal{C}$, $[a, b]$ için açık örtülüş olsun. (yani $\mathcal{C}$ ailesinin elamanları açık kümeler ve $\bigcup_{U \in \mathcal{C}} U \supseteq [a, b]$ kapsamı geçerli olsun) . Eğer $\mathcal{C}_1 [a, c]$ nin sonlu alt örtülüştür ve $\mathcal{C}_2$ ise $[c, b]$ nin sonlu alt örtülüştür ise $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 [a, b]$ nin sonlu alt örtülüştür olur.

$\mathcal{C}$ nin $[a, b]$ yi örten sonlu alt örtülüştüğünün olmadığını farzedelim. $a_0 = a$, $b_0 = b$, ve $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{C}$ $[a_0, c_0]$ ve $[c_0, b_0]$ aralıklarının en az biri için sonlu alt örtülüşe sahip değildir. Eğer $[a_0, c_0]$ sonlu alt örtülüşe sahip değil ise $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ tanımlayalım. Aksi durumda $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$. tanımlayalım. Her iki durumda da biliyoruz ki

(i) $a = a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 = b$,

(ii) Eğer $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$ in sonlu alt ailesi ise bu durumda $\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U \not\supseteq [a_1, b_1]$,

(iii) $b_1 - a_1 = (b - a)/2$.

İndüksiyonla devam edilirse aşağıdakiler elde edilir

(i)_n $a \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq b$.

(ii)_n Eğer $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$ nin sonlu alt ailesi ise, bu durumda $\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U \not\supseteq [a_n, b_n]$.

(iii)_n $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$.

Bu durumda a_n üstten b ile sınırlı artan bir dizi oluşturur, bir $A \leq b$ için $a_n \rightarrow A$ gerçekleşir. Benzer şekilde bir $B \geq a$ için $b_n \rightarrow B$ gerçekleşir. $b_n - a_n \rightarrow 0$ olduğundan bir $x \in [a, b]$ için $A = B = x$ geçerlidir. $x \in [a, b]$ ve $\bigcup_{U \in \mathcal{C}} U \supseteq [a, b]$ olduğundan $x \in V$ gerçekleyen bir $V \in \mathcal{C}$ bulunabilir. V standart metriğe göre açık olduğundan, bir $\delta > 0$ ($x - \delta, x + \delta$) $\subseteq V$ olacak şekilde vardır. $a_n, b_n \rightarrow x$ olduğundan bir $N \in \mathbb{N}$ $|x - a_N|, |x - b_N| < \delta$ olacak şekilde bulunabilir ve böylece

$$[a_N, b_N] \subseteq (x - \delta, x + \delta) \subseteq V$$

gerçeklenir ki bu da (ii)_N ile çelişir. ($\mathcal{F} = \{V\}$ almak yeterli)

Tamm. Bir X metrik uzayının alt kümelerinin $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ topluluğuna, her $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} (\subseteq \Delta)$ sonlu indis kümesi için $\bigcap_{n=1}^N A_{\alpha_n} \neq \emptyset$ gerçekleşiyorsa, sonlu arakesit özelliğine sahiptir, denir.

Teorem. Bir X metrik uzayının kompakt olması için gyk sonlu arakesit özelliğine sahip her kapalı küme ailesinin boştan farklı arakesite sahip olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) X kompakt ve $\{A_\alpha\}$ sonlu arakesit özelliğine kapalı küme ailesi ve $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha = \emptyset$ olsun. A_α kapalı kümelerinin bütünleyenlerinden oluşan $\{\mathcal{C}_X A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ açık küme ailesini gözönüne alalım.

$$\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathcal{C}_X A_\alpha = X$$

gerçeklendiğinden $\{\mathcal{C}_X A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, X için açık örtülüştür. X kompakt olduğundan

$$\exists \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} \subseteq \Delta : X \subseteq \bigcup_{n=1}^N \mathcal{C}_X A_{\alpha_n} (\subseteq X)$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^N \mathbb{C}_X A_{\alpha_n} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^N A_{\alpha_n} = \emptyset$$

gerçeklenir, bu ise $\{A_\alpha\}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olması ile çelişir.

($\Leftarrow$) $\{U_\alpha\}$, X için bir açık örtülüş olsun. Bu durumda $\bigcap_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C}_X U_\alpha = \emptyset$. Bu durumda kapalı kümelerin $\{\mathbb{C}_X U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ ailesi sonlu arakesit özelliğine sahip olamaz. Dolayısıyla

$$\exists \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} \subseteq \Delta : \bigcap_{n=1}^N \mathbb{C}_X U_{\alpha_n} = \emptyset$$

geçerlidir. Bu ise $\bigcup_{n=1}^N U_{\alpha_n} = X$ demektir. $\{U_\alpha\}$ sonlu alt örtülüşe sahiptir.

Teorem.

a) Kompakt metrik uzayın her kapalı alt kümesi kapalıdır.

b) Eğer K , X metrik uzayının kompakt alt kümesi ise kapalıdır. İspat. (a) M , X kompakt metrik uzayının kapalı alt kümesi olsun ve $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, M için bir açık örtülüş olsun. M kapalı olduğundan $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \cup \{\mathbb{C}_X M\}$ topluluğu, X için bir açık örtülüştür. X kompakt olduğundan

$$\exists \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} \subseteq \Delta : X = \left(\bigcup_{n=1}^N U_{\alpha_n} \right) \cup \mathbb{C}_X M$$

geçerlidir, yani $\{U_{\alpha_n}\}_{n=1}^N \cup \{\mathbb{C}_X M\}$ ailesi X için bir sonlu alt örtülüştür. O halde $\{U_{\alpha_n}\}_{n=1}^N$, M için bir açık örtülüştür.

(b) K , X in kompakt alt kümesi ve $y \notin K$ olsun. $y \notin \overline{K}$ olduğunu göstermek yeterlidir (bu $\overline{K} \subseteq K$ dolayısıyla $\overline{K} = K$ verir). Her bir $x \in K$ için $\epsilon_x = d(x, y)/2$ olsun. Bu durumda $B_d(x, \epsilon_x) \cap B_d(y, \epsilon_x) = \emptyset$ geçerlidir. $\{B_d(x, \epsilon_x)\}_{x \in K}$, K için açık örtülüştür ve K kompakt olduğundan

$$\exists \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq K : K \subseteq \bigcup_{n=1}^N B_d(x_n, \epsilon_{x_n}).$$

gerçeklenir. $\epsilon = \min \{\epsilon_{x_1}, \dots, \epsilon_{x_N}\}$ olsun. Bu durumda $B_d(y, \epsilon) \cap K = \emptyset$ tur, çünkü $x \in K$ ise

$$\exists n \in \{1, \dots, N\} : x \in B_d(x_n, \epsilon_{x_n}) \Rightarrow x \notin B_d(y, \epsilon_{x_n})$$

$$B_d(y, \epsilon) \subseteq B_d(y, \epsilon_{x_n}) \Rightarrow x \notin B_d(y, \epsilon) \Rightarrow y \notin \overline{K}$$

Teorem.

(a) Kompakt bir uzayın sürekli fonksiyon altındaki görüntüsü kompaktır.

(b) (X, d) ve (Y, ρ) kompakt metrik uzaylar $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ sürekli biyektif ise $f^{-1} : (Y, \rho) \rightarrow (X, d)$ sürekli, yani f bir homeomorfidir.

İspat. (a) (X, d) kompakt metrik uzay $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ sürekli olsun. $f(X)$ kompakt mıdır? $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, $f(X)$ için açık örtülüş, yani $f(X) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ olsun.

$$f(X) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \Rightarrow X \subseteq f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \Delta} f^{-1}(U_\alpha)$$

geçerlidir, yani $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Delta}$, X için bir açık örtülüştür, X kompakt olduğundan

$$\exists \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} \subseteq \Delta : X \subseteq \bigcup_{n=1}^N f^{-1}(U_{\alpha_n})$$

gerçeklenir, buradan hareketle

$$\Rightarrow f(X) \subseteq f\left(\bigcup_{n=1}^N f^{-1}(U_{\alpha_n})\right) = \bigcup_{n=1}^N f(f^{-1}(U_{\alpha_n})) \subseteq \bigcup_{n=1}^N U_{\alpha_n}$$

geçerlidir, yani $f(X)$ kompaktır.

b) $f^{-1} : (Y, \rho) \rightarrow (X, d)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek için, $U \in \tau_d$ için $(f^{-1})^{-1}(U) (= f(U)) \in \tau_\rho$ gerçekleştiğini, yani f in açık kümeleri açık kümelere götürdüğünü göstermeliyiz. $\mathbb{C}_X U$ kompakt uzayın kapalı alt kümesi olduğundan kompaktır, dolayısıyla $f(\mathbb{C}_X U)$ Y de kompakt olduğundan kapalı, f biyektif olduğundan $f(\mathbb{C}_X U) = \mathbb{C}_Y f(U)$ kapalı yani $f(U)$ açık $f^{-1} : Y \rightarrow X$ sürekli.

Teorem. Eğer (X, d) kompakt metrik uzay, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ da X in açık örtülüğü ise her $\forall x \in X$ için $(\exists \varepsilon > 0) \wedge (\exists \alpha \in \Delta) : B_d(x, \varepsilon) \subseteq U_\alpha$ gerçekleşir. $\varepsilon > 0$ sayısı X in $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ açık örtülüğünün Lebesgue sayısı olarak isimlendirilir.

İspat. $X = \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ ise $\forall x \in X$ için

$$\exists \alpha^* \in \Delta : x \in U_{\alpha^*} \in \tau_d \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq U_{\alpha^*}$$

gerçeklenir.

$\{B_d(x, \frac{\varepsilon_x}{2}) : x \in X\}$ ailesi de X için bir açık örtülüştür ve X kompakt olduğundan bu ailenin sonlu bir $\{B_d(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})\}_{i=1}^m$ alt örtülüğü vardır.

Lebesgue sayısı $\varepsilon = \min \left\{ \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} : i \in \{1, \dots, m\} \right\}$ ile tanımlanır. Gerçekten $x \in X \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, m\} : x \in B_d(x_j, \frac{\varepsilon_{x_j}}{2})$ geçerlidir.

$$y \in B_d(x, \varepsilon) \Rightarrow d(y, x_j) \leq d(y, x) + d(x, x_j) < \varepsilon + \frac{\varepsilon_{x_j}}{2} \leq \varepsilon_{x_j}$$

dolayısıyla bir U_α için

$$B_d(x, \varepsilon) \subseteq B_d(x_j, \frac{\varepsilon_{x_j}}{2}) \subseteq U_\alpha$$

gerçeklenir.

Tanım. X metrik uzayının $A (\subseteq X)$ alt kümesine, eğer her $\epsilon > 0$ için bir $\{x_n\}_{n=1}^N$ *sonlunoktakmesi* $A \subseteq \bigcup_{n=1}^N B(x_n; \epsilon)$ gerçekleşmek üzere varsa, tümel sınırlıdır denir. Bunu ifade etmenin başka bir yolu, A nın her noktasının x_n noktalarından en az birine ϵ uzaklığı içinde olmasıdır. $\{x_n\}_{n=1}^N$ kümesi A nın ϵ -ağı olarak isimlendirilir.

Tanım. (X, d) metrik uzayının $A (\subseteq X)$ alt kümesi bir $x \in X$ ve $\epsilon > 0$ için $A \subseteq B_d(x, \epsilon)$ gerçekleşiyorsa sınırlı olarak isimlendirilir.

Teorem. Her tümel sınırlı küme sınırlıdır.

İspat. (X, d) metrik uzay $A \subseteq X$ olsun. A nın çap $(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\} < \infty$ ise sınırlı olduğunu biliyoruz. A nın tümel sınırlı olduğunu varsayalım, bu durumda bir $\epsilon > 0$ için bir $\{x_n\}_{n=1}^N$ *sonlunoktakmesi* $A \subseteq \bigcup_{n=1}^N B_d(x_n, \epsilon)$ gerçekleşmek üzere vardır. $x, y \in A$ olsun. Bu durumda

$$\exists x_l, x_m \in \{x_n\}_{n=1}^N : (d(x_l, x) < \epsilon) \wedge (d(x_m, y) < \epsilon)$$

gerçeklenir. Ayrıca her $x_l, x_m \in \{x_n\}_{n=1}^N$ için

$$\exists \beta > 0 : (0 < \beta < \infty) \wedge (d(x_l, x_m) < \beta)$$

geçerlidir. Bu durumda

$$d(x, y) \leq d(x, x_l) + d(x_l, y)$$

$$\leq d(x, x_l) + d(x_l, x_m) + d(x_m, y) = d(x, x_l) + d(y, x_m) + d(x_m, x_l)$$

$$< \epsilon + \epsilon + \beta < \infty$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\text{çap}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\} < \infty$$

geçerlidir.

Örnek. $\ell^2 = \left\{ \mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$ ve $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}$ metriği gözönüne alırsa (ℓ^2, d_2) metrik uzayında

$$e_n = \left(0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n \text{ yinci koordinat}}, 0, \dots \right)$$

olmak üzere ℓ^2 de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yada $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi gözönüne alınsın. Bu durumda bütün e_n ler orjin merkezli kapalı birim yuvar yüzeyi üzerindedirler ve eğer $n \neq m \Rightarrow d(e_n, e_m) = \sqrt{2}$ geçerlidir.

$$\text{çap}(A) = \sup \{d(e_j, e_k) : e_j, e_k \in A\} = \sqrt{2} < \infty$$

yani A sınırlıdır. Dolayısıyla eğer $\epsilon < \sqrt{2}/2$ ise e_n dizisinin herhangi iki üyesi aynı ϵ yarıçaplı açık yuvarda olamaz, A yı örtmek için bu açık yuvarlardan sonsuz sayıdasına ihtiyaç duyarız, dolayısıyla tümel sınırlı değildir. Tümel sınırlılık ve sınırlılık sonsuz boyutlu uzaylarda denk değildir.

Teorem. $A, (X, d)$ metrik uzayının kompakt alt kümesi ise kapalı ve sınırlıdır.

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Bu durumda $\{B_d(x_0, \epsilon) \cap A : \epsilon > 0\}$, A için $\{B_d(x_0, \epsilon_1), \dots, B_d(x_0, \epsilon_n)\}$ sonlu alt örtülüşüne sahip bir açık örtülüştür. $\epsilon^* = \max \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ olsun. Bu durumda $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için

$$B_d(x_0, \epsilon_i) \subseteq B_d(x_0; \epsilon^*) \Rightarrow A \subseteq B_d(x_0; \epsilon^*)$$

gerçeklenir, yani A sınırlıdır.

A kapalı mıdır? $x \in \mathbb{C}_X A$ olsun, x i içeren ama A ile boş arakesite sahip bir açık küme bulabilmemiz ispatı tamamlamak için yeterlidir, bunun için A nın alt örtülüş özelliğini kullanmalıyız. $p \in A$ olsun. $p \neq x$ olduğundan $U_p = B_d(p, \frac{1}{2}d(p, x))$ ve $V_p = B_d(x, \frac{1}{2}d(p, x))$ ayrık açık kümelerdir. $\{U_p \cap A : p \in A\}$ ailesi A için açık örtülüştür ve A kompakt olduğu için bu örtülüş sonlu bir

$$\{U_{p_1} \cap A, \dots, U_{p_n} \cap A\}$$

alt örtülüşüne sahiptir,

$$A = \bigcup_{i=1}^n (U_{p_i} \cap A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{p_i}$$

gerçeklenir. $(x \in) V = V_{p_1} \cap \dots \cap V_{p_n}$ olsun. Bu durumda her bir $i \in \{1, \dots, n\}$ için ve

$$(V \cap U_{p_i} = \emptyset) \wedge (A \subseteq U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n})$$

geçerlidir, böylece V , x noktasını içeren ve A ile boş arakesite sahip bir açık kümedir.

$$A \subseteq U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n} \Rightarrow V \cap A \subseteq V \cap (U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n}) = \emptyset$$

geçerlidir, sonuçta $\mathcal{C}_X A$ açık, A kapalıdır.

Tanım. Bir (X, d) metrik uzayının *limit noktası kompakt* olması (ya da *Bolzano-Weierstrass kompakt* (kısaca BW-kompakt) olması) için gerek X in her sonsuz alt kümesinin X de bir yığılma noktasına sahip olmasıdır.

Teorem. Her kompakt metrik uzay limit noktası kompaktır.

İspat. (X, d) kompakt bir uzay, $A \subset X$ sonsuz alt küme ise A nın bir yığılma noktası olmak zorundadır, göstermeliyiz. Bunun karşıt tersini gösterelim. Eğer A kümesinin bir yığılma noktası yoksa A kümesi sonlu mudur?

A nın limit noktası bulunmadığını farzedelim, bu $A' = \emptyset$ ve $\overline{A} = A \cup A' = A \cup \emptyset = A$ yani A kapalı demektir. Bu durumda her bir $x \in X$ için, $x \notin A' (= \emptyset)$ dir, bu durumda $\exists \varepsilon_x > 0 : B_d(x, \varepsilon_x) \cap A \subseteq \{x\}$ geçerlidir. Yani $B_d(x, \varepsilon_x) \cap A$, A nın x den farklı noktasını içeremez, çünkü

$$B_d(x, \varepsilon_x) \cap A = \begin{cases} \emptyset & \text{eğer } x \notin A \text{ ise} \\ \{x\} & \text{eğer } x \in A \text{ ise} \end{cases}$$

geçerlidir. Her bir $x \in X$ noktasında A nın merkezinden farklı bir noktayı içermeyen (ki bu da da eğer $x \in A$ ise mümkündür) bir $B_d(x, \varepsilon_x)$ açık yuvarına sahibiz. O halde $\{B_d(x, \varepsilon_x) : x \in X\}$ ailesi X için bir açık örtülüdür, X kompakt olduğundan bu örtülüş sonlu bir $\{B_d(x_i, \varepsilon_{x_i})\}_{i=1}^N$ alt örtülüğüne sahiptir, yani $X = \bigcup_{i=1}^N (B_d(x_i, \varepsilon_{x_i}))$ geçerlidir.

$$\begin{aligned}
A &= A \cap X = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^N B_d(x_i, \varepsilon_{x_i}) \right) \\
&\Rightarrow A = \bigcup_{i=1}^N (A \cap B_d(x_i, \varepsilon_{x_i})) \\
\left(\begin{array}{c} A \cap B_d(x_i, \varepsilon_{x_i}) \subseteq \{x_i\} \\ \subseteq \end{array} \right) \bigcup_{i=1}^n \{x_i\} &= \{x_1, \dots, x_n\} \\
&\Rightarrow A \subseteq \{x_1, \dots, x_n\} \\
&\Rightarrow A \text{ sonludur.}
\end{aligned}$$

Tanım. Bir (X, d) metrik uzayı her sayılabilir açık örtülüğü sonlu alt örtülüğe sahipse *sayılabilir kompakt uzay* olarak isimlendirilir.

Tanım. Bir (X, d) metrik uzayı X daki her dizi yine X deki bir noktaya yakınsayan alt diziye sahip ise, *dizisel kompakt* olarak isimlendirilir.

Teorem. (X, d) metrik uzayının dizisel kompakt olması için gyk limit noktası kompakt (=B.W. Kompakt) olmasıdır.

İspat. (X, d) bir metrik uzay olsun.

X dizisel kompakt, $A \subseteq X$ sonsuz alt küme olsun. A dan terimleri birbirinden farklı bir (x_n) dizisi seçilebilir. X dizisel kompakt olduğundan (x_n) dizisi, bir $x \in X$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisine sahiptir.

İddia. $x \in A'$?

$\epsilon > 0$ verilsin. $k \rightarrow \infty$ için $x_{n_k} \rightarrow x$ gerçekleştiğinden $\exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N \Rightarrow x_{n_k} \in B_d(x, \epsilon)$ geçerlidir. Fakat (x_n) dizisi A dan seçilen terimleri birbirinden farklı bir dizi olduğundan $\forall k \geq N$ için $x \neq x_{n_k}$ dir. Böylece $B_d(x, \epsilon)$ bir $k \geq N$ için x den farklı bir x_{n_k} terimi içerir. O halde $x \in A'$ gerçekleşir.

O halde X in her sonsuz alt kümesi X de bir yığılma noktasına sahiptir, dolayısıyla X limit noktası kompakttır.

Tersine X limit noktası kompakt olsun, yani X in her sonsuz alt kümesi X de bir yığılma noktasına sahip olsun. (x_n) dizisi X de keyfi bir dizi olsun. İspatı tamamlamak için bu dizinin yakınsak bir alt diziye sahip olduğunu göstermeliyiz. A , (x_n) dizisinin görüntü kümesi olsun. Olası iki durum vardır:

Durum 1. A sonlu bir kümedir.

Bu yalnızca A kümesinin elemanlarından birisinin (x_n) dizisinde sonsuz kez gözükmesiyle mümkündür. Bu durumda sabit bir alt dizi (her bir terimi dizide sonsuz kez gözüken elemana eşit olan alt dizi) elde edilmiş olur, bu da yakınsak bir dizidir.

Durum 2. A sonsuz bir kümedir.

X limit noktası kompakt ve A da X de sonsuz bir küme olduğundan A kümesi X de en az bir yığılma noktasına sahiptir, bu nokta x olsun. Bu durumda $B_d(x, 1)$, A nın sonsuz sayıda elemanını içerir. Bu elemanlardan $x_{n_1} \in B_d(x, 1) \setminus \{x\}$ seçelim. Yine $B_d(x, \frac{1}{2})$ A nın sonsuz sayıda elemanını içerdiğinden $n_2 > n_1$ olmak üzere $x_{n_2} \in B_d(x, \frac{1}{2}) \setminus \{x\}$, $B_d(x, \frac{1}{3})$ de A nın sonsuz sayıda elemanını içerdiğinden $n_3 > n_2$ olmak üzere $x_{n_3} \in B_d(x, \frac{1}{3}) \setminus \{x\}$ ve böyle devam edilerek (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) alt dizisi

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } x_{n_k} \in B_d(x, \frac{1}{k}) \Rightarrow k \rightarrow \infty \text{ için } d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k} \rightarrow 0 \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow x$$

gerçeklenmek üzere seçilebilir. Böylece her (x_n) dizisi yakınsak bir alt diziye sahip olduğundan dizisel kompakttır.

Teorem. Eğer (X, d) metrik uzayı kompakt ise dizisel kompakttır.

Proof. İspat. x_n , X de bir dizi olsun. Yakınsak alt dizisi yoksa her bir $x \in X$ için bir $\delta(x) > 0$ ve bir $N(x) \in \mathbb{N} \forall n \geq N(x)$ için $x_n \notin B_d(x, \delta(x))$ olacak şekilde bulunabilir.

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} B(x, \delta(x)) \subseteq X,$$

gerçeklendiğinden $B(x, \delta(x))$ açık yuvarları bir açık örtülüştür ve kompaktlıktan bu örtülüş sonlu bir alt örtülüşe sahiptir. Diğer bir söyleyişle bir M ve $y_j \in X$ ($j \in \{1, \dots, M\}$)

$$X = \bigcup_{j=1}^M B(y_j, \delta(y_j))$$

olacak şekilde vardır.

$N = \max_{1 \leq j \leq M} N(y_j)$ tanımlansın. Since $N \geq N(y_j)$ gerçekleştiğinden her bir $j \in \{1, \dots, M\}$ için $x_N \notin B(y_j, \delta(y_j))$ geçerlidir. Böylece $x_N \notin \bigcup_{j=1}^M B(y_j, \delta(y_j)) = X$ çelişkisi elde edilir. $\square$

Sonuç. Kompakt metrik uzay dizisel kompakttır.

Teorem. (X, d) sayılabilir kompakt metrik uzay ise tümel sınırlıdır.

İspat. X in tümel sınırlı olmadığını farzedelim. Bu durumda bir $\varepsilon >$

0 için bir $\{x_n\}_{n=1}^N$ sonlu nokta kümesi $X \neq \bigcup_{n=1}^N B_d(x_n, \varepsilon)$ gerçeklenmek üzere vardır.

İndüksiyonla bir $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$y_1 \in X,$$

$$y_2 \in X \setminus B_d(y_1, \varepsilon),$$

$$\text{ve } N \geq 1 \text{ için}$$

$y_{N+1} \in X \setminus \bigcup_{n=1}^N B_d(y_n, \varepsilon)$
seçilsin. İki durum söz konusudur:

i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_d(y_i, \varepsilon) = X$ olabilir.

Bu durumda $\{B_d(y_n, \varepsilon) : n \in \mathbb{N}\}$ X in sayılabilir açık örtülüştür. Fakat bu örtülüş sonlu bir alt örtülüşe indirgenemez, çünkü her $j \in \mathbb{N}$ için $y_j \in X \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N} \setminus \{j\}} B_d(y_i, \varepsilon)$ geçerlidir. Bu ise X in sayılabilir kompaktlığı ile çelişir.

ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_d(y_n, \varepsilon) \neq X$ olabilir.

Bütün $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_d(y_i, \varepsilon)$ noktaları üzerinden birleşim alınarak $V = \bigcup \left\{ B_d(x, \varepsilon) : x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_d(y_i, \varepsilon) \right\}$ tanımlansın. Bu durumda $\{B_d(y_i, \varepsilon) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{V\}$ ailesi X için bir açık örtülüştür. Bu örtülüşte sonlu alt örtülüşe sahip değildir. $X = V \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_d(y_j, \varepsilon) \right)$ farzedelim, bir $r \in \mathbb{N}, r > \max_{1 \leq j \leq k} i_j$ gerçekleşmek üzere seçilsin.

$$y_r \notin V \cup \left(\bigcup_{j=1}^k B_d(y_j, \varepsilon) \right)$$

olduğunu göstererek çelişki yakalamaya çalışacağız.

$$y_r \in V$$

farzedelim. Bu durumda bir $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_d(y_i, \varepsilon)$ için $y_r \in B_d(x, \varepsilon)$ gerçekleşir. $d(x, y_r) < \varepsilon$ olduğundan $x \in B_d(y_r, \varepsilon)$ gerçekleşir, çelişki.

Son olarak r nin tanımından $y_r \notin \left(\bigcup_{j=1}^k B_d(y_{i_j}, \varepsilon) \right)$ bu ise ispatı tamamlar.

Teorem. (X, d) sayılabilir kompakt metrik uzay ise 2. sayılabilir.

İspat. $n \in \mathbb{N}$ verilsin. Son teoremden X in $x_{n,1}, \dots, x_{n,r_n}$ elemanları $X = \bigcup_{i=1}^{r_n} B_d(x_{n,i}, \frac{1}{n})$ gerçekleşmek üzere vardır.

$$B = \left\{ B_d(x_{n,i}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N} \text{ ve } i \in \{1, \dots, r_n\} \right\}$$

ailesi gözönüne alınsın. Bu durumda $\mathcal{B} (\subseteq \tau_d)$ sayılabilir. $\mathcal{B}$ nin taban olduğunu göstereceğiz.

$$y \in V \in \tau_d$$

olsun. Bir $\varepsilon > 0$ için $y \in B_d(y, \varepsilon) \subseteq V$ gerçekleşir. Bir K pozitif tam-sayısı $\frac{1}{K} < \frac{\varepsilon}{2}$ gerçeklemek üzere seçilsin. X in $x_{K_1}, \dots, x_{K_{r_K}}$ elemanları

için $X = \bigcup_{i=1}^{r_K} B_d(x_{K_i}, \frac{1}{K})$ gerçekleşir. Bu durumda bir $j \in \{1, \dots, r_K\}$

için $y \in B_d(x_{K_j}, \frac{1}{K})$ dir.

İddia. $B_d(x_{K_j}, \frac{1}{K}) \subseteq B_d(y, \varepsilon)$ dir?

$t \in B_d(x_{K_j}, \frac{1}{K})$ olsun. Bu durumda K nın seçiminden

$$d(y, t) \leq d(y, x_{K_j}) + d(x_{K_j}, t) < \frac{1}{K} + \frac{1}{K} < \varepsilon$$

gerçeklenir. Yani $\mathcal{B}, (X, d)$ için tabandır.

Teorem. (X, d) nin kompakt metrik uzay olması için gyk sayılabilir kompakt olmasıdır.

İspat. (X, d) kompakt metrik uzay olsun. X in her sayılabilir açık örtülüğü X kompakt olduğundan sonlu alt örtülüğe sahiptir.

(X, d) sayılabilir kompakt olsun. Bu durumda (X, d) 2. sayılabilir.

Örnek. $\mathbb{R}$ ayrık metrik d ile gözönüne alınsın. Bu metriğe göre $\mathbb{R}, M = 1$ ile sınırlıdır ($\mathbb{R} \subseteq B_d(0, 1)$), her karşılaştırma kümesi hem açık hem de kapalı olduğundan $\mathbb{R}$ kapalıdır. Ama $\{B_d(x, \frac{1}{2}) = \{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ açık örtülüğü sonlu alt örtülüğe sahip olmadığından kompakt değildir.

Teorem. Her sayılabilir kompakt metrik uzay (X, d) her bir $\varepsilon > 0$ için bir ε -ağa sahiptir.

İspat. Tersine X in bir $\varepsilon > 0$ için bir ε -ağa sahip olmadığını farzedelim. $x_1 \in X$ keyfi seçilsin ve $B_d(x_1, \varepsilon)$ gözönüne alınsın. $\{x_1\}$ kabulden X için bir ε -ağ olmadığından $x_2 \in X, d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ olacak şekilde vardır. Böylece $x_1 \notin B_d(x_2, \varepsilon)$ dir. Yine $\{x_1, x_2\}, X$ için ε -ağ olmadığından $x_3 \in X, d(x_1, x_3) \geq \varepsilon, d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$ olacak şekilde vardır ve $x_3 \notin B_d(x_1, \varepsilon) \cup B_d(x_2, \varepsilon)$ geçerlidir. İndüksiyonla devam edilirse, eğer $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} X$ için bir ε -ağ değilse $\exists x_{n+1} \in X : \forall k \in \{1, \dots, n\}$ için

$x_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^n B_d(x_k, \varepsilon)$ gerçekleşir. Böylece X de bir (x_n) dizisi $i, j \in \mathbb{N}$

$(i \neq j)$ için $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ gerçeklemek üzere tanımlanmış olur. X sayılabilir kompakt olduğundan (x_n) dizisi X de $x_0 \in X$ noktasına yakınsayan bir alt diziye sahiptir. Bu durumda $B_d(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ (x_n) dizisinin görüntü kümesinin sonsuz sayıda noktasını içerir ve dolayısıyla eğer $x_i, x_j \in B_d(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ ise $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ gerçekleşir. Bu ise dizinin inşası ile çelişir, yani $i, j \in \mathbb{N} (i \neq j)$ için $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ ile çelişir. O halde X in her bir $\varepsilon > 0$ için bir ε -ağa sahiptir. $\square$

18. Tam Metrik Uzaylar

Tanım. (X, d) metrik uzayı ve $\{x_n\} \subseteq X$ dizisi gözönüne alınsın. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N \in \mathbb{N}$ eğer $n \geq N$ ve $m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

gerçeklenmek üzere varsa $\{x_n\} \subseteq X$ dizisi Cauchy dizisi olarak isimlendirilir.

Teorem. (X, d) metrik uzayında bir $\{x_n\} \subseteq X$ dizisi yakınsak ise Cauchy dizisidir.

İspat. (X, d) metrik uzayında $x_n \rightarrow x$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Yakınsaklıktan bir $N \in \mathbb{N}$ eğer $n \geq N$ ise $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ gerçeklenmek üzere seçilebilir. Eğer $n \geq N$ ve $m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ geçerlidir. Yani $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir. $\square$

Örnek. $X = (0, 1)$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olsun. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi bu uzayda bir Cauchy dizisidir, ama $0 \notin (0, 1)$ olduğundan bu uzayda yakınsamaz ve $(0, 1)$ in her noktası $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin en fazla bir noktasını içeren bir komşuluğa sahiptir.

Alıştırma. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathbb{R}$ de de bir Cauchy dizisidir, gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. Problem her $n, m \geq N_0 (= N_0(\varepsilon))$ için

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon$$

gerçeklenmek üzere bir $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ belirlenmesidir. Arşimet özelliğinden $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\frac{1}{N_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ gerçeklenmek üzere bir $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır. En küçük N_0 sayısını belirlemek zorunda değiliz, çünkü $n, m > N_0$ için

$$\left(\frac{1}{n} < \frac{1}{N_0}\right) \wedge \left(\frac{1}{m} < \frac{1}{N_0}\right)$$

ve

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

gerçeklenir ve $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathbb{R}$ de de bir Cauchy dizisidir.

Örnek. $X \neq \emptyset$ kümesi ve

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x = y \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x \neq y \text{ ise} \end{cases}$$

ayrık metriği gözönüne alınsın. Bu uzayda Cauchy dizisi olma şartı nedir?

Çözüm. $\{x_n\} (\subseteq X)$ dizisi bu uzayda Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ verilsin. Bu durumda $n, m \geq N_0 (= N_0(\varepsilon))$ için

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu ise ayrık metriğin yapısından dolayı $x_n = x_m$ olmasını gerektirir. O halde üzerinde ayrık metrik tanımlı bir X uzayında bir Cauchy dizisi belli bir indisten sonra sabitlenen dizi olmalıdır, yani

$\{x_n\} (\subseteq X)$ dizisinin terimleri $x_1, x_2, \dots, x_k, x, x, x, x, \dots$ formunda olmalıdır.

Örnek. $X = \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $d(x, y) = |x - y|$ olsun. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, $\sqrt{2}$ ye yada başka bir irrasyonel sayıya yakınsayan rasyonel sayı dizisi olsun. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bu uzayda bir Cauchy dizisidir, ama $\sqrt{2} \notin X = \mathbb{Q}$ olduğundan bu uzayda yakınsamaz.

Teorem. (X, d) bir metrik uzay $\{x_n\} \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun.

(i) $\{x_n\} \subseteq X$ dizisinin Cauchy dizisi olması için $\text{gyk } n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ için $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ gerçekleşmesidir.

(ii) $x_n \rightarrow x$ yakınsaması için $\text{gyk } n \rightarrow \infty$ için $d(x_n, x) \rightarrow 0$ gerçekleşmesidir.

İspat. (i) $\{x_n\} \subseteq X$ dizisinin Cauchy dizisi olması için gyk verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\exists N \in \mathbb{N}$ eğer

$$n \geq N \text{ ve } m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$\iff (\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \Rightarrow |d(x_n, x_m) - 0| < \varepsilon)$$

$$\iff n, m \rightarrow \infty \text{ için } d(x_n, x_m) \rightarrow 0.$$

(ii) $x_n \rightarrow x$ yakınsaması için $\text{gyk } \varepsilon > 0$ verildiğinde

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$\iff \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |d(x_n, x) - 0| < \varepsilon$$

$$\iff n \rightarrow \infty \text{ için } d(x_n, x_m) \rightarrow 0.$$

gerçeklenir.

Açıklama. $\{x_n\} (\subseteq X)$ dizisi (X, d) metrik uzayında Cauchy dizisi, $\{x_{n_k}\}$ ise bu dizinin alt dizisi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n_k}) = 0$ geçerlidir, gösterin.

Çözüm. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olduğundan $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N_0 - 1 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$ gerçekleşir. Dolayısıyla $N_0(k) \geq N_0 > N_0 - 1$ ve $d(x_{N_0}, x_{N_0(k)}) < \varepsilon$ gerçekleşir, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n_k}) = 0$ gerçekleşir. $(x_{N_0(k)}) \in \{x_{n_k}\}$.

Teorem. Bir $\{x_n\} (\subseteq X)$, (X, d) metrik uzayında bir dizi olsun.

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

$$A_2 = \{x_2, x_3, x_4, \dots\}$$

$$A_3 = \{x_3, x_4, x_5, \dots\}$$

$\vdots$

tanımlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olması için $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{çap}(A_n) = 0$ gerçekleşmesidir.

İspat. $(\Rightarrow)$ $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$ gerçekleşir. Böylece $n > N$ için $\text{çap}(A_n) < \varepsilon$. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi seçildiğinden $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{çap}(A_n) = 0$ gerçekleşir.

$(\Leftarrow)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{çap}(A_n) = 0$ gerçeklensin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow \text{çap}(A_n) < \varepsilon$ gerçekleşir. Diğer bir söyleyişle $\forall n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$ yani $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisidir.

Alıştırma. Bir $\{x_n\} (\subseteq X)$ dizisi (X, d) metrik uzayında Cauchy dizisi ve $\{y_n\} (\subseteq X)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ gerçekleyen bir dizi olsun. Gösteriniz:

i) $\{y_n\}$ de bir Cauchy dizisidir.

ii) $\{y_n\}$ in $x \in X$ noktasına yakınsaması için $\{x_n\} (\subseteq X)$ dizisinin de $x \in X$ noktasına yakınsamasıdır.

Çözüm. i) Üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, y_n)$$

$$\leq d(y_m, x_m) + d(y_n, x_n) + d(x_n, y_m)$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \Rightarrow d(y_m, y_n) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + d(x_n, y_m)$$

gerçeklenir. $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olduğundan

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N_2 \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

gerçeklenir. $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ alınırsa $n, m \geq N_3 \Rightarrow d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$ elde edilir. O halde $\{y_n\}$ de bir Cauchy dizisidir.

ii) Benzer şekilde

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x)$$

geçerlidir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x)$$

yazılabilir, fakat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

geçerlidir. Eğer $n \rightarrow \infty$ için $y_n \rightarrow x$ ise bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x) = 0$$

ve bu durumda da $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x$ geçerlidir. Benzer şekilde $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x$ ise $y_n \rightarrow x$ geçerlidir.

Tanım. Bir (X, d) metrik uzayı (X, d) uzayındaki her Cauchy dizisi (X, d) de yakınsak ise tam metrik uzay olarak isimlendirilir. Metrik uzay, uzaydaki her Cauchy dizisi uzaydaki bir noktaya yakınsıyor ise tam metrik uzay olarak isimlendirilir.

Örnek. a) $\mathbb{R}$ tamdır. Reel sayılardan oluşan her Cauchy dizisi bir reel sayıya yakınsar.

b) $\mathbb{R}^n$ tamdır.

c) $(0, 1)$ tam değildir.

d) $[0, 1]$ tamdır.

e) $\mathbb{Q}$ tam değildir.

f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tam değildir.

Alıştırma. (X, d) bir metrik uzay olsun. $A \subseteq X$ alt kümesi için $\text{çap}(A) = \text{çap}(\bar{A})$ geçerlidir.

Çözüm. $\forall \varepsilon > 0$ için $\text{çap}(\bar{A}) < \text{çap}(A) + \varepsilon$ geçerli olduğunu göstermeliyiz.

$x, y \in \bar{A}$ farzedelim. Bu durumda $B_d(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$ ve $B_d(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$ geçerlidir. $x', y' \in A$ noktalarını $x' \in B_d(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$ ve $y' \in B_d(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$ olacak şekilde seçebiliriz. Bu durumda

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(y, y')$$

$$\leq d(x, x') + d(y, y') + d(x', y') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \text{çap}(A)$$

$$= \varepsilon + \text{çap}(A)$$

geçerlidir. Dolayısıyla

$$\text{çap}(\bar{A}) < \text{çap}(A) + \varepsilon$$

geçerli ve dolayısıyla

$$\text{çap}(\overline{A}) \leq \text{çap}(A)$$

gerçeklenir. Ayrıca $A \subseteq \overline{A}$ geçerli olduğundan

$$\text{çap}(A) \leq \text{çap}(\overline{A})$$

geçerlidir. Böylece

$$\text{çap}(A) = \text{çap}(\overline{A})$$

geçerlidir.

Teorem. (Cantor Teoremi). (X, d) tam bir metrik uzay, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ise bu uzayda boştan farklı kapalı kümelerin $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{çap}(A_n) = 0$ gerçekleyen sayılabilir bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ geçerlidir.

İspat. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in A_n$ seçelim. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 \Rightarrow \text{çap}(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ geçerlidir. $k, l > N_0$ için $a_k, a_l \in A_{N_0+1}$ olsun. Bu durumda

$$d(a_k, a_l) < \varepsilon$$

geçerlidir. Böylece $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi (X, d) metrik uzayında Cauchy dizisidir. Hipotezden X tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in X$ geçerlidir. Dolayısıyla her bir n için $\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ dizisi de a noktasına yakınsayan bir dizidir. $\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \subset A_n$ geçerlidir. Her bir n için A_n kapalı olduğundan

$$a \in \overline{A_n} = A_n$$

geçerlidir. Böylece $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ve $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ gerçekleşir.

Teorem. Bir (X, d) metrik uzayının tam olması için gerek bu uzayda boştan farklı kapalı kümelerin içi içe yuvalanmış (yani $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ gerçekleyen) ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{çap}(A_n) = 0$ gerçekleyen her $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ailesi için $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ gerçekleşmesidir.

İspat. “ (X, d) metrik uzayının tamdır $\Leftrightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ ” ifadesini ispatlamalıyız.

($\Rightarrow$) Bu Cantor Teoremidir, gösterdik.

($\Leftarrow$) Boştan farklı kapalı kümelerin içi içe yuvalanmış (yani $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ gerçekleyen) ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{çap}(A_n) = 0$ gerçekleyen her $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ailesi için $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ gerçekleşsin. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

X de bir Cauchy dizisi olsun.

$$C_1 = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}, A_1 = \overline{C_1}$$

$$C_2 = \{x_2, x_3, x_4, \dots\}, A_2 = \overline{C_2}$$

$$C_3 = \{x_3, x_4, x_5, \dots\}, A_3 = \overline{C_3}$$

$\vdots$

tanımlayalım. Bu durumda $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{çap}(A_n) = 0$ ve $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ X in kapalı, boştan farklı alt kümelerinin bir ailesidir. Dolayısıyla $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ gerçekleşir. $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ olsun.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 \Rightarrow \text{çap}(A_n) < \varepsilon$$

gerçeklenir.

$$\text{çap}(C_n) = \text{çap}(A_n) < \varepsilon$$

sağlandığından $\forall n \geq N_0$ için

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

sağlanır. O halde $x_n \rightarrow x \in X$ geçerlidir.

Teorem. (X, d) tam metrik uzay ve $Y \subseteq X$ ve d_Y, d nin $Y \times Y$ ye kısıtlanması olsun. Bu durumda (Y, d_Y) nin tam metrik uzay olması için Y nin X in kapalı alt kümesi olmasıdır.

İspat. Y, X de kapalı alt küme ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (Y, d_Y)$ de Cauchy dizisi olsun. d_Y, d nin kısıtlanması olduğundan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (X, d)$ de de Cauchy dizisidir. X tam uzay olduğundan bir $x \in X$, $x_n \rightarrow x$ olmak üzere vardır. O halde $x \in \overline{Y}$ geçerlidir. Y kapalı olduğundan $x \in Y$ dir. O halde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi Y de bir limite sahiptir. O halde Y **tamdır**.

(Y, d_Y) nin tam metrik uzay olsun. Y nin kapalı olduğunu göstermeliyiz. $x \in \overline{Y}$ farzedelim. Y de x e yakınsayan bir dizi seçebiliriz, Her n için $x_n \in Y$ olmak üzere $x_n \rightarrow x$ olsun. $x_n \rightarrow x$ olduğundan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi X de dolayısıyla (Y, d_Y) de bir Cauchy dizisidir. (Y, d_Y) tam uzay olduğundan bir $y \in Y$, $x_n \rightarrow y$ gerçekleşmek üzere vardır. Bu $y \in X$ demektir, dolayısıyla limitin tekliğinden $x = y$ dir. O halde $x \in Y$ dir, Y kapalıdır. $\square$

Alıştırma. $X = \mathbb{Z}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ metriği gözönüne alınsın. $\mathbb{Z}$ tam metrik uzaydır.

Tamam
Tam Anlatıldı
Kompaktlık
Atlandı

Buradan 126'ya geçtik.

Çözüm. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{Z}$ üzerinde bir Cauchy dizisi olsun, yani dizinin her bir terimi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ kümesine aittir. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x, x, x, \dots\}$ formundadır. Gerçekten eğer $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alınırsa $x_n, x_m \in \mathbb{Z}$ ve

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2} \Rightarrow x_n = x_m$$

gerçeklenmeli. Bu durumda dizi $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x, x, x, \dots\}$ formundadır ve x noktasına yakınsar.

Alıştırma. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için $d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}$ metriği gözönüne alınsın. $\mathbb{R}^n$ tam bir uzaydır.

Çözüm. $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$ (yani $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}), \dots$) olmak üzere $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ için $\mathbb{R}^n$ de Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^n$ de Cauchy dizisi olduğundan

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall m, p \geq N_0$$

$$\Rightarrow d(x^{(m)}, x^{(p)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k^{(m)} - x_k^{(p)}|^2} < \varepsilon$$

geçerlidir. Her iki tarafın karesi alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k^{(m)} - x_k^{(p)}|^2 &< \varepsilon^2 \\ \Rightarrow |x_k^{(m)} - x_k^{(p)}|^2 &< \varepsilon^2 \Rightarrow |x_k^{(m)} - x_k^{(p)}| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$(\forall m, p \geq N_0) \wedge (k \in \{1, \dots, n\})$$

gerçeklenir. O halde her bir k için $(x_k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) dizileri de $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriğine göre Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan her bir $(x_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ de bir noktaya yakınsar. Her bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için $m \rightarrow \infty$ iken $x_k^{(m)} \rightarrow x_k$ gerçekleşir, yani $x_1^{(m)} \rightarrow x_1, x_2^{(m)} \rightarrow x_2, \dots, x_n^{(m)} \rightarrow x_n$ olur. Bu durumda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve dolayısıyla $m \rightarrow \infty$ için

$$\Rightarrow d(x^{(m)}, x^{(p)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k^{(m)} - x_k|} \rightarrow 0$$

geçerlidir. O halde $m \rightarrow \infty$ için $x^{(m)} \rightarrow x$ ve böylece $(x_k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ yakınsak, $\mathbb{R}^n$ tam bir uzaydır.

Örnek. $p \geq 1$, $\ell^p = \left\{ \mathbf{x} =: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$ olsun. $\ell^p \times \ell^p$ üzerinde $d_p : \ell^p \times \ell^p \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ için $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ile tanımlı

(ℓ^p, d) metrik uzayı tamdır gösteriniz.

Çözüm. Her bir $m = 1, 2, \dots$ için $x^{(m)} = \{x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots\}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)}|^p < +\infty$ olmak üzere $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ için ℓ^p de Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, ℓ^p de Cauchy dizisi olduğundan

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N_0$$

$$\Rightarrow d(x^{(m)}, x^{(n)}) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon(*)$$

geçerlidir. $\forall m, n \geq N_0, k = 1, 2, \dots$ için Her iki tarafın karesi alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^p < \varepsilon^p$$

$$\Rightarrow |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^p < \varepsilon^p \Rightarrow |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| < \varepsilon$$

$$((\forall m, p \geq N_0) \wedge (k = 1, 2, \dots))$$

gerçeklenir. o halde her bir k için $(1 \leq k < \infty)$ $(x_k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan her bir $(x_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ de bir noktaya yakınsar. Her bir k için $(1 \leq k < \infty)$ $m \rightarrow \infty$ iken $x_k^{(m)} \rightarrow x_k$ gerçekleşir, yani $x_1^{(m)} \rightarrow x_1, x_2^{(m)} \rightarrow x_2, \dots, x_n^{(m)} \rightarrow x_n, \dots$ olur. Bu durumda $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dir, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ ve $x^{(m)} \rightarrow x$ gerçekleştiğini göstermeliyiz. $(*)$ dan $(\forall m, p \geq N_0)$ ve $l = 1, 2, \dots$ için

$\sum_{k=1}^l \left| x_k^{(m)} - x_k^{(n)} \right|^p < \varepsilon^p$ olduğu açıktır. $l = 1, 2, \dots$ ve $(\forall m, p \geq N_0)$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ için

$$\sum_{k=1}^l \left| x_k^{(m)} - x_k \right|^p \leq \varepsilon^p$$

geçerlidir. $\left\{ \sum_{k=1}^l \left| x_k^{(m)} - x_k \right|^p \right\}_{l \geq 1}$ monoton artan üstten sınırlı bir dizi olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(m)} - x_k \right|^p$ sonlu limitine sahiptir, ki bu limit $\leq \varepsilon^p$ gerçektir. O halde $\forall m, p \geq N_0$ için

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left| x_k^{(m)} - x_k \right|^p \leq \varepsilon^p$$

geçerlidir.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(m)} - x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

geçerli olduğundan $x \in \ell^p$ dir. Ayrıca

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left| x_k^{(m)} - x_k \right|^p \leq \varepsilon^p \stackrel{(\forall m \geq N_0)}{\Rightarrow} d(x^{(m)}, x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x^{(m)} \rightarrow x \in \ell^p$$

O halde ℓ^p tamdır.

Örnek. $p \geq 1$, $\ell^\infty = \left\{ \mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < +\infty \right\}$ olsun. $\ell^\infty \times \ell^\infty$ üzerinde $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ için $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|$ ile tanımlı

(ℓ^∞, d) metrik uzayı tamdır gösteriniz.

Çözüm. Her bir $m = 1, 2, \dots$ için $x^{(m)} = \{x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots\}$ ve $\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < +\infty$ olmak üzere $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ için ℓ^∞ da Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, ℓ^∞ de Cauchy dizisi olduğundan

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N_0$$

$$\Rightarrow d(x^{(m)}, x^{(n)}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| < \varepsilon(*)$$

geçerlidir. $\forall m, n \geq N_0, k = 1, 2, \dots$ için

$$\left| x_k^{(m)} - x_k^{(n)} \right| < \varepsilon$$

gerçeklenir. O halde her bir k için $(k \in \mathbb{N}) \left(x_k^{(m)} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan her bir $\left(x_k^{(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ de bir noktaya yakınsar. Her bir k için $(k \in \mathbb{N}) m \rightarrow \infty$ iken $x_k^{(m)} \rightarrow x_k$ gerçekleşir, yani $x_1^{(m)} \rightarrow x_1, x_2^{(m)} \rightarrow x_2, \dots, x_n^{(m)} \rightarrow x_n, \dots$ olur. Bu durumda $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dir, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ ve $x^{(m)} \rightarrow x$ gerçekleştiğini göstermeliyiz. $k = 1, 2, \dots$ ve $(\forall m, p \geq N_0)$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ için

$$\left| x_k^{(m)} - x_k \right| < \varepsilon (*)$$

geçerlidir.

$$x^{(m)} = \left(x_k^{(m)} \right)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty \Rightarrow \exists N_m \in \mathbb{R}^+ : \forall k \in \mathbb{N}, \left| x_k^{(m)} \right| \leq N_m$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $k = 1, 2, \dots$ ve $(\forall m \geq N_0)$ olmak üzere

$$\left| x_k \right| = \left| x_k - x_k^{(m)} + x_k^{(m)} \right| \leq \left| x_k^{(m)} - x_k \right| + \left| x_k^{(m)} \right| \leq \varepsilon + N_m$$

gerçeklenir. Bu eşitsizlik her bir k için doğrudur ve eşitsizliğin sağ tarafı k dan bağımsızdır, dolayısıyla $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ geçerlidir. geçerli olduğundan $x \in \ell^p$ dir. Ayrıca $(*)$ dan

$$d(x^{(m)}, x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| x_k^{(m)} - x_k \right| < \varepsilon (\forall m \geq N_0)$$

$$\Rightarrow x^{(m)} \rightarrow x (\in \ell^\infty)$$

O halde ℓ^∞ tamdır.

Alıştırma. $C[a, b], [a, b]$ üzerinde reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi üzerinde $f, g \in C[a, b]$ için $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ metriği gözönüne alınsın. $(C[a, b], d)$ metrik uzayı tamdır.

Çözüm. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (C[a, b], d)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun.

$\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N_0$$

$$\Rightarrow d(f_m, f_n) = \sup_{x \in [a, b]} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon (*)$$

gerçeklenir. Bu durumda her sabit $x_0 \in [a, b]$ için $\forall m, n \geq N_0$ iken $|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ geçerlidir. Dolayısıyla $(f_m(x_0))_{m \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. $m \rightarrow \infty$ iken $f_m(x_0) \rightarrow f(x_0)$ olsun. Bu durumda her bir $x \in [a, b]$ ye tek bir $f(x) \in \mathbb{R}$ karşı gelir. Böylece $[a, b]$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu tanımlamış olduk. Şimdi $f \in C[a, b]$ ve $f_m \rightarrow f$ gerçekleştiğini göstermeliyiz. (*) dan $\forall m, n \geq N_0$ ve her $x \in [a, b]$ için $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ gerçekleşir. $n \rightarrow \infty$ için $\forall m \geq N_0$ ve her $x \in [a, b]$ için $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ elde edilir.

f in sürekli olduğunu göstermek için $x_0 \in [a, b]$ ve $\eta > 0$ gözönüne alalım. Son elde ettiğimiz sonuçtan

$$\exists N_1(\eta) \in \mathbb{N} : \forall m \geq N_1(\eta), \forall x \in [a, b] \text{ için } |f_m(x) - f(x)| < \frac{\eta}{3}$$

gerçeklenir.

$n \geq N_1(\eta)$ olsun. Bu durumda $\forall x \in [a, b]$ için $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\eta}{3}$ (**) gerçekleşir. f_n in sürekliliğinden

$$\exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f(x_0)| < \frac{\eta}{3} (***)$$

gerçeklenir. (**) ve (***) dan

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta$$

gerçeklenir. O halde $f \in C[a, b]$ dir.

$\forall m \geq N_0$ ve her $x \in [a, b]$ için $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ gerçekleştiğinden $\forall m \geq N_0$ için

$$d(f_m, f) = \sup_{x \in [a, b]} |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Ayrıca $\forall m \geq N_0$ için $d(f_m, f) \leq \varepsilon$ ve $m \rightarrow \infty$ iken $f_m \rightarrow f$ gerçekleşir. $(C[a, b], d)$ tam metrik uzaydır.

Alıştırma. $C[0, 1]$ sürekli fonksiyonlar kümesi, $\forall f, g \in C[0, 1]$ için

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

ile tanımlanan metriğe göre tam değildir?

Çözüm. $(f_n)_{n \geq 2}$, $C[0, 1]$ de

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \text{ ise} \\ nx - \frac{1}{2}n + 1 & , \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{2} \text{ ise} \\ 1 & , \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

İddiamız $(f_n)_{n \geq 2}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu ama $(C[0, 1], d)$ de yakınsamadığıdır?

$$\begin{aligned} d(f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx \\ &\leq \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} f_m(x) dx + \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} f_n(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

böylece $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ gerçeklemek üzere $\forall n, m \geq N_0$ için

$$d(f_m, f_n) < \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) < \varepsilon$$

gerçeklenir. Yani $(f_n)_{n \geq 2}$ dizisi Cauchy dizisidir. Bir $f \in C[0, 1]$ fonksiyonunun $d(f_n, f) \rightarrow 0$ gerçeklenmek üzere var olduğunu farzedelim. Fakat

$$d(f_n, f) = \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} |f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f(x)| dx$$

ve integrandlar nonnegatif olduğundan sağ taraftaki her bir integralde nonnegatiftir. $n \rightarrow \infty$ iken $d(f_n, f) \rightarrow 0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} |f(x)| dx = 0 \text{ ve } \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f(x)| dx = 0 \text{ olur. } f \text{ sürekli}$$

oldüğundan $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ için} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ için} \end{cases}$ verir. Ama bu fonksiyon sürekli değildir, çelişki. $C[0, 1]$ tam değildir.

Teorem. (X, d) tam olmayan bir metrik uzay olsun. Bu durumda $(\tilde{X}, \tilde{d})$ tam metrik uzayı X , $\tilde{X}$ uzayının yoğun alt kümesine izometrik olmak üzere vardır.

İspat. X deki bütün Cauchy dizilerinin topluluğu $C[X]$ gözönüne alınsın, bu diziler arasında aşağıdaki bağıntı gözönüne alınsın:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow \{x_n\} \sim \{y_n\}$$

İddia 1: X deki bütün Cauchy dizilerinin kümesi $C[X]$ üzerinde yukarıdaki bağıntı bir eşdeğerlik bağıntısıdır, çünkü

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_n) = 0 \Rightarrow \{x_n\} \sim \{x_n\} \Rightarrow \sim \text{refleksif}$$

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n) = 0 \Rightarrow \{y_n\} \sim \{x_n\} \Rightarrow \sim \text{simetrik}$$

$$(\{x_n\} \sim \{y_n\}) \wedge (\{y_n\} \sim \{z_n\}) \Rightarrow$$

$$0 \leq d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z_n) = 0 \Rightarrow \sim \text{transitif}$$

geçerlidir.

$\tilde{X}$, X deki bütün Cauchy dizilerinin eşdeğerlik sınıflarının kümesi olsun. $\tilde{X}$ in bir elemanını $[\{x_n\}]$, $\{x_n\}$ dizisini içeren eşdeğerlik sınıfı olmak üzere $\tilde{x} = [\{x_n\}]$ yazılışını kullanacağız. $\tilde{X}$ üzerinde $\tilde{d}$ metriği

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

ile tanımlansın.

İddia 2. $\tilde{d}$ metriğini tanımlayan limit vardır.

İspat. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ X de Cauchy dizileri olsun. $\{d(x_n, y_n)\}$ dizisinin $\mathbb{R}$ de Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &\leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m)| + |d(x_n, y_m) - d(x_m, y_m)| \\ &\leq d(y_n, y_m) + d(x_n, x_m) \end{aligned}$$

geçerlidir. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin her biri Cauchy dizisi olduğu için yeterince büyük n ve m için yukarıdaki ifadenin sağ tarafı istendiği kadar küçük kılınabilir. Bu da iddia 2 nin ispatını tamamlar.

İddia 3. $\tilde{d}$ metriğinin tanımı temsilciden bağımsızdır, yani $\{x_n^1\} \sim \{x_n^2\}$ ve $\{y_n^1\} \sim \{y_n^2\}$ ise bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^1, y_n^1) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^2, y_n^2)$ geçerlidir.

İspat. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |d(x_n^1, y_n^1) - d(x_n^2, y_n^2)| &\leq |d(x_n^1, y_n^1) - d(x_n^1, y_n^2)| + |d(x_n^1, y_n^2) - d(x_n^2, y_n^2)| \\ &\leq d(y_n^1, y_n^2) + d(x_n^1, x_n^2). \end{aligned}$$

geçerlidir ve tanımdan sağ taraf sıfıra gider, bu da ispatı tanımlar.

İddia 4. $\tilde{d}$, $\tilde{X}$ üzerinde bir metriktir.

İspat. $\tilde{x} = [\{x_n\}]$, $\tilde{y} = [\{y_n\}]$, $\tilde{z} = [\{z_n\}] \in \tilde{X}$ olsun.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y_n) \geq 0$ olduğundan

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d([\{x_n\}], [\{y_n\}]) \geq 0?$$

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}) = d([\{x_n\}], [\{x_n\}]) \stackrel{(d(x_n, x_n)=0)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_n) = 0$$

$$[\{x_n\}] \neq [\{y_n\}] \Rightarrow \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d([\{x_n\}], [\{y_n\}]) > 0$$

Çünkü

$$\{x_n\} \not\sim \{y_n\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) > 0$$

$$\tilde{x} = \tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d([\{x_n\}], [\{y_n\}]) \stackrel{\{x_n\}, \{y_n\} \in \tilde{x}(=\tilde{y})}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

geçerlidir.

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n) = d([\{y_n\}], [\{x_n\}]) = \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{x})$$

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, y_n) = d([\{x_n\}], [\{z_n\}]) + d([\{z_n\}], [\{y_n\}]) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \tilde{d}(\tilde{z}, \tilde{y})$$

İddia 5. $\tilde{X}$ tam metrik uzaydır.

İspat. $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, her bir k için $\tilde{x}_k = [\{x_n^k\}]$ olmak üzere, $\tilde{X}$ de bir Cauchy dizisi olsun. $\{\tilde{x}_k\}$ nın Cauchy olması verilen her bir $\epsilon > 0$ sayısına karşılık bir N doğal sayısı eğer $k, j \geq N$ iken

$$\tilde{d}(\tilde{x}_k, \tilde{x}_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^k, x_n^j) < \epsilon$$

gerçeklenmesi demektir. $\{\tilde{x}_k\}$ nın yakınsadığını göstermeliyiz. İlk olarak $\{\tilde{x}_k\}$ nın limiti için bir $\tilde{x}$ i tanımlamak olacaktır.

$\tilde{x}_1 = x_1^1$ tanımlayalım. $\{x_n^2\}$ Cauchy dizisi olduğu için bir $N(2) > 1$ doğal sayısını $m \geq N(2)$ iken $d(x_{N(2)}^2, x_m^2) < 1/2$ gerçekleşmek üzere seçebiliriz. Bu şekilde devam edilirse her bir k doğal sayısı için bir $N(k)$

$$(1) N(k) > N(k-1)$$

ve

$$(2) m \geq N(k) \text{ iken } d(x_{N(k)}^k, x_m^k) < 1/k$$

gerçeklenmek üzere seçilsin.

$$\tilde{x} = [\{x_{N(n)}^n\}]$$

tanımlayalım. $\{x_{N(n)}^n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu ve aslında $\tilde{x}$ in Cauchy dizilerinin bir eşdeğerlik sınıfı olduğunu aslında $\tilde{X}$ de olduğunu göstereceğiz. Bunu yapmak için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} d(x_{N(n)}^n, x_{N(m)}^m) = 0$$

olduğunu göstermeliyiz. $\forall j \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{N(n)}^n, x_{N(m)}^m) \leq d(x_{N(n)}^n, x_j^n) + d(x_j^n, x_j^m) + d(x_j^m, x_{N(m)}^m)$$

gerçeklenir. Her iki tarafta $j \rightarrow \infty$ alınırsa (ve sol tarafın j ye bağlı olmadığına dikkat edilirse)

$$\begin{aligned} d(x_{N(n)}^n, x_{N(m)}^m) &\leq \limsup (d(x_{N(n)}^n, x_j^n) + d(x_j^n, x_j^m) + d(x_j^m, x_{N(m)}^m)) \\ &\leq 1/n + 1/m \end{aligned}$$

gerçeklenir. $n, m \rightarrow \infty$ için sonuç elde edilir.

Son olarak $\tilde{x}_k \rightarrow \tilde{x}$ gerçekleştiğini göstermeliyiz. $\tilde{d}(\tilde{x}_k, \tilde{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^k, x_{N(n)}^n)$ olduğunu hatırlatalım. $\epsilon > 0$ olsun ve K da $1/K < \epsilon/2$ olacak kadar büyük ve $n, m > K \Rightarrow d(x_{N(n)}^n, x_{N(m)}^m) < \epsilon/2$ olmak üzere seçilsin. Eğer $k \geq K$ ise durumda

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{x}_k, \tilde{x}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^k, x_{N(n)}^n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n^k, x_{N(k)}^k) + \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_{N(k)}^k, x_{N(n)}^n) \\ &\leq \frac{1}{k} + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{1}{K} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

gerçeklenir. O halde, $\tilde{X}$ tam metrik uzaydır.

İDDİA 6. $X, \tilde{X}$ uzayının yoğun alt kümesine izometriktir.

İspat. $h: X \rightarrow \tilde{X}$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x$ olmak üzere $h(x) = [\{x_n\}]$ ile tanımlansın. $x, y \in X$ için $\tilde{d}(h(x), h(y)) = d(x, y)$ dir. $h(X), \tilde{X}$ da yoğun olduğunu göstermek için $s = [\{y_n\}] \in \tilde{X}$ olsun. Her bir k için, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n^k = y_k$ olmak üzere, $s_k = h(y_k) = [\{x_n^k\}]$ tanımlayalım. $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s$ geçerlidir.

93-94-95
Sorulabilir.

Homomorfizm

İspat

α, β

Homomorfizm

Metrik

Vize - Sorular

2. Metrik

Süreklilik

Kapanı - Sorular

Özdeşlik gösterme

19. Daraltma Dönüşümleri ve Sabit Noktalar

Tanım. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ de X den kendisine bir tasvir olsun. Eğer $Tx = x$ ise $x \in X$ noktası T için sabit nokta olarak isimlendirilir.

X üzerinde T tasviri, bir $\alpha < 1$ sabiti, her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ gerçekleşmek üzere varsa, daraltma dönüşümü olarak isimlendirilir.

Teorem. Let (X, d) bir tam metrik uzay ve T tasviri X üzerinde daraltma dönüşümü olsun. Bu durumda T tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. x_0, X de keyfi bir nokta olsun. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $x_n = Tx_{n-1}$ ile tanımlansın. T daraltma dönüşümü olduğundan bir $\alpha < 1$ sabiti her n için $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n)$ gerçekleşmek üzere vardır. Basit bir induksiyon ispatı ile $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$ olduğu gösterilebilir. $\alpha < 1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n < \infty$ geçerlidir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ Cauchy dizisi ve X tam olduğundan $\{x_n\}$ bir $x \in X$ noktasına yakınsar. T sürekli olduğundan

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x,$$

gerçeklenir, yani x, T için bir sabit noktadır. x tek sabit nokta mı? Eğer y de sabit nokta olsaydı

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y),$$

gerçeklenirdi, bu da $d(x, y) = 0$ veya $x = y$ olduğunu gösterir.

Teorem. (X, d) tam metrik uzayı üzerinde bir T daraltma dönüşümü ve $x_0 \in X$ keyfi noktası verilsin, $\{x_n\}$ dizisi teoremin ispatında verildiği şekilde tanımlayalım. Bu durumda

$$d(x_n, x) \leq \alpha^n \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha}$$

geçerlidir.

İspat. Sabit bir n gözönüne alalım ve $m > n$ olsun. Her bir n için $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) + d(x_m, x) \\ &\leq d(x_0, x_1) \left(\sum_{j=n}^{m-1} \alpha^j \right) + d(x_m, x) \end{aligned}$$

93-94-95

geçerlidir. İfadenin sağ tarafında $m \rightarrow \infty$ alınırsa

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq d(x_0, x_1) \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=n}^{m-1} \alpha^j \right) + \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x) \\ &= d(x_0, x_1) \sum_{j=n}^{\infty} \alpha^j \\ &= \alpha^n \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem. $x, y \in \mathbb{R}^n$ için Euclidean normun belirlediği $d(x, y) = \|x - y\| \left(= \langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}} \right) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ gözönüne alınsın. Aşağıdaki fonksiyonlar süreklidir:

- a) $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x, y) = x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- b) Sabit $a \in \mathbb{R}^n$ için $f_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_a(x) = a + x$
- c) Her sabit $\lambda \in \mathbb{R}$ için $f_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_\lambda(x) = \lambda x$
($\theta = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$)

İspat. a) $\varepsilon > 0$ verilsin, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ alalım. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ olsun.

$B_d(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \times B_d(y_0, \frac{\varepsilon}{2}) = B_{d^*}((x_0, y_0), \frac{\varepsilon}{2}) = U$, (x_0, y_0) ın açık komşuluğu burada d^* çarpım metriği, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ üzerinde Euclidean metrik d ile çıkarılır. Hatırlatma: $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrik uzay ise $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ için $d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$,

$$d^*((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \left[(d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_2))^2 \right]^{\frac{1}{2}}, d^{**}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) =$$

$d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$ fonksiyonları $X \times Y$ üzerinde denk metriklerdir.

$X = Y = \mathbb{R}^n$ için $d_X = d_Y = d$, $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için

$$d^*((x, y), (x', y')) = \left[(d_X(x, x'))^2 + (d_Y(y, y'))^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[(d(x, x'))^2 + (d(y, y'))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ fonksiyon}$$

$X \times Y = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ üzerindeki metrik olarak gözönüne alınırsa $(x, y), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için eğer $d^*((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ ise

$$d^*((x, y), (x_0, y_0)) = \left([d(x, x_0)]^2 + [d(y, y_0)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \delta$$

$$\Rightarrow (d(x, x_0) < \delta) \wedge (d(y, y_0) < \delta)$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$d(x + y, x_0 + y_0) \leq d(x + y, x + y_0) + d(x + y_0, x_0 + y_0)$$

$$= d(y, y_0) + d(x, x_0) < \delta + \delta = \varepsilon$$

Böylece eğer $(x, y) \in B_{d^*}((x_0, y_0), \delta)$ ise $f(x, y) \in B_d(f(x_0, y_0), \varepsilon)$ ve $f, (x_0, y_0)$ noktasında süreklidir.

$(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in U$ olsun. $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}), y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,n}) \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ için

$$|x_i + y_i - (x_{0,i} + y_{0,i})| \leq |x_i - x_{0,i}| + |y_i - y_{0,i}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

b) İlk şıkkın özel durumudur.

c) $\varepsilon > 0$ verilsin, $x \in \mathbb{R}^n$ alalım. $\lambda \neq 0$ ise $\delta = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ olsun. Bu durumda her $y \in \mathbb{R}^n$ için $d(x, y) < \delta$ için aşağıdakiler gerçekleşir:

$$d(f_\lambda(x), f_\lambda(y)) = d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \cdot \|x - y\| = |\lambda| \cdot d(x, y) = |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

$\lambda = 0$ ise $d(f_\lambda(x), f_\lambda(y)) = d(\theta, \theta) = 0 < \varepsilon$ geçerlidir. Her iki durumda da $f_\lambda(B_d(x, \delta)) \subset B_d(f_\lambda(x), \varepsilon)$ geçerlidir.