29 Kasım

-Hatırlatma-

Dual Uzaylar: V bir vektör uzayı, $\mathbb{F}$ bir cisim

$\alpha : V \to \mathbb{F}$ lineer dönüşümüne lineer fonksiyonel adı verilir.

V üzerindeki lineer fonksiyonellerin uzayına V'nin dual uzayı denir ve V^* ile gösterilir.

$L: V \to W$ lineer dönüşüm ise $a,b\in\mathbb{R}$ ve $V_1,V_2\in V$ için

$L(aV_1+bV_2)=aL(V_1)+bL(V_2)$ idi.

$V=\text{span}\{e_1,\dots,e_n\}$

$V^*=\text{span}\{w^1,w^2,\dots,w^n\}$ $\quad \underbrace{w}_{}{}^{j}(e_i)=\delta_i^j$

dual baz

$V=T_p(M)$ olsun.

$w\to$ 1-form

$V^*=T_p^*(M)$ (Kotanjant uzay)

$$T_p(M)=\text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p,\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$$

$\alpha\in T_p^*(M) \Rightarrow \alpha$'ya 1-form adı verilir.

$\alpha : T_p(M)\longrightarrow\mathbb{R}$

V_p

eleman olarak dualin elemanı ama fonksiyon olarak $T_p(M)\to\mathbb{R}$ tanımlı

1-form'a her zaman teğet vektör vuracağız.

$T_p^*(M)=\text{span}\{dx^1,dx^2,\dots,dx^n\}$

df_p yerine f_* da kullanılır.

Türev Dönüşümü (Diferansiyel Dönüşüm)

$f: M \to N$ → f M manifoldunun p noktasını N manifoldunun f(p) nok.na taşıyor.

(U, φ) M'nin bir haritası

(V, τ) N'nin bir haritası

$\tau \circ f \circ \varphi^{-1}$, $\varphi(p)$ noktasında dif. bilir olmalıydı.

M ve N iki top. uzay. Yetmiyor nokta taşıyabiliyoruz f ile bunların arasında. Teğet vektör taşıyamıyoruz.

O yüzden türev dönüşümü yapıyoruz.

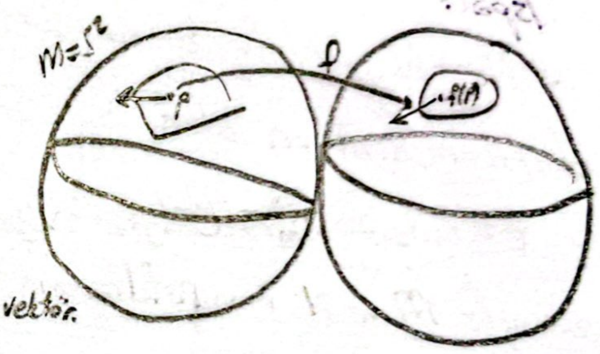
Her $p \in M$ için,

f dönüşümü noktaları taşır.
df ise teğet vektörleri taşıyacak.

$$df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$$

$$V_p \longmapsto \underbrace{df_{|p}(V_p)}_{=: V'_{f(p)}}$$

f(p) nok.da bir teğet vektör.



$g \in C^\infty_i(N, f(p), \mathbb{R})$

$\boxed{(df_{|p})(V_p)[g] = V_p[g \circ f]}$ olarak tanımlamıştık.

(Görüntü teğet vek. g vurmak ile teğet vektöre gof vurmak denekmiş bu formüle göre)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & N \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Her $p \in M$ için $df_{|p}$ bir lineer dönüşümdür.

$f: M \to N$ ve $g: N \to L$ dif. bilir dönüşümler olmak üzere, her $p \in M$ için

$$(g \circ f)_{*|p} = g_{*|f(p)} \circ f_{*|p}$$

tanım mani. haritası

görüntü manifoldunun haritası

$\ast (U, \varphi)$ ve (V, τ), M ve N manifoldlarının sırasıyla p ve $f(p)$ civarında haritaları olsun. Bu takdirde, f dönüşümünün p noktasındaki türev dönüşümü, $T_p(M)$ ve $T_{f(p)}(N)$ için belirlenen bazlara göre bir matris olarak ifade edilebilir.

Bu matrisi oluşturacak

$$\boxed{df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial (y_i \circ f)}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}}$$

$(i, j = 1, \dots, n)$

Görüntü uzayındaki teğet vek.ü görüntü uzayındaki vektörlerin lineer birleşimi olarak yazmamı sağladı.

'dir, gösterelim.

$T_p(M)$'nin bazlarını vurmuş. Bu da V_p gibi. df_p'lere teğet vektörler vuruluyor zaten. Vurunca görüntü uzayında bir teğet vek. oldu.

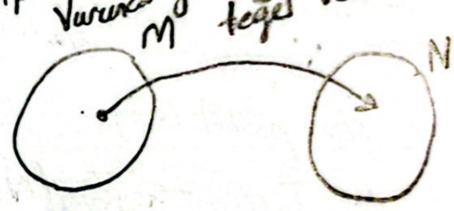
İspat:

$f: M \to N$ dif. bilir bir dönüşüm olsun.

$\dim M = m$, $\dim N = n$ olsun.

$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_m)$; $\tau = (y_1, \dots, y_n)$

sırasıyla M ve N manifoldlarının koordinat sistemleri olsun.



$T_p(M)$

$\frac{\partial}{\partial x_j}$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial y_i}$ $(i = 1, \dots, n)$

$$\begin{cases} V_p = \sum_{i=1}^{n} V[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \\ u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n \end{cases}$$

"İspatladığımız" şeyi de lineer birleşim şeklinde yazdık aynı böyle.

$\dim T_p(M) = m$, $\dim T_{f(p)} = n$ 'dir.

$\frac{\partial}{\partial x_j}$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial y_i}$ (koordinat vektörleri)

$w = df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ olsun. $\Rightarrow w \in T_{f(p)}(N)$ 'dir.

$\Rightarrow w = \sum_{i=1}^{n} w[y_i]\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}$ şeklinde yazılabilir. $\left(df_p(V_p)[g] = V_p[g \circ f]\right)$

$$\boxed{\ast \; w[y_i] = \underbrace{df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)}_{w}[y_i] = \frac{\partial}{\partial x_j}[y_i \circ f]\Big|_p}$$

Buradan geçerken sağ üstteki kural kullanıldı.

$$\begin{tikzcd} \overset{p}{M} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "y_i\circ f"'] & N^{f(p)} \arrow[d, "f(p)"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow w = \sum_{i=1}^{n} w[y_i]\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(y_i\circ f)|_p \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\Big|_{f(p)}$$

p çünkü M'den alındı.

f(p) çünkü N'den alındı.

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial(y_i\circ f)}{\partial x_j}\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)} = df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \quad (j=1,\dots,m)$$

şeklinde ifade edilir ve ispat tamamlanır.

* Yukarıda yapılanlara göre, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right\}$ ve $\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(p)}\right\}$ bazlarına göre df_p türev* dönüşümü,

$$\left[\frac{\partial(y_i\circ f)}{\partial x_j}\Big|_p\right]$$ matrisi ile temsil edilebilir.

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(\overbrace{x^2-2y}^{f_1},\overbrace{4x^3y^2}^{f_2})$ olarak tanımlanıyor. $p=(1,2)$ noktasında df_p türev dönüşümünü bulunuz. Daha sonra,

b) $df_p\left(2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)$ 'yi hesaplayınız.

f lineer dönüşüm değil küpü var ama sorun değil. df lineer olmalı.

$M=\mathbb{R}^2$, $N=\mathbb{R}^2$

$f(p)=f(1,2)=(-3,16)$

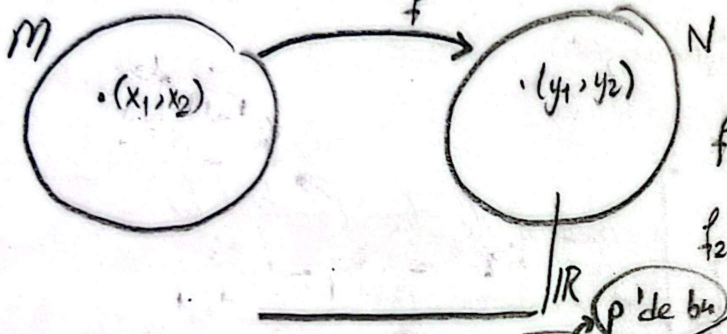
$j=1,2$, $i=1,2$

$T_p(M)$ $\qquad$ $T_{f(p)}(M)$

$\frac{\partial}{\partial x_j}$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial x_i}$

Önceki tanımla uyumlu olsun diye $x_1=x$, $y=x_2$ olarak düşünebiliriz.

$f(x_1,x_2)=\left((x_1)^2-2x_2\,,\,4(x_1)^3(x_2)^2\right)$



Bunlar zaten f'in bileşenleri

* $f_i=\overbrace{y_i\circ f}$ diyelim.

$f_1=y_1\circ f=y_1(f(x_1,x_2))=(x_1)^2-2x_2$

$f_2=y_2\circ f=y_2(f(x_1,x_2))=4(x_1)^3(x_2)^2$

p'de bu

$$\Rightarrow df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial(y_i\circ f)}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}=\left(\frac{\partial(y_1\circ f)}{\partial x_1}\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(p)}+\left(\frac{\partial(y_2\circ f)}{\partial x_1}\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{f(p)}$$

$$=\left(\frac{\partial\left(\left((x_1)^2-2x_2\right)\right)}{\partial x_1}\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(p)}+\left(\frac{\partial\left(4(x_1)^3(x_2)^2\right)}{\partial x_1}\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{f(p)}$$

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)=(2x_1)_{(1,2)}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(p)}+\left(12(x_1)^2(x_2)^2\right)_{(1,2)}\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{f(p)}$$

$$=\underbrace{\boxed{2\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{f(p)}+48\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{f(p)}}}$$ bulunur.

(Jacobien matrisin 1. sütunu olacak bu)

Öte yandan

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial(y_i\circ f)}{\partial x_2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(p)}$$

$$=\left(\frac{\partial(y_1\circ f)}{\partial x_2}\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(p)}+\left(\frac{\partial(y_2\circ f)}{\partial x_2}\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{f(p)}$$

$$=-2\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(p)}+\left(8\cdot(x_1)^3(x_2)\right)_{(1,2)}\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{f(p)}=-2\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(p)}+16\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{f(p)} //$$

olarak yazılabilir.

II. yol

$$* \ Jf_p=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}_{(1,2)}=\begin{pmatrix}2x & -2\\ 12x^2y^2 & 8x^3y\end{pmatrix}_{(1,2)} \leftarrow \left(f(x,y)=(x^2-2y,4x^3y^2)\right)$$

$$Jf_p=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 48 & 16\end{pmatrix}$$ şeklinde elde edilir.

b) Soranun devamındaki soru.

$$*\begin{pmatrix}2 & -2\\ 48 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 48\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2 & -2\\ 48 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 16\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$: $\mathbb{R}^2$'nin taban elemanı $\frac{\partial}{\partial x}$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$: $\mathbb{R}^2$'nin taban elemanı $\frac{\partial}{\partial y}$

$$df_{(1,2)}\left(2\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)+df_{(1,2)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=2\begin{pmatrix}2\\48\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-2\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\112\end{pmatrix} //$$

II. yol

$$Jf_p=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 48 & 16\end{pmatrix} \qquad df_p\Big(\underbrace{2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}}_{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}\Big)$$

$$\Rightarrow df_{(1,2)}\left(2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 48 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\112\end{pmatrix} //$$

Teorem: $f:M\to N$ dif. bilir bir dönüşüm olsun. Bu takdirde,

$V_p \in T_p(M)$ o.ü.

$$df_p(V_p)=\sum_{i=1}^{n} V_p[y_i \circ f]\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}$$ 'dir. Burada, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, N manifoldunun koordinatlarıdır.

İspat: $$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(y_i \circ f)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)} \qquad V_p=\sum_{j=1}^{n} V_p[x_j]\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$$

her seferinde Σ yazmamak için

$$V = v^1e_1 + v^2e_2 + \dots + v^ne_n = \sum_{i=1}^{n} v^ie_i = \overset{\frown}{v^ie_i}$$ (Einstein toplama uylaşımı)

$V = T_p(M)$ olsun. $V^* = T_p^*(M)$

$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$ baz. dx^j baz, bazen dx_j olarak da yazacağız.

4 Aralık

Lemma: $(x_1, \dots, x_n)$, $p \in M$ noktasında bir komşuluğunda bir yerel koor. sist. o.ü,

$$df(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, dx_i$$ 'dir.

f iki manifold arası bir dönüşüm.

Burada dx_i 'ler koor. fonksiyonlarının diferansiyelleridir ve $f: M \to \mathbb{R}$ 'dir.

Bunlar hep 1-formmuş

$Mdx + Ndy$

$M_y = N_x$

tam diferansiyel

Burada da tam diferansiyel var.

Hatırlatmalar:

Dual Uzay

V bir vektör uzayı

$f: V \to \mathbb{F}$ lineer dönüşümüne lineer fonksiyonel denir ve lineer fonksiyonellerin uzayına dual uzay denir.

$V = T_p(M)$ (teğet uzay)

$V^* = T_p^*(M)$ (kotanjant uzay)

$T_p(M) \longrightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right\} \to T_p(M)$'nin bazları

$T_p^*(M) \Rightarrow dx_i$ → dx^i de yazılır.

$\alpha: \overset{V}{T_p(M)} \longrightarrow \overset{\mathbb{F}}{\mathbb{R}}$ lineer $\Rightarrow \alpha \in T_p^*(M)$

→ 1-form (kovektör)

→ 1-formlar her zaman $T_p(M)$'den $\mathbb{R}$'ye gidiyor.

1-forma her zaman $T_p(M)$'den gittiği için V_p (teğet vektör)

$$\begin{tikzcd}
T_p(M) \arrow[d] & T_p^*(M) \arrow[d] \\
\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p & dx_i|_p
\end{tikzcd}$$

Türev Dönüşümü
(Diferansiyel dönüşümü)

f'e nokta vuruyorum. ← $f: M \to N$ dif. bilir dönüşümdür. → manifoldda noktalar var. vektör taşıyabilmek için teğet uzaya geçmeliyim. Bunu türev dönüşümüyle yapıyorum.

$$p \longmapsto f(p)$$

f(p) nok. N manifoldunun teğet uzayına taşıyor.

$$df_p : T_p(M) \longrightarrow T^*_{f(p)}(N)$$

lineer dönüşüm.

lineer olduğu için matris temsili var. Jacobien matris.

df'e teğet vektör vuruyorum.

$$v_p \longmapsto w_{f(p)}$$

$$\overbrace{df_p(v_p)}^{w_{f(p)}}[g] = v_p[g \circ f]$$

teğet vektöre fonk. vurdum

Çünkü $\mathbb{R}^n$'de nokta ve vektör aynı şeydi.

(Öndeki lemma)

İspat: $f: M \to \mathbb{R} \Rightarrow df(p): T_p(m) \longrightarrow T_{f(p)}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$ $\cong \mathbb{R}$

$$df(p): T_p(m) \to \mathbb{R}$$

$T_p(m)$'den $\mathbb{R}$'ye gidene 1-form diyorduk. f fonksiyon fonksiyonlar 0. dereceden tensör olacak. dif almak dereceyi 1 arttırmak demekmiş. df o yüzden 1-form. Kısaca $T_p(m)$'den $\mathbb{R}$'ye gitmesinden de 1 form diyebiliriz.

Özel olarak, $f = x_i$ koordinat fonksiyonlarını alalım. $(i = 1, \dots, n)$

$v = \frac{\partial}{\partial x_j}$ olsun. Tanıma göre

$$d(f_p)(v_p) = v_p[f]$$

yine doğrultu türevi

olduğunu biliyoruz.

$$\Rightarrow dx_i\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)} = \frac{\partial}{\partial x_j}[x_i] = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_i^j$$

bu teğet uzayın bazı.

şeklinde bulunur.

$$A = \iint_{\mathbb{R}} dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}} dy\,dx \quad (dx \wedge dy)$$

Bu bir bölgede alan hesaplamak aslında. Bu üstteki çarpım 2-form.

$V = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$

$V^* = \text{span}\{w^1, \dots, w^n\}$

$w^i(e_j) = \delta^i_j$

1-form teğet vektör

Hatırlatma

$\overset{\alpha}{\widetilde{M}dx + \widetilde{N}dy}$ $\mathbb{R}^2$ manifoldu.

teğet uzayı bazları (TpIR) $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$

dualin bazları dx, dy

$$\Rightarrow dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta^i_j$$

$\Rightarrow dx_i \; (i=1, \dots, n\,]$ $T_p^*(M)$ uzayının bir tabanıdır (bazıdır.)

$\Rightarrow df = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i dx_i$ olarak yazılabilir. → 1 form old. için dual uzay lineer bağımlı old.dan $\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \dots$ gibi yazılabilir.

teğet vek vurabilirim.

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ vuruyorum.

$$\Rightarrow df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)}_{\delta^j_i}$$

$i=j$ olmalı. Gerisi 0.

$\xrightarrow{\quad} \lambda_1 \delta^1_i + \lambda_2 \delta^2_i + \dots \lambda_n \delta^n_i = \lambda_i$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta^j_i = \lambda_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

→ Bu geçişi nasıl yaptık?.

$df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p [f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$

$df_p(V_p) = V_p[f]$

$$= \boxed{(df)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p dx_i}$$

şeklinde elde edilir ve ispat tamamlanır.

$\underline{\mathbb{R}^3}$ $dx \; dy \; dz$

0-form : fonksiyonlar

1-form = $\alpha = \alpha_1 . dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$

2-form = $\beta = \beta_1 dx \wedge dy + \beta_2 dx \wedge dz + \beta_3 dy \wedge dz$

3-form: $\gamma : \gamma_1 dx \wedge dy \wedge dz$

$\iiint dV = \iiint dz dy dx$ → işine gelen şekilde d'leri sıralayabiliriz.

$\mathbb{R}^3$'te 3-formdan fazlası yok.

0-fonksiyonu gerisi hep.

Hacim elem

$f(x,y)=x^2y \longrightarrow$ fonk. 0-form

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy = 2xy\,dx+x^2dy$$

1-form

yüzey
$x:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$
$X(u,v)=(X_1(u,v),X_2(u,v),X_3(u,\dots))$

$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^3$'e resmi eğri gider. $(m\le n)$
Aslında bunlar daldırma.

Daldırma, Gömme, Alt Daldırma
(immersion) (imbedding) (submession)

Tanım: $f: M^{(m)} \longrightarrow N^n$ dif.bilir bir dönüşüm olsun. $(m\le n)$ (alt boyu)

$\forall p\in M$ için df_p türev dönüşümü birebir ise f'e bir daldırma (immesion, üst daldırma) adı verilir.

* Yani $\forall p\in M$ için $\boxed{Rank(J_f)=m}$'dir. (regülerlik koşulu.)

$$df_p: T_p(M)\to T_{f(p)}(N)$$

$$\underbrace{Rank(df_p)}\ \ Ran(J_p)+\underbrace{Sıfırlık(df_p)}_{0}=\underbrace{dim(T_p(M))}_{dim(M)=m}$$

$$Rank(J_f)=m \,//$$

$df_p: T_p(M)\to T_{f(p)}(N)$

$L: V\to W$ lineer.

Rank-nullity Theorem

$Rank L+Sıfırlık L=dim V$ (tanım uzayının boyu)

$Çek L\,(Ker L)$

$Çek L=\{v\in V \mid L(v)=0_W\}$ (tanımın alt uzayı)

$dim\,Çek L = Sıfırlık L$

$L(0_V)=0_W$ her zaman.

$Çek L=\{0_V\}\Leftrightarrow L$ 1-1'dir.

0

tenayül yakalması

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü $y_1 = \cos x_1$, $y_2 = \sin x_1$ ile tanımlanıyor. f bir daldırma mıdır?

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ -

$x_1 \longmapsto (y_1, y_2)$

$(M = \mathbb{R})$ $m = 1$
$n = 2$ $(N = \mathbb{R}^2)$ $\Big\}$ $m \leq n$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} \\ \frac{dy_2}{dx_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos x_1 \\ \sin x_1 \end{pmatrix}$$

$Rank(J_f) \overset{?}{=} 1$

adi türev
düz d.

(x_1, x_2) olsaydı

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \frac{dy_1}{dx_2} \\ \frac{dy_2}{dx_1} & \frac{dy_2}{dx_2} \end{pmatrix}$$

Bu dönüşüm reel ekseni birim çember üzerine sarmaktadır. $(y_1 = \cos x_1$, $y_2 = \sin x_1)$

$\sin^2(x_1) + \cos^2(x_1) = 1$ olduğundan cos ve sin aynı anda 0 olamaz.

Misal 45° lay $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ satırca indirgenmiş matris oldu. Bu matrisin 0'dan farklı satırlarının sayısı Rankı verir.

J_f matrisinin rankı 1 'dir. Çünkü sinüs ve kosinüs aynı anda sıfır olamaz.

$\Rightarrow Rank(J_f) = 1$

$\Rightarrow df$ 1-1 'dir.

$\Rightarrow f$ bir daldırmadır.

$\overbrace{\text{türev dönüşümü}}^{df}$

1-1 $\Rightarrow$ daldırma.

Hem df hem f 1-1 ise gömme

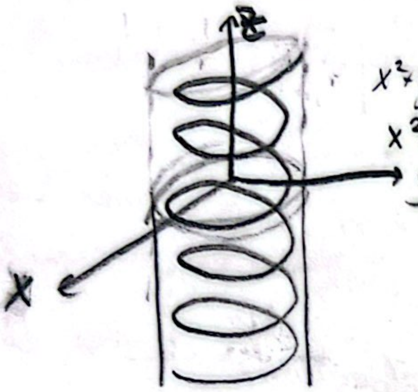
Tanım: f, 1-1 bir daldırma ise f'e bir gömme (imbedding) adı verilir.

Ör $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ → Helis α regüler mi

$\alpha : t \longrightarrow (\cos t, \sin t, t)$ olarak tanımlanıyor.

i) α bir immersion (daldırma) midir?

ii) α bir imbedding (gömme) midir?



$\alpha'(t) \neq 0 \Rightarrow$ Regüle
eğriyd
immersion'la ayn
şeyi verecek bu.

$m=1$
$n=3$ $(m \leq n)$

i) $d\alpha = (-\sin t, \cos t, 1)$

$$(J_\alpha) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(J_\alpha) = 1$$

$\Rightarrow d\alpha$, 1-1 'dir.

$\Rightarrow \alpha$ bir immersion (daldırma) 'dır.

ii) α, 1-1 midir? $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ için

$\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \Rightarrow t_1 \overset{?}{=} t_2$

$(\cos t_1, \sin t_1, t_1) = (\cos t_2, \sin t_2, t_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos t_1 = \cos t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \\ t_1 = t_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha$, 1-1 'dir.

$\Rightarrow \alpha$, 1-1 bir daldırma (immersion) olduğundan α bir gömme (imbedding) tir.

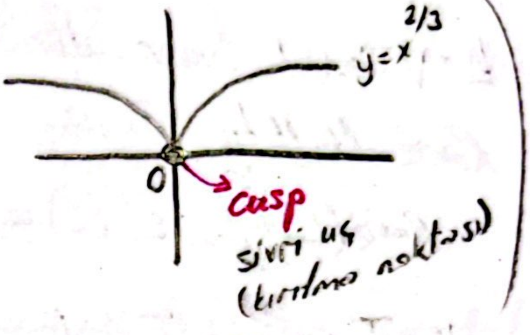
Ö

$\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ → Bu bir parametrik denklem.

$t\mapsto(t^3,t^2)$ olarak tanımlanıyor.

α bir daldırma mıdır?

$$\left(\begin{array}{l} x=t^3 \Rightarrow t=x^{1/3} \\ y=t^2 \qquad\qquad y=x^{2/3} \end{array}\right.$$



$d\alpha=(3t^2,2t)$ olarak bulunur.

fakat $t=0$ için $\mathrm{Rank}(d\alpha)=0$'dır.

$\Rightarrow d\alpha$ 1-1 değildir $\Rightarrow \alpha$ bir daldırma değildir.

6 Aralık

—Hatırlatma—

$f:M^m\to N^n$ dif. bilir dönüşüm

$p\mapsto f(p)$

df_p dönüşümü 1-1 ise ($\forall p\in M$ için) f'e bir daldırma adı verilir.

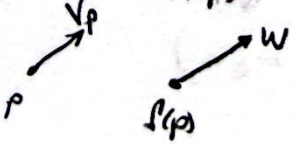
Gömme: 1-1 bir daldırmaya denir.

$f\to$ 1-1 $\quad df\to$ 1-1 ($\forall p\in M$ için).

$f:M\to N$

$p\mapsto f(p)$

$df_p: T_p(M)\to T_{f(p)}(N) \qquad (df_p)(V_p)[g]=V_p[g\circ f]$



Daldırma: df_p 1-1 olmalı($\forall p \in M$ için)

df_p bir lineer dönüşümdür.

$L: V \Rightarrow W$ lineer dönüşüm ise

Rank-Nullity Theorem

$$\text{Rank}(L) + \text{Sıfırlık}(L) = \dim V$$

$$L = df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$$

$$\text{Rank}(J_f) + \text{Sıfırlık}(df_p) = \dim T_p(M) = m$$

$$\text{Rank}(J_f) + \text{Sıfırlık}(df_p) = m$$

$$\boxed{\text{Sıfırlık } L = \dim \text{Çek } L}$$

$$\text{Çek } L = \{ u \in V \mid L(u) = 0_W \}$$

$$L(0_V) = 0_W$$

$\text{Çek } L = \{0_V\} \Leftrightarrow L$ 1-1'dir $\Leftrightarrow$ Sıfırlık$=0$

df_p 1-1 $\Rightarrow$ sıfırlık$(df_p) = 0$

$$\left(\text{Çek}(df_p) = \underbrace{\{0_{T_p(M)}\}}_{\mathbb{R}^3 \text{ dese misal } (0,0,0)}\right)$$

$$\text{Rank}(J_f) + \underbrace{\text{Sıfırlık}(df_p)}_{0} = m$$

$$\Rightarrow \text{Rank}(J_f) = m$$

f bir daldırma ise ($f: M^m \to N^n$ $m \leq n$)

df_p 1-1 $\Rightarrow \text{Rank}(J_f) = m$

* Hem f 1-1, hem de df_p 1-1 ⇒ f'e gömme denir.

Ö: $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ $\alpha(t)=(t^3-4t,\ t^2-4)$ olarak tanımlanan α dönüşümü bir gömme midir?

$$\left.\begin{array}{ll} M=\mathbb{R} & (\dim M)=1 \\ N=\mathbb{R}^2 & (\dim N=2 \Rightarrow n=2) \end{array}\right\} m\leq n$$

α'nın gömme olması için α 1-1 ve dα 1-1 olmalı.

$d\alpha=(3t^2-4,\ 2t)$

$J\alpha=\begin{bmatrix} 3t^2-4 \\ 2t \end{bmatrix}_{2\times1}$

$3t^2-4=0 \Rightarrow t^2=\frac{4}{3} \Rightarrow t=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$

$2t=0 \Rightarrow t=0$

⇒ $\forall t\in\mathbb{R}$ için $Rank(J\alpha)=1$'dir. //

$\Rightarrow Rank(J\alpha)=\dim(M)=m=1$

⇒ dα 1-1'dir.

⇒ α bir daldırmadır.

α 1-1 midir? $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ olsun.

$\alpha(t_1)=\alpha(t_2) \Rightarrow t_1 \overset{?}{=} t_2$

$$\left.\begin{array}{l} t_1=2,\ t_2=-2 \\ \alpha(2)=(0,0) \\ \alpha(-2)=(0,0) \end{array}\right\} \alpha(2)=\alpha(-2) \text{ fakat } 2\neq-2$$

⇒ α 1-1 değil.

⇒ α bir gömme değildir.

$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ $\quad$ $J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$

Lemma: $f: M^m \to N^n$ dif. bilir bir dönüşüm ve $p \in M$ olsun.

Bu durumda aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:

1) df_p türev (diferansiyel) dönüşümü 1-1 dir.

2) df_p'nin Jakobiyen matrisinin rankı m'dir.

3) $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $f(p)$ noktasında N manifoldunun bir koordinat sistemi ise bu durumda,

$1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_m \leq n$ tam sayıları için

$y_{i_1} \circ f, \longrightarrow, y_{i_m} \circ f$ 'ler $p \in M$ noktasında M manifoldunun bir koordinat sistemi o.ş. vardır.

İspat:

$1 \Rightarrow 2$ $\quad df_p$ 1-1 olsun. $\Rightarrow$ sıfırlık$(df_p) = 0$

Rank-Nullity Theorem:

$$\text{Rank}(J_f) + \underbrace{\text{sıfırlık}(df_p)}_{0} = \dim T_p(M) = m \Rightarrow \text{Rank}(J_f) = m$$

Rank: Matrisi satırca indirgiyorduk. (Pivotların sütunlarda diğer elemanlar sıfır olacak)

Rank: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times4}$ $\Rightarrow$ max 3×3 lük det alabilirim.

3×3 lük her birinde det. $\neq 0$ mı diye bakıyorum. Hepsinde det $\neq 0 \Rightarrow$ Rank $= m$

0 uzayın tabanı olur

$2 \Rightarrow 3:$ $$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y_i\circ f)}{\partial x_j}\Big|_p \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(p)} \quad , \; 1\leq j\leq m$$

df_p'nin ranki m olsun. $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $f(p)$ noktasında N'nin bir koor. sistemi olsun.

$$(J_f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(y_1\circ f)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(y_1\circ f)}{\partial x_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial(y_n\circ f)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(y_n\circ f)}{\partial x_m} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

normalde $M\to N$ gidiyordu. J_f transpot old. için matris $n\times m$'lik

$\text{Rank}(J_f) = m$ olduğundan buradaki $m\times m$'lik determinantlardan en az biri sıfırdan farklıdır.

Varsayalım ki

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(y_{i_1}\circ f)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(y_{i_1}\circ f)}{\partial x_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial(y_{i_m}\circ f)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(y_{i_m}\circ f)}{\partial x_m} \end{bmatrix}_{m\times m} \neq 0 \text{ olsun.}$$

$\Rightarrow y_{i_k}\circ f$'ler lineer bağımsızdır. $(k=1,2,\dots,m)$

$\Rightarrow y_{i_1}\circ f, \dots, y_{i_m}\circ f$, p noktasının bir V komşuluğunda M manifoldu için bir koor. sistemi temsil eder.

3⇒1: $(y_1, \dots, y_n)$, $f(p)$ noktasında N manifoldunun bir koor. sistemi, $y_{i_1}\circ f, \dots, y_{i_m}\circ f$ 'ler $p\in M$ noktasında M manifoldunun bir koordinat sistemi olsun. df_p 1-1 mi?

Yani $v_1, v_2 \in T_p(M)$ o.ü.

$$df_p(v_1) = df_p(v_2) \Rightarrow v_1 \overset{?}{=} v_2$$

$$\forall v \in T_p(M) \text{ için, } df_p(v_p) = \sum_{i=1}^{n} v_p[y_i\circ f]\Big|_p \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(p)}$$ old. biliyoruz.

$$df_p(v_1) = \sum_{i=1}^{n} v_1[y_i\circ f] \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(p)} = \sum_{i=1}^{n} v_2[y_i\circ f] \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(p)} = df_p(v_2)$$

$$(v_1[y_1\circ f], v_1[y_2\circ f], \dots, v_1[y_n\circ f]) = (v_2[y_1\circ f], v_2[y_2\circ f], \dots, v_2[y_n\circ f])$$

$$\Rightarrow v_1[y_1\circ f] = v_2[y_1\circ f], \dots, v_1[y_m\circ f] = v_2[y_m\circ f]$$ → tanım yo. m tanesine ihtiyacım var

$\Rightarrow v_1 = v_2$ o.ş. elde edilir. $\Rightarrow df_p$ 1-1 'dir.

θ

$V=\{(\theta,\phi) \mid 0<\theta<\pi,\ 0<\phi<2\pi\}$ o.ü.

$F: V \to \mathbb{R}^3$

→ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

→ kürenin parametrik denklemi hatta birim küre (S^2)

$(\theta,\phi) \longmapsto (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta,\ \sin\phi,\ \cos\theta)$ dönüşümü göz önüne alınıyor. f bir immersion(daldırma) mıdır? *

$$x^2+y^2+z^2 = \underbrace{\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi}_{1\cdot\sin^2\theta}+\cos^2\theta = 1$$

S^2 birim küresi verilmiş.

$m=2$, $n=3$ $(m\leq n)$

J_f jakobiyen matrisini hesaplayalım.

$f_1=\sin\theta\cos\phi$, $f_2=\sin\theta\sin\phi$, $f_3=\cos\theta$

$$J_f=\begin{pmatrix} \frac{df_1}{d\theta} & \frac{df_1}{d\phi} \\ \frac{df_2}{d\theta} & \frac{df_2}{d\phi} \\ \frac{df_3}{d\theta} & \frac{df_3}{d\phi} \end{pmatrix}_{3\times2} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cdot\sin\phi & \sin\theta\cdot\cos\phi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

sin-cosla alınca hep aynı anda sıfır olamamalarından faydalanacağız

$$\begin{vmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\text{-}\sin\phi \\ \cos\theta\cdot\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} = \cos\theta\cdot\sin\theta(\underbrace{\cos^2\phi+\sin^2\phi}_{1}) = \cos\theta\sin\theta$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta.\sin\phi \\ -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -\sin^2\theta.\sin\phi$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta.\sin\phi & \sin\theta.\cos\phi \\ -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \sin^2\theta\cdot\cos\phi$$

sinϕ ve cosϕ aynı anda sıfır olamayacağından dolayı en az bir 2x2 'lik determinantın değeri sıfırdan farklıdır. θ halt

Rank$(J_f)=2$'dir. ⇒ dF 1-1'dir. ⇒ F bir daldırmadır.

Tanım: $f: M^{(m)} \to N^{(n)}$ dif. bilir bir dönüşüm ve $p \in M$ olsun. $(m \geqslant n)$ Eğer $\forall p \in M$ için df_p türev dönüşümü örten ise f'e bir **alt daldırma (submersion)** adı verilir.

* $m \geqslant n$ olmak üzere, df_p'nin Jakobiyen matrisinin rankı n'dir.

Örn $\overset{(x_1, x_2, x_3)}{\phi: \mathbb{R}^3} \to \overset{(y_1, y_2)}{\mathbb{R}^2}$ dönüşümü, $y_1 = x_2 - x_3$, $y_2 = x_1$ biçiminde tanımlanıyor. ϕ bir alt daldırma (submersion) mıdır?

$m = 3 \quad n = 2 \quad (m \geqslant n)$

$$J\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} \sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow \mathrm{Rank}(J\phi) = 2$

veya
$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Rank}(J\phi) = 2$

$\Rightarrow d\phi$ örtendir.

$\Rightarrow \phi$ bir alt daldırmadır.

Lemma: $f: M \to N$ difbilir bir dönüşüm ve $p \in M$ olsun $(m \geqslant n)$
Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:

df_p türev dönüşümü örtendir.

df_p'nin Jakobiyen matrisinin rankı, n'dir.

$(y_1, \dots, y_n)$, $f(p)$'de N için bir koor. sistemi ise, M'nin p noktasında $(y_1 \circ f, \dots, y_n \circ f, y_{n+1} \circ f, \underbrace{x_{n+1}, \dots, x_m}_{})$ şeklinde bir koordinat sistemi vardır.

m−n tane
de ben ekleyip
tamamladım. Örten olsun
istiyorum ya.

$df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N) \quad (m \geq n)$

$R^3 = W \oplus W^{\perp}$

$\overset{\det}{\curvearrowright} \left[v_1, v_2, v_3 \right] \neq 0$

$$\underbrace{\text{Rank}\,(J_f)}_{n} + \underbrace{\text{sıfırlık}\,(df_p)}_{m-n} = m$$

Örn: $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_3,\ x_2 + x_4)$ dönüşümü göz önüne alınıyor. F dönüşümü bir submersion (alt daldırma) mıdır?

$m = 4 \quad n = 2 \quad / \ m \geq n$

$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_3) \qquad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + x_4)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_4} \end{bmatrix}_{2\times 4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow \text{Rank}\,(J_f) = 2$ 'dir.

$\Rightarrow dF$ örtendir.

$\Rightarrow F$ dönüşümü bir alt daldırmadır.

(Hoca alt manifoldu atladı)

11 Aralık

Manifold Üzerinde Eğriler

dif. geoda $\mathbb{R}^3$'tü

Koordinatları bir parametreye bağlı nok. geometrik yeri.

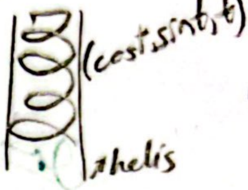
Yüzey: Koordinatları 2 parametreye bağlı noktaların geometrik yeri.

α noktaları taşır

Tanım: $I \subset \mathbb{R}$ o.ü., $\alpha : I \to M$ diferansiyellenebilir (C^∞) dönüşümüne M'de bir eğri adı verilir.

f nokta taşıyordu türev dönüşümü teğet vektörleri. Bu da onun gibi.

$(df_p)(v_p)[g]=v_p[g\circ f]$



$r(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$y = x^2 \to (x,y)$ 2-boyutlu bir eğri bu.

$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to M \quad d\alpha : \underbrace{T_p(\mathbb{R})}_{\cong \mathbb{R}} \to T_{\alpha(t_0)}(M)$

$T_p(\mathbb{R}^n)$'in bazı $\frac{\partial}{\partial x_i}$'ydi. $T_p(\mathbb{R})$ adi oldu. $\frac{d}{dt}$

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$

$d\alpha : \underbrace{T_p(\mathbb{R})}_{\mathbb{R}} \to T_{\alpha(t_0)}(M)$

$\frac{d}{dt}$ 'dir bazı.

$\mathbb{R}^2$ olsaydı $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ olacaktı.

(Şu da $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$)

Tanım:

niye bunu vurduk orada ve sağda açıklıyor.

$$d\alpha\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right) \in T_{\alpha(t_0)}(M)$$

(veya $\alpha_*\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right)$) vektörüne α eğrisinin $t=t_0$ noktasındaki teğet vektörü adı verilir ve $\overset{\circ}{\alpha}(t_0)$ ile gösterilir.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$

$d\alpha : T_{t_0}(\mathbb{R}) \to T_{\alpha(t_0)}(M)$

Örneğin $t_0 = 0$ ise,

Bu artık teğet vektör. O yüzden fonk. vurdu.

$$\overset{\circ}{\alpha}(0)[g] = d\alpha_p\left(\underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}}_{v_p}\right)[g]$$

$$= \frac{d}{dt}[g\circ\alpha]\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} g\circ(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} g(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))\Big|_{t=0}$$

olarak bulunur.

Bu bir reel sayı olacak

teğet vek. fonk. vurulmuş

Çünkü bu $v_p[f]$ gibi. $v_p[f]$ reel sayı.

$$* \ \alpha^\circ(0)[g]=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}$$ şeklindedir. $\left(V_p=\sum_{i=1}^{n}V[x_i]\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)$

Tanım: Her $t\in I$, $\boxed{\alpha^\circ(t)=V\big|_{\alpha(t)}}$ koşulunu sağlayan α eğrisine V vektör alanının bir **integral eğrisi** denir. → Her p noktasına bir vektör karşılık getiriyordu.

Bu α için Her noktada eğrinin teğetine karşılık geliyor bu vektör alanı.

Ö: $V_{(x,y)}=-y\cdot\frac{\partial}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial}{\partial y}$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir vektör alanı olsun. V vektör alanının $(1,0)\in\mathbb{R}$ noktasındaki integral eğrisini bulunuz.

$M=\mathbb{R}^2$, $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ şeklindedir (manifoldum 2 boyutlu) o yüzden α 2 bileşenli.

$V=(-y,x)$ 'dir. $\alpha(t)$ 'nin V vektör alanının bir integral eğrisi olabilmesi için koşulu $\alpha^\circ(t)=V\big|_{\alpha(t)}$ 'dir.

Başka bir deyişle,

$$\overset{\frac{dx}{dt}}{\begin{bmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{bmatrix}}=\overset{V}{\begin{bmatrix}-y(t)\\x(t)\end{bmatrix}}$$ olmasıdır. $\Longrightarrow\begin{cases}x'(t)=-y(t)\ \ldots\ (1)\\ y'(t)=x(t)\ \ldots\ (2)\end{cases}$

1. mertebeden adi dif. denk. sistemi elde edilir.

(1)'in türevini aldım $\quad$ (2)'ye eşitle.

$$\Rightarrow x''(t)=-y'(t)\Longrightarrow -x''(t)=x(t)\Rightarrow x''(t)+x'(t)=0$$

$x''=r^2$ olsun
$x'=r$
$x=r^0$
Karakteristik denklem.

Karakteristik denklem ← $r^2+1=0$

$\Rightarrow r=\pm i$

$x(t)=c_1\cdot\cos t+c_2\cdot\sin t$ // şeklinde bulunur.

$x'(t)=-c_1\sin t+c_2\cos t$

$x'(t)=-y(t)\Rightarrow y(t)=c_1\sin t-c_2\cos t$ //

$r=\mp i$

$e^{a}(c_1\cos bt+c_2\sin bt)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1\cos t + c_2 \sin t \\ y(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ sbt})$$

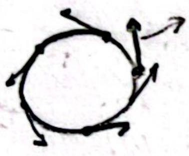
$$(\alpha(t) = x(t), y(t))$$

çözümü edilir.

$(x(0), y(0)) = (1,0)$ başlangıç koşullarından,

$x(0)=1$, $y(0)=0 \Rightarrow c_1 \cos 0 + c_2 \cos 0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$
$c_2 = 0$ elde edilir.

Böylece V vektör alanının $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ noktasındaki integral eğrisi $\boxed{\alpha(t) = (\cos t, \sin t)}$ şeklinde elde edilir. Bu ise birim çemberin parametrik denklemlerle gösterilmiş halidir.



→ Her noktada bir teğet vektöre karşılık gelecek. bir (1,0)'dakine karşılık geleni bulduk.

$\longrightarrow \mathcal{X}(M)$

Teorem: $V \in \mathfrak{X}(M)$ ve $p \in M$ olsun. Bu durumda, herhangi bir $b \in \mathbb{R}$ için $\varepsilon > 0$ reel sayısı ve $\alpha(b) = p$ o.ş. bir $\alpha : (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \to M$ eğrisi vardır ve bu eğri tektir. Üstelik α, V'nin bir integral eğrisidir. (İspatını öğren) → dif. denk. varlık ve teklik teoreminden çıkıyormuş.

① $\mathbb{R}^3$ üzerinde → manifold $\mathbb{R}^3$

$V = x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy} + 2.\frac{d}{dz}$ vektör alanı veriliyor. V vektör alanının integral eğrisini bulunuz.

$M = \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ olsun. $\alpha'(t) = V|_{\alpha(t)} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 2 \end{bmatrix}$$ → adi dif. denk. sistemi (sadece t'ye bağlı)

$$\begin{cases} ① \; x'(t) = x(t) \\ ② \; y'(t) = y(t) \\ ③ \; z'(t) = 2 \end{cases}$$ olmalıdır.

① $\frac{dx}{dt} = x$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int dt$ (değişkenlerine ayrılabilir dif. denk.)

$\Rightarrow \ln|x| = t + \ln A$ (A sabit)

$\overset{x=}{x(t)} = e^{t+\ln A} = A.e^{t}$

(x'siz yazabildim çünkü $e^{t+\ln A}$ ve genel olarak a^x lilerin grafikleri nasıl? Hep pozitif)

② $\frac{dy}{dt} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dt \Rightarrow \ln|y| = t + \ln B$

$\Rightarrow \overset{y(t)}{y} = B.e^{t}$ (B=sbt)

③ $z'(t) = 2 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 2$

$\Rightarrow dz = 2dt \Rightarrow z(t) = 2t + C$ (c sbt)

$\Rightarrow \boxed{\alpha(t) = (Ae^{t}, Be^{t}, 2t + C)}$ şeklinde integral eğrisi elde edilir.

Shaum's outlines

TENSÖRLER

* V bir $\mathbb{F}(\equiv\mathbb{R})$ cismi üzerinde n-boyutlu bir vektör uzayı olsun.

$(v_1,v_2,\ldots,v_r,v^*_{r+1},v^*_{r+2},\ldots,v^*_{r+s})$

$$\phi : \underbrace{V\times V\times V\times\cdots\times V}_{r \text{ tane}}\times\underbrace{V^*\times V^*\times\cdots\times \overset{\curvearrowright}{V^*}}_{s \text{ tane}}\longrightarrow\mathbb{R}$$

→ V vektör uzayının duali.

multilineer dönüşümüne (r,s) tipinden bir **tensör** adı verilir.

Burada V^*, V vektör uzayının dualini göstermektedir.

r → (alt indis) kovaryant, s kontravaryant tensör diyeceğiz.
→ (üst indis)

* $L: V\to W \begin{pmatrix} c_1,c_2\in\mathbb{R}\\ u,v\in V\end{pmatrix}$

$L(c_1u+c_2v)=c_1L(u)+c_2L(v)$
lineerlik

ϕ_{ij} $r=\boxed{2}\to ij$
$n=4$ (4×4 lük matris)

$$\begin{pmatrix}\phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14}\\ \vdots & & & \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \cdots & \phi_{44}\end{pmatrix}_{4\times4}$$

Multilineerlik: $a,b\in\mathbb{F}\;(\equiv\mathbb{R})$

$$\phi(v_1,v_2,\ldots,av_k+bv_k',\ldots\ldots)=a\phi(v_1,v_2,\ldots,v_k,\ldots)+b\phi(v_1,v_2,\ldots,v_k',\ldots)$$

$\phi(a_1u_1+b_1u_1',a_2u_2+b_2u_2')$

$a_1\phi(u_1,a_2u_2+b_2u_2')+b_1\phi(u_1',a_2u_2+b_2$

kovaryant
kontravaryant

* $(\overset{\uparrow}{r},\overset{\uparrow}{s})$ tipinden tüm tensörlerin kümesini $T^r_s(V)$ ile göstereceğiz.

$V=T_p(M)$ olsun.

$\alpha: T_p(M)\to\mathbb{R}$ (lineer) 1-form

$\alpha\in T_p^*(M)$

→ lineer fonksiyoneldi
$f: V\to\mathbb{R}$
$f\in V^*$

$\phi: \underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{r}\times\underbrace{V^*\times\cdots V^*}_{s}$

$\alpha: V\to\mathbb{R}$
$r=1,\ s=0$

↗ 1-formlar dual uzayın elemanlarıdır. 1-formlar 1.kovaryant tensörlerdir.

13 Aralık

Tensörler

V bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde n-boyutlu bir vektör uzayı olsun.

$$\phi : \underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{r\text{ tane}}\times\underbrace{V^{*}\times V^{*}\times\cdots\times V^{*}}_{s\text{ tane}}\to\mathbb{R}$$

multi-lineer dönüşümüne (r+s) tipinden bir tensör adı verilir. Burada V^*, V vektör uzayının dualini göstermektedir.

r: kovaryant , s: kontravaryant

(r,s) tipinden tüm tensörlerin kümesini $T^r_s(V)$ ile göstereceğiz.

$f = \phi : \overset{V}{\overset{\|}{T_p(M)}} \to \mathbb{R}$ lineer

lineer fonksiyonel

(teğet vektör vuracağım)

$f(V)\in\mathbb{R}$

Bütün lineer fonksiyonellerin uzayı dual uzay (V^*)

$T_p(M)$ ile $T_p^*(M)$

ϕ : 1-form (kovektör)

Tensörde multi-lineer. Burada tek bir V vardı. Tensörde r+s tane olacak.

$\phi_i \to$ kovaryant $\quad \phi^i \to$ kontravaryant

$L: V\to W \quad L(c_1u_1+c_2v_2)=c_1L(u_1)+c_2L(v)$

$$\phi(v_1,\ldots,av_k+bv_k',\ldots)=a\phi(v_1,\ldots,v_k,\ldots)+b\phi(v_1,\ldots,v_k',\ldots)$$

Hatırlatma:

* $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ V uzayının bir bazı

$\{w^1,\ldots,w^n\}$ V^* uzayının bir bazı olmak üzere,

$w^j(e_i)=\delta_i^j$ idi.

* $f\in V^* \Rightarrow f: V\to\mathbb{R}$ lineer

f'e 1-form veya kovektör adı verilir.

Dualin elemanları 1-formlar. Biz 1-formlara her zaman teğet vektör vuracağız.

→ Burada teğetin bazlarını vurmuşuz

13 Aralık $f: V \to \mathbb{R}$ $r=1$, $s=0$

1-formlar, 1-kovaryant tensörlerdir.

1-kovaryant tensör ; $\phi: V \to \mathbb{R}$ $\overset{(\text{lineer})}{\Longrightarrow}$ $\phi \in V^*$ şeklindedir.

$$\phi \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \phi_i w^i = \phi_1 w^1 + \phi_2 w^2 + \dots + \phi_n w^n$$

$$\boxed{\phi = \phi_i w^i}$$ (Einstein summation convention / toplama uylaşımı)

$\phi \in V^*$ old. için V^*'ın bazlarının lineer birleşimi olarak yazdık.

1-kovaryant tensör deyince ϕ_i yazarlarmış kısaca $\phi_i w^i$ yerine.

$\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ $\{e_1, \dots, e_n\}$

$u = (u_1, \dots, u_n)$

$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + \dots + u_n \vec{e}_n$

taban elemanlarının lineer birleşimi $\mathbb{R}^n$'in.

1-kontravaryant tensörler; $(r=0, s=1)$

ϕ gibi

$T: V^* \to \mathbb{R}$ lineer $\Rightarrow T \in (V^*)^* \cong V$

$$T = \sum_{i=1}^{n} T^i e_i = T^i e_i$$ (Einstein toplama uylaşımı)

einstein kullanabilmek için T^i yazmalıyım. Üst indis yazmam gerektiğine göre kontravaryant

* Klasik tensör analizinde kovaryant vektörler ϕ_j ile, kontravaryant vektörler T^i ile temsil edilebilir.

* 1-kovaryant, 1-kontravaryant $(r=1, s=1)$

$A: V \times V^* \to \mathbb{R}$ şeklinde ifade edilebilir.

Öyle bir dönüşüm yapacaksın ki iki vektör arası açı sbt kalacak.
Konformal dönüşüm. Bu misal tensör alanıyla yapılıyor.

Analiz-4 öğren.

(x,y,z)
(r,θ,z) $\iiint dV$
$dV = r.dz\,dr\,d\theta$

* (r,s) tipinden tensörlerin kümesi olan $T^r_s(V)$, n^{r+s} boyutlu bir vektör uzayı oluşturur.

$\dim(M) = 3$ $(n=3)$

ϕ_{ij} (2-kovaryant tensör)
$r=2,\ s=0$
$n^{r+s} = 3^{2+0} = 9$

$n=3$ ise i ve j 3 tane olabilir. (1,2,3 olabilir)

$\phi_{1j}\ \phi_{2j}\ \phi_{3j}$
$\phi_{i1}\ \phi_{i2}\ \phi_{i3}$

$$\phi_{ij} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{pmatrix}_{3\times3}$$

Bak 9 bileşen oldu.
3 boyutlu bir vektör uzayı

$n=4$ olsaydı $4^{2+0} = 16$

$$\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \vdots & & & \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} \end{pmatrix}_{4\times4}$$

* α bir 1-form ve $v \in V$ olsun.

$\alpha : V \to \mathbb{R}$ $\quad \alpha \in V^*$

$\Rightarrow \alpha(v) = ?$

$V^* = \text{span}\{w^1, \dots, w^n\}$
$V = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$\alpha \in V^* \Rightarrow \alpha = \alpha_j w^j$ $\qquad v \in V \Rightarrow v = v^i e_i$

$$\alpha(v) = \alpha(v^i e_i) = \alpha_j w^j(\underset{\text{skaler}}{v^i} e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w^j \Big(\sum_{i=1}^{n} v^i e_i\Big)$$

$$\alpha(v) = \alpha_j . v^i \underbrace{\underset{\text{1-form}}{w^j}(\underset{\text{teğet vektör}}{e_i})}_{\delta_i^j}$$

$$\Rightarrow \alpha(v) = \alpha_j \underbrace{v^i \delta_i^j}_{v^j} = \boxed{\alpha_j v^j} = \alpha_1 v^1 + \dots + \alpha_n v^n$$

$= \langle \alpha, v \rangle$

α'nın bileşenleriyle teğet vektörün bileşenlerinin iç çarpımı

① $\mathbb{R}^2$ üzerinde, ↗ 1-form çünkü dual uzayın bazlarının lineer birleşimi olarak yazılmış. $w^1 = dx$, $w^2 = dy$

$\alpha = (2xy + x^2 + 1)\,dx + (x^2 - y)\,dy$ 1-formu veriliyor.

$V = \underbrace{(x^2+y)}_{v^1}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{e_1} + \underbrace{(y^2+1)}_{v^2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}}_{e_2}$ olsun. Bu takdirde $\alpha(V)\Big|_{(0,0)}$ nedir?

$$M = \mathbb{R}^2 \quad T_p(M) \Rightarrow \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p , \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \right\}$$

$$T_p^*(M) \Rightarrow \{dx, dy\} \quad (w^1 = dx, w^2 = dy)$$

$$\alpha(V) = \left((2xy + x^2 + 1)\,dx + (x^2 - y)\,dy\right)\left((x^2+y)\frac{\partial}{\partial x} + (y^2+1)\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\alpha(V) = (2xy + x^2 + 1)\cdot(x^2+y)\cdot \underbrace{dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{1} + \cancel{(2xy + x^2 + 1)(y^2+1)\underbrace{dx\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{0}} + \cancel{(x^2 - y)(x^2+y)\underbrace{dy\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{0}}$$
$$+ (x^2 - y)(y^2+1)\underbrace{dy\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{1}$$

$$\alpha(V) = (2xy + x^2 + 1)(x^2+y) + (x^2 - y)(y^2+1)$$

(İç çarpımdan önceki kurallardan kolayca da yapılabilirdi)

$$\alpha(V)\Big|_{(0,0)} = 0 \,/\!/$$

Manifold Üzerinde Tensörler

$V = T_p(M)$, $V^* = T_p^*(M)$ olarak almalıyız.

$\alpha : T_p(M) \to \mathbb{R}$ lineer $\Rightarrow$ α, 1-formdur. $\Rightarrow \alpha \in T_p^*(M)$ 'dir.

$\boxed{\alpha = \alpha_i \, dx^i}$ şeklinde ifade edilebilir.

Tensör Çarpımı Tensor product

ϕ ve τ , sırasıyla $\overset{r\text{-kovaryant}}{(r,0)}$ ve $\overset{q\text{-kovaryant}}{(q,0)}$ tipinden iki tensör olsun.

Bu tensörlerin tensör çarpımı,

$$(\phi \otimes \tau)(v_1, v_2, \ldots v_r, v_{r+1}, \ldots v_{r+q}) = \phi(v_1, v_2, \ldots, v_r) \cdot \tau(v_{r+1}, \ldots, v_{r+q})$$

olarak tanımlanır. Burada "$\otimes$" tensör çarpımını göstermektedir.

* $\phi \otimes \tau$, $(r+q, 0)$ tipinden bir tensördür.

Özellikleri

* Genel olarak , $\phi \otimes \tau \neq \tau \otimes \phi$ 'dir. Yani tensör çarpımının genel olarak değişme özelliği yoktur.

* $\phi \otimes (\tau \otimes \beta) = (\phi \otimes \tau) \otimes \beta$ 'dır. (Birleşme öz.)

* $a, b \in \mathbb{R}$ o.ü. $(a\phi + b\tau) \otimes \beta = a . \phi \otimes \beta + b \tau \otimes \beta$ 'dır.

Ör α, β ; M üzerinde 1-formlar olsun.

$v_1 = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $v_2 = \frac{\partial}{\partial x_j}$ olsun. $(r=1, q=1)$

$\alpha : T_p(M) \to \mathbb{R}$ $\left(\alpha = \alpha_k dx^k , \beta = \beta_\ell dx^\ell\right)$

$\beta : T_p(M) \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\alpha \otimes \beta)(v_1, v_2) = ?$

Çözüm: $(\alpha \otimes \beta)(v_1, v_2) \overset{\text{tanımdan}}{=\!=} \alpha(v_1)\, \beta(v_2)$

α 1-form! 1-forma 1 tane teğet vektör vurabilirdin zaten.

$$= \alpha_k \underbrace{dx^k \frac{\partial}{\partial x_i}}_{\delta_i^k} \beta_\ell \underbrace{dx^\ell \frac{\partial}{\partial x_j}}_{\delta_j^\ell} = \alpha_k \cdot \delta_i^k \cdot \beta_\ell \cdot \delta_j^\ell = \alpha_i \cdot \beta_j$$

şeklinde elde edilir.

Ör $v \in T_p(M)$, $\beta \in T_p^*(M)$ olsun.

$v : T_p^*(M) \to \mathbb{R}$ (0,1) tipinden $(r=0, s=1)$

$\beta : T_p(M) \to \mathbb{R}$ (1,0) tipinden $(r=1, s=0)$

$\Rightarrow v = v^\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}$, $\beta = \beta_k dx^k$ şeklinde ifade edilir. $(v \otimes \beta)\left(dx^j, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) =$

Çözüm:

$$(v \otimes \beta)\left(dx^j, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = v^\ell \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\ell}(dx^j)}_{\delta_\ell^j} \cdot \beta_k \cdot \underbrace{dx^k \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)}_{\delta_i^k}$$

$$= v^\ell \delta_\ell^j \cdot \beta_k \delta_i^k = v^j \cdot \beta_i$$

(1,1) tipinden tensör.

18 Aralık

- Hatırlatma -

Tensörler

V vektör uzayı , V^*; V'nin dual uzayı

$$\phi : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{r\text{-tane}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{s\text{-tane}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

multilineer dönüşümüne (r,s) tipinden bir tensör denir.

① $\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer dönüşüm $\begin{pmatrix} r=1 \\ s=0 \end{pmatrix}$

$\alpha(V) = \langle \alpha, V \rangle$ α'ya 1-form adı verilir.

$\alpha \in V^*$, 1-kovaryant tensör

* 1-kontravaryant tensör $r=0, s=1$

$T : V^* \to \mathbb{R}$ lineer

$T \in (V^*)^* \approx V$ $\quad V = \text{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

$V^* = \text{span}\{w^1, w^2, \ldots, w^n\}$

$T \in V \Rightarrow T = T^i e_i = T^1 e_1 + T^2 e_2 + \cdots + T^n e_n$

Genelleyelim; manifoldun boyutu kaçsa o kadar indis var

(r-kovaryant tensör)

⊛ ϕ, (r,0) tipinden bir tensör olsun. Bu takdirde,

$$\phi = \phi_{j_1 j_2 \cdots j_r} w^{j_1} \otimes w^{j_2} \otimes \cdots \otimes w^{j_r}$$ şeklinde ifade edilebilir.

((2,0) olsa ϕ_{ij}) Burada $w^{j_1} \otimes w^{j_2} \otimes \cdots \otimes w^{j_r}$, $T_0^r(V)$ uzayının bir bazıdır.

r=2 olsa ((2,0) tipinden) $\phi = \phi_{ij}\, w^i \otimes w^j$

$$\phi = \phi_{j_1 j_2} w^{j_1} \otimes w^{j_2}$$

⊛ τ, (0,s) tipinden bir tensör olsun. Bu takdirde; s-kontravaryant

$$\tau = \tau^{i_1 i_2 \cdots i_s} \underbrace{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_s}}$$ (s-kontravaryant tensör)

şeklinde ifade edilebilir. $T_s^0(V)$ uzayının bir bazıdır.

A, (r,s) tipinden (karışık tipten) bir tensör olsun.

$$A = A^{i_1 i_2 \cdots i_s}_{j_1 j_2 \cdots j_r} (w^{j_1} \otimes w^{j_2} \times \cdots w^{j_r} \otimes e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_s})$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$A_{j_1 \cdots j_r}\big|^{i_1 \cdots i_s} (w^{j_1} \otimes w^{j_2} \otimes \cdots w^{j_r} \times e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_s})$$

(Bazı kitaplar böyle yazarlar. Arada boşluk bırakmış. Önce j'leri vurmuş yani

$\overset{w^1}{\alpha} = x\,dx + y\,dy$ ve $\overset{w^2}{\beta} = y\,dx + x\,dy$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde 1-formlar olsun. Bu formların $\{X, Y\}$ dual çatısını belirleyin.

$M = \mathbb{R}^2$, $T_p M = T_p(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^2$

dualin bazları $\{dx, dy\} \rightarrow T_p^*(M)$ için baz.

$$\left.\begin{aligned} V^* &= \text{span}\{w^1, w^2, \dots, w^n\} \\ V &= \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \end{aligned}\right\} \quad w^j(e_i) = \delta^i_j \qquad \begin{aligned} w^1(e_1)&=1 \\ w^1(e_2)&=0 \end{aligned}$$

$$T_p(M) = \text{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p , \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \right\}$$

Bundan dolayı alttakileri diyebildim. $\alpha = w^1$ gibi düşün $X = e_1$ $w^1 e_1 = 1$

vektör olanları ← $X_p, Y_p \in T_p(M)$ olmalıdır.

$$\left.\begin{aligned} X &= a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \\ Y &= c\frac{\partial}{\partial x} + d\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}\right\} \text{olsun.}$$

$\alpha(X) = 1$ $\alpha(Y) = 0$

$\beta(X) = 0$ $\beta(Y) = 1$

koşulları gerçeklenmelidir.

$$\alpha(X) = (x\,dx + y\,dy)\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= x\,dx\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right) + y\,dy\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

1-form teğet vek.

$$= ax\,\underbrace{dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{1} + bx\,\underbrace{dx\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{0} + ay\,\underbrace{dy\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{0} + by\,\underbrace{dy\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{1}$$

$\alpha(X) = ax + by \Rightarrow ax + by = 1$ $(\alpha(X) = 1)$

$\alpha(Y) = x\,dx + y\,dy\left(c\frac{\partial}{\partial x} + d\frac{\partial}{\partial y}\right) = cx + dy = 0$ $(\alpha(Y) = 0)$

$\beta(X) = y\,dx + x\,dy\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right) = ay + bx = 0$ $(\beta(X) = 0)$

$\beta(Y) = y\,dx + x\,dy\left(c\frac{\partial}{\partial x} + d\frac{\partial}{\partial y}\right) = cy + dx = 1$ $(\beta(Y) = 1)$

$-x$ / $ax+by=1$
y / $ay+bx=0$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad a=\frac{x}{x^2-y^2} \quad ; b=\frac{y}{y^2-x^2}$$

$$-ax^2-bxy=-x$$
$$ay^2+bxy=0$$
$$a(y^2-x^2)=-x$$
$$a=\frac{x}{x^2-y^2}$$

hep fonksiyon çıktı. x'e y'ye değer versek teğet vektör gelecek.

$$\left.\begin{aligned} cx+dy&=0 \\ cy+dx&=1 \end{aligned}\right\} \quad c=\frac{y}{y^2-x^2}, \quad d=\frac{x}{y^2-x^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X=\dfrac{x}{x^2-y^2}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{y}{x^2-y^2}\dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] Y=\dfrac{y}{y^2-x^2}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{x}{y^2-x^2}\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

→ Vektör alanı bunlar. Bi p koysam teğet vektör

ϕ, 2. mertebeden bir kovaryant tensör olsun.

$$\phi: V\times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Big(\phi\in T^{2\,\nearrow r}_{0\,\searrow s}(V) \text{ 'dir.}\Big)$$

$$\phi=\phi_{ij}\,w^i\otimes w^j \qquad \dim V=n$$

$$\phi=\underbrace{\phi_{i_1}w^i\otimes w^1}_{i}+\phi_{i_2}w^i\otimes w^2+\dots \quad \phi_{ij}=\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & & \phi_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

→ n boyutlu
n^2 tane bileşen

$$=\phi_{11}(w^1\times w^1+\phi_{21}w^2\otimes w^1\dots)+\phi_{12}(w^1\otimes w^2\,\phi_{22}\,w^2\times w^2$$

→ Böyle böyle n^2 tane bileşen gelecek.

Şimdi bu tensörün bileşenlerini hesaplayalım.

$$\phi(e_k, e_\ell) = \phi_{ij}\, \overset{\text{1-form}}{w^i \otimes w^j}(e_k, e_\ell)$$

$$= \phi_{ij}\, \underbrace{w^i(e_k)}_{\delta^i_k}\, \underbrace{w^j(e_\ell)}_{\delta^j_\ell} = \phi_{k\ell} \,//$$

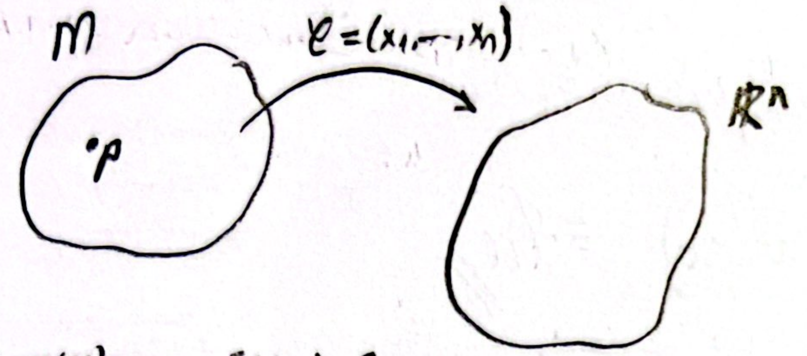
2-kontravaryant olsaydı $(s=2, r=0)$

$$\tau : V^* \times V^* \longrightarrow R \quad (\tau \in \underset{u_s}{\overset{sr}{T^0_2}}(V))$$

$$\tau = \tau^{ij}(e_i \otimes e_j) \longrightarrow$$ Buna da $w \in V^*$ 1-formlar vermeliyiz.

$$\tau^{ij}(e_i \otimes e_j)(w^k, w^\ell)$$

Manifold Üzerinde Tensörler (Devamı)



$V = T_p(M)$

* $\text{span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\} = T_p(M)$

* $v \in T_p(M) \Rightarrow v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$

* $T_p(M)$ bir vektör uzayı olduğu için bu uzayın bir duali vardır.

$$\alpha : T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R} \ (\text{lineer}) \Rightarrow \alpha \in \overset{\nearrow \text{ kotanjant uzay}}{T_p^*(M)}$$

* $dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta^i_j$

* $T_p^*(M) = \text{span}\{dx^i\}$

$\alpha_j \cdot w^j$ yazıyorduk. Artık manifoldta $\alpha_j \cdot dx^j$

* $\alpha \in T_p^*(M) \Rightarrow \boxed{\alpha = \alpha_j dx^j} \longrightarrow$ 1-kovaryant tensör (1-form)

$$\Rightarrow T^r_s(M) = \text{span}\left\{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}}_{e_{i_1}} \otimes \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}}_{e_{i_2}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \otimes \underbrace{dx^{j_1}}_{w^{j_1}} \otimes \cdots \otimes dx^{j_r}\right\}$$

(r-kovaryant, s-kontravaryant)

Silindirik küresel koordinatlar analiz li hatırla:

Ö $\phi \in T_1^2(M)$ olsun.

(r=2, s=1, 2 kovaryant 1 kontravaryant 3 mertebeden tensör)

$$\phi=\phi_{ij}^{\;\;k}\, dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x_k}$$ şeklindedir.

* $w \in T_0^r(M)$ olsun. (r-kovaryant)

$$w=w_{j_1 j_2 \cdots j_r}\, dx^{j_1}\otimes dx^{j_2}\otimes \cdots \otimes dx^{j_r}$$ şeklinde verilir.

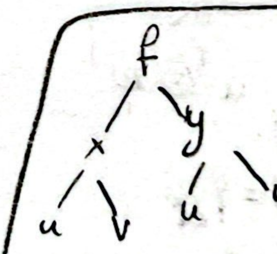
* $v \in T_s^0(M)$ olsun. (s-kontravaryant)

$$v=v^{i_1 \cdots i_s}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x_{i_s}}$$ şeklinde verilir.

Klasik Tanım:

M manifoldu üzerinde iki farklı koordinat sistemi seçelim.

Eski	Yeni
x_i	$\bar{x}_j$
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}$
dx^i	$d\bar{x}^j$



$f_u=f_x x_u+f_y y_u$

$f_v=f_x x_v+f_y y_v$

$$\Rightarrow dx_i=\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j}}_{\text{jacobien matrisi}} d\bar{x}^j$$ (Zincir kuralı)

* $\alpha \in T_p^*(M)$ olsun. $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha=\alpha_i dx^i}$

$$\alpha=\underbrace{\alpha_i\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j}}_{\bar{\alpha}_j} d\bar{x}^j$$

$$\rightarrow \boxed{\bar{\alpha}_j=\alpha_i\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j}}$$

tensörün klasik tanımı

$x=r\cos\theta$ (Silindir)

$y=r\sin\theta$

$z=z$

$(x^2+y^2=r^2)$

$\boxed{(x,y,z)}$ kartezyen koordinatlar

$\boxed{(r,\theta,z)}$ kutupsal koordinatlar

$\iint dv=?$ (hocam sormuş)

$dv=dxdydz$

$dxdydz=\underbrace{|J|}\,dzdrd\theta$

$$J=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

20 Aralık

Hatırlatmalar

$$\phi : \underbrace{V\times \cdots \times V}_{r \text{ tane}} \times \underbrace{V^{*}\times \cdots \times V^{*}}_{s \text{ tane}} \to \mathbb{R}$$

multi lineer dönüşümüne (r,s) tipinden bir tensör adı verilir.

* $r=1$, $s=0$

$\alpha : V \to \mathbb{R}$ linier 1-kovaryant tensör (1-form) adı verilir.

$\alpha \in V^{*}$ 'dir.

$V=\text{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ $\quad w^i(e_j)=\delta_j^i$

$V^{*}=\text{span}\{w^1, \ldots, w^n\}$

α 1-form $\Rightarrow \alpha = \alpha_i w^i$

* $r=2$, $s=0$ (2-kovaryant tensör)

$\phi : V\times V \to \mathbb{R}$

$\phi = \phi_{ij}\, w^i \otimes w^j$

$\phi(e_k, e_l) = \phi_{kl}$

$r=0$, $s=1$ (1-kovaryant tensör)

$T : V^{*} \to \mathbb{R} \Rightarrow T \in (V^{*})^{*} \cong V$

$T = T^i e_i$

Simetrik ve Alterne Tensörler

n elemanı bir permütasyon n! farklı şekilde sıralanabilir.

$S(r)$, $\{1,2,\ldots,n\}$ kümesinin permütasyon grubu olsun.

Örneğin $\{1,2\}$ kümesi için $\overset{\text{sigma}}{\sigma} \in S(r)$

$$\Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ 'dir.}$$

fonk.da 1, 1'e gider

fonk.da 2, 1'e gider. 1, 2'ye

signiture

işaret fonk.

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} -1, & \sigma \text{ çift permütasyon ise} \\ 1, & \sigma \text{ tek permütasyon ise} \end{cases}$$

tekse (-1)
çift permütasyon (+1)

$1<2 \Rightarrow \{1,2\}$ 0 kere yer değiştirdi. Yani çift sayıda. sgn(+)

$\{2,1\}$'i $\{1,2\}$ yapmak için 1 kere yer değiştirmeli. tek sayı (-)

$\{1,\overset{\frown}{3,2}\}$ 1 yer değiştirince $\{1,2,3\}$ oldu. 1 tek (-)

$\{\underset{\smile}{3,1},\overset{\frown}{2}\}$ 2 kere. Çift. (+1)

Tensörler için:

$\phi(V_{\sigma(1)}, V_{\sigma(2)}, \ldots, V_{\sigma(r)})$ olarak düşüneceğiz.

Ör $\phi(V_1,V_2)$, $\phi(V_2,V_1)$ (dualdeyiz)

Tanım: ϕ, r-kovaryant tensör olsun.

$(\phi_{j_1 j_2 \ldots j_r} w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_r})$

Her σ permütasyonu için

$\phi(V_{\sigma(1)}, V_{\sigma(2)}, \ldots, V_{\sigma(r)}) = \phi(V_1, \ldots, V_r)$ ise ϕ tensörüne simetrik tensör adı verilir.

Ör $r=2$ ise $\phi(V_1,V_2) = \phi(V_{\sigma(1)}, V_{\sigma(2)})$

$$\phi(V_1,V_2) = \phi(V_2,V_1)$$

$$\phi_{ij} = \phi_{ji}$$

Tanım: ϕ, r_kovaryant tensör olsun. Her σ permütasyonu için $\phi(V_{\sigma(1)}, V_{\sigma(2)}, \dots, V_{\sigma(r)}) = \operatorname{sgn}\sigma \, \phi(V_1, V_2, \dots V_r)$ ise ϕ tensörüne alterne tensör adı verilir. (Ters simetrik)

Ⓔ $r=2$ için, $\phi(V_1, V_2) = -\phi(V_2, V_1)$ → Bunda 1 kere değiştirsen yetiyor $V_2 \leftrightarrow V_1$ 1 tek sayı sgn = −1 O yüzden (−) yle çarpıyoruz

$$\phi_{ij} = -\phi_{ij}$$

Tanım: Alterne r-kovaryant bir tensöre r-form adı verilir ve r-formların kümesini $\Lambda^r(V)$ ile göstereceğiz.

Misal 1-form $\alpha(V)$

2 form $\phi(V_1, V_2) = -\phi(V_2, V_1)$

Tanım: (Alterne Dönüşümü) (Alternating Map)

$$\mathcal{A} : T^r_0(V) \longrightarrow T^r_0(V)$$

$$(\mathcal{A}\phi)(V_1, V_2, \dots, V_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S(r)} \operatorname{sgn}\sigma \, \phi(V_{\sigma(1)}, V_{\sigma(2)}, \dots, V_{\sigma(r)})$$

olarak tanımlanan $\mathcal{A}$ lineer dönüşümüne alterne dönüşümü adı verilir.

* $\mathcal{A}$ dönüşümü, r_kovaryant tensörleri r_kovaryant tensörlere taşır. (r! tane permütasyon var)

Ⓔ ϕ bir 2-kovaryant tensör olsun.

$r=2$, $(\mathcal{A}\phi)(V_1, V_2) = \frac{1}{2!}\left(\phi(V_1, V_2) - \phi(V_2, V_1)\right)$

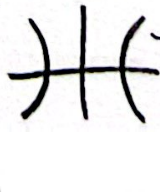
Herhangi bir fonk.u bir çift ve bir tek fonk.un toplamı olarak yazabilirim.

$$f(x) = \overbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}^{\text{çift}} + \overbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}^{\text{tek}}$$

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\cosh x} + \underbrace{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}_{\sinh x}$$

hiperbol denk. ← $x^2-y^2=1$

← $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$



→ Böyle olduğu için hiperbolik

Ör ϕ bir 3-kovaryant tensör olsun.

$$(\mathcal{A}\phi)=\frac{1}{3!}\Big(\phi(v_1,v_2,v_3)-\phi(v_1,v_3,v_2)-\phi(v_2,v_1,v_3)-\phi(v_3,v_2,v_1)+\phi(v_3,v_1,v_2)$$
$$+\phi(v_2,v_3,v_1)\Big)$$

$$*(\mathcal{A}\phi)(v_2,v_1)=\frac{1}{2!}\cdot\big(\phi(v_2,v_1)-\phi(v_1,v_2)\big) \quad =-(\mathcal{A}\phi)(v_1,v_2)$$

Burada
ne derse
ona göre yapıyoruz

Tanım (Simetri Dönüşümü) (The Symmetrizing Map)

$$\mathcal{S}: T^r_0(V)\longrightarrow T^r_0(V)$$

$$(\mathcal{S}\phi)(v_1,v_2,\dots,v_r)=\frac{1}{r!}\cdot\sum_{\sigma\in S(r)}(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(r)})$$ olarak tanımlanan.

$\mathcal{S}$ lineer dönüşümüne simetri dönüşümü adı verilir.

→ tensör simetrik olmak zorunda değil. $v_1,v_2,\dots$ vurduğumda oluşan dönüşüm simetrik olmalı.

Ör ϕ bir 2-kovaryant tensör olsun. $(r=2)$

$$(\mathcal{S}\phi)(v_1,v_2)=\frac{1}{2!}\big(\phi(v_1,v_2)+\phi(v_2,v_1)\big)$$ şeklindedir.

Ör $\phi\in T^2_0(V)$ olsun. (2-kovaryant)

i) ϕ simetrik ise, $\longrightarrow (\mathcal{S}\phi)(v_1,v_2)=\frac{1}{2}\big(\phi(v_1,v_2)+\overbrace{\phi(v_2,v_1)}^{=\phi(v_1,v_2)}\big)=\phi(v_1,v_2)$

$\phi(v_1,v_2)=\phi(v_2,v_1)$ 'dir. $(\mathcal{S}\phi)(v_1,v_2)=\frac{1}{2}\big(\phi(v_1,v_2)+\overbrace{\phi(v_2,v_1)}^{+\phi(v_1,v_2)}\big)=\phi(v_1,v_2)$ //

ii) ϕ alterne ise,

$\phi(v_1,v_2)=-\phi(v_2,v_1)$ 'dir.

$$(\mathcal{S}\phi)(v_1,v_2)=\frac{1}{2}\big(\phi(v_1,v_2)+\overbrace{\phi(v_2,v_1)}^{-\phi(v_1,v_2)}\big)=0 \;//$$

↙ Simetri dönüşümüne alterne bir tensör uyguluyoruz.

iii) ϕ alterne ise, $\phi(V_1,V_2) = -\phi(V_2,V_1)$ 'dir.

$$(\mathcal{A}\phi)(V_1,V_2) = \frac{1}{2}\left(\phi(V_1,V_2) - \overbrace{\phi(V_2,V_1)}^{-\phi(V_1,V_2)}\right) = \phi(V_1,V_2)$$

Alterne dönüşümü alterne tensör kendisine, alterne dönüşümü simetri tensör 0'a götürür.

iV) ϕ simetrik ise,

$\phi(V_1,V_2) = \phi(V_2,V_1)$ 'dir.

$$(\mathcal{A}\phi)(V_1,V_2) = \frac{1}{2}\left(\phi(V_1,V_2) - \overbrace{\phi(V_2,V_1)}^{\phi(V_1,V_2)}\right) = 0$$

Not: Herhangi bir 2-kovaryant tensörü, simetrik ve ters simetrik iki tensörün toplamı şeklinde yazabiliriz.

$$* \ \phi(V_1,V_2) = \underbrace{\frac{\phi(V_1,V_2)+\phi(V_2,V_1)}{2}}_{(\mathcal{S}\phi)(V_1,V_2)} + \underbrace{\frac{\phi(V_1,V_2)-\phi(V_2,V_1)}{2}}_{(\mathcal{A}\phi)(V_1,V_2)} \Rightarrow \boxed{\phi = \mathcal{S}\phi + \mathcal{A}\phi}$$

→ Bu calculusta neye benzer?

f çift fonk. ise ; $f(-x) = f(x)$

f tek fonk. ise ; $f(-x) = -f(x)$

f herhangi bir fonk. ise ; $\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{çift kısım}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{tek kısım}}$

$$\phi_{ij} = \underbrace{\frac{\phi_{ij}+\phi_{ji}}{2}}_{\text{Simetrik kısım}} + \underbrace{\frac{\phi_{ij}-\phi_{ji}}{2}}_{\text{Ters simetrik kısım}}$$

Özellikler:

1) $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$ ve $\mathcal{S}^2=\mathcal{S}$ 'dir.

2) ϕ alterne ise, $\mathcal{A}\phi=\phi$ 'dir.

ϕ simetrik ise, $\mathcal{S}\phi=\phi$ 'dir.

$\phi\in T^2_0(V)$ o.ü. lokal koordinatlarda ($V=T_p(M)$ olsun)

($r=2$, yani 2-kovaryant)

$\phi=\phi_{ij}\,dx^i\otimes dx^j$ şeklindedir.

$$\phi:\overset{V}{T_p(M)}\times\overset{V}{T_p(M)}\to\mathbb{R}\Rightarrow \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right\}=\text{kısaca } \boxed{\partial_i} \text{ de yazabiliriz.}$$

$$\overset{\frac{\partial}{\partial x_k}\,''}{\phi}(\partial_k,\partial_\ell)=\phi_{ij}\,dx^i\otimes dx^j(\partial_k,\partial_\ell)$$

$$=\phi_{ij}\,dx^i(\partial_k)\,dx^j(\partial_\ell)=\phi_{k\ell}$$

$\Rightarrow\phi(\partial_k,\partial_\ell)=\phi_{k\ell}$ olarak elde edilir.

FORMLAR (Diferansiyel formlar)

Tanım: **Alterne** r-kovaryant bir tensöre r-form adı verilir.

- r-formların kümesini $\Lambda^r(V)$ ile göstereceğiz.

- M, n-boyutlu bir dif. bilir manifold olsun. $V=T_p(M)$ olsun.

$\Lambda^0(V)$: 0-formlar fonksiyonlardır (f, skalerler)

$\Lambda^1(V)$: 1-formlar $(r=1)$

$$\alpha : T_p(M) \to \mathbb{R} \quad , \alpha \in T_p^*(M)$$

$$\alpha = \alpha_i dx^i \quad \text{(1-kovaryant tensör)}$$

|

şeklinde devam edilir. → kovaryant, alterne

Wedge Çarpımı: (Cross Product)

Vektörel ↗ verilen tüm vektörlere dik vektör

$$\phi \wedge \tau : \Lambda^r(V) \times \Lambda^s(V) \longrightarrow \Lambda^{(r+s)}(V)$$

→ tekrarlı permütasyon

$$(\phi,\tau) \longmapsto \phi \wedge \tau = \frac{(r+s)!}{r!\cdot s!} \mathcal{A}(\underbrace{\phi}_{\text{r-form}} \otimes \underbrace{\tau}_{\text{s-form}})$$

olarak tanımlanan ϕ ve τ dönüşümüne ϕ ve τ tensörlerinin Wedge çarpımı (dış çarpımı) adı verilir.

Hatırlatma

25 Aralık

V bir vektör uzayı, V^*, V'nin dual uzayı

$$\phi : \underbrace{V\times V\times \dots \times V}_{r\text{-tane}} \times \underbrace{V^*\times V^* \dots \times V^*}_{s\text{-tane}} \to R$$

multilineer dönüşümüne (r,s) tipinden bir <u>tensör</u> adı verilir.

$r \to$ kovaryant , $s \to$ kontravaryant

$V = T_p(M)$

* $r=1 \Rightarrow$ 1-kovaryant tensöre <u>1-form</u> denir.

$\alpha : T_p(M) \to R$ (lineer) $\alpha(V) = \langle \alpha, V \rangle$

$\alpha \in T_p^*(M)$, $\alpha = \alpha_i w^i$

Alterne Tensörler

* ϕ, r-kovaryant tensör olsun.

Her σ permütasyonu için

$$\phi(V_{\sigma(1)}, V_{\sigma(2)}, \dots, V_{\sigma(r)}) = \text{sign}\,\sigma\, \phi(V_1, V_2, \dots, V_r)$$

Simetrik tensörler

* ϕ r-kovaryant tensör olsun. Her σ permütasyonu için

$$\phi(V_{\sigma(1)}, V_{\sigma(2)}, \dots, V_{\sigma(r)}) = \phi(V_1, V_2, \dots, V_r)$$

$\{1,2\}$ kümesini düşünelim.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Alterne 2-kovaryant tensör : $\phi(v_1, v_2) = -\phi(v_2, v_1)$ $\phi_{ij} = -\phi_{ji}$

Simetrik 2-kovaryant tensörü: $\phi(v_1, v_2) = \phi(v_2, v_1)$

Alterne dönüşümü

$$\mathcal{A}: T_0^r(V) \to T_0^r(V)$$

$$(\mathcal{A}\phi)(v_1,v_2,\dots,v_r) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S(r)} \operatorname{sgn}\sigma \, \phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)},\dots,v_{\sigma(r)})$$

$r=2$: $$(\mathcal{A}\phi)(v_1,v_2) = \frac{1}{2!}\big(\phi(v_1,v_2) - \phi(v_1,v_2)\big)$$

Simetri dönüşümü

$$(\mathcal{S}\phi)(v_1,v_2,\dots,v_r) = \frac{1}{r!}\cdot\sum_{\sigma\in S(r)} \phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)},\dots,v_{\sigma(r)})$$

$r=2$: $$(\mathcal{S}\phi)(v_1,v_2) = \frac{1}{2!}\big(\phi(v_1,v_2) + \phi(v_1+v_2)\big)$$

* ϕ 2-kovaryant tensörü için,

$$\phi = \mathcal{S}\phi + \mathcal{A}\phi$$ → Sadece 2-kovaryantlar için geçerli

$$\phi_{ij} = \underbrace{\frac{\phi_{ij}+\phi_{ji}}{2}}_{\mathcal{S}} + \underbrace{\frac{\phi_{ij}-\phi_{ji}}{2}}_{\mathcal{A}}$$

Diferansiyel formlar

Tanım: Alterne r-kovaryant bir tensöre <u>r-form</u> adı verilir.

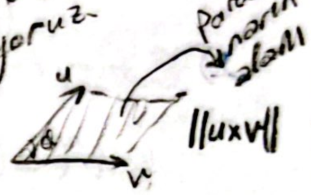
- r-formların kümesini $\Lambda^r(V)$ ile göstereceğiz.

lamda

- $\Lambda^0(V)$: 0-formlar fonksiyonlardır.

$\Lambda^1(V)$: 1-formlar (1-kovaryant tensörler)

Wedge Çarpım Vektörel çarpımın manifold hali Her iki vektöre dik bir vektör buluyoruz.



$$\phi \wedge \tau : \Lambda^r(V) \times \Lambda^s(V) \longrightarrow \Lambda^{r+s}(V)$$

Yine form elde ediyorum.

$$(\phi, \tau) \longmapsto \phi \wedge \tau = \frac{(r+s)!}{r!\,.\,s!} \mathcal{A}(\phi \otimes \tau)$$

olarak tanımlanan $\phi \wedge \tau$ dönüşümüne ϕ ve τ tensörlerinin Wedge çarpımı (veya dış çarpım) adı verilir.

1-forma teğet vek. buluyorduk. 2 tane 1-form old. için 2 tane teğet vek. buluyoruz

Ör: ϕ ve τ 1-formlar olsun. Bu takdirde, $(\phi \wedge \tau)(v_1, v_2) = ?$

$$(\phi \wedge \tau)(v_1, v_2) = \frac{(1+1)!}{1!\,.\,1!} \mathcal{A}(\phi \otimes \tau)(v_1, v_2)$$

$(r=s=1)$

$$= 2\, \mathcal{A}(\phi \otimes \tau)(v_1, v_2)$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2!}} \cdot \big(\phi(v_1).\tau(v_2) - \phi(v_2).\tau(v_1)\big)$$

$$\Rightarrow \boxed{(\phi \wedge \tau)(v_1, v_2) = \phi(v_1).\tau(v_2) - \phi(v_2).\tau(v_1)}$$

4-boyutlu uzayda buna karşılık gelen matrisin rankı çift olmalı.

2-formdur.

$\varphi = \phi \wedge \tau$ desem $\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}$

Wedge Çarpımın Özellikleri

1) Wedge çarpım bilineer ve asosyatiftir.

$(\varphi+\psi)\wedge\alpha=\varphi\wedge\alpha+\psi\wedge\alpha \quad (\varphi,\psi\in\Lambda^r(V))$ → α aynı mertebe olmasa da olur.

$\alpha\wedge(\varphi+\psi)=\alpha\wedge\varphi+\alpha\wedge\psi$

$(\varphi\wedge\alpha)\wedge\psi=\varphi\wedge(\alpha\wedge\psi)$ 'dir.

2) φ bir r-form, ψ bir s-form olmak üzere

$\varphi\wedge\psi=(-1)^{r.s}\psi\wedge\varphi$ 'dir. → $\varphi\otimes\psi\neq\psi\otimes\varphi$ 'ydi. Burada böyle bir değişme özelliği var.

Özel Durumlar

$r=s=1$ olsun.

Yani iki tane 1-formu çarparsak,

$$\varphi\wedge\psi=(-1)^{1.1}\psi\wedge\varphi \Rightarrow \boxed{\varphi\wedge\psi=-\psi\wedge\varphi}$$

* α bir 1-form olsun. Bu durumda,

$$\alpha\wedge\alpha=-\alpha\wedge\alpha \Rightarrow 2\alpha\wedge\alpha=0 \Rightarrow \boxed{\alpha\wedge\alpha=0}$$

Ör: $\alpha=dx^i$ olsa $\Rightarrow dx^i\wedge dx^i=0$

Bazlar:

$\Lambda^1(V)$ için w^{i_1}

$\Lambda^2(V)$ için $w^{i_1}\wedge w^{i_2}$

$\Lambda^3(V)$ için $w^{i_1}\wedge w^{i_2}\wedge w^{i_3}$ → (3 1-formu çarpıyor 3-form)

R^3'teki formlar :

* 0-form: fonksiyondur. f

*: 1-form: $\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz$ → a, b, c'ler fonk. veya reel sayı olabilir.

* 2-form: $\beta = a\,dx\wedge dy + b\,dx\wedge dz + c\,dy\wedge dz$

$T_p^*(M) = \text{span}\{\overset{w^1}{dx}, \overset{w^2}{dy}, \overset{w^3}{dz}\}$

3 taneden 2 tane seçeceğim.

$\binom{3}{2} = 3$ durum

$dx\wedge dy = -\underbrace{dy\wedge dz}$ old. için bunu yazmadık.

* 3-form: $\gamma = a.\,dx\wedge dy\wedge dz$

4-form yok çünkü buna misal dx katsam (dx, dy, dz'den birini katarsam)

$dx\wedge dy\wedge dz\wedge dz = 0$

$$* \; w^1\wedge w^2\wedge w^3\wedge \cdots \wedge w^r(e_1, e_2, \dots, e_r) = 1$$

Ör r=2 için ;

$$(w^1\wedge w^2)(e_1, e_2) = \underbrace{w^1(e_1)}_{1}\cdot\underbrace{w^1(e_2)}_{1} - \underbrace{w^1(e_2)}_{0}\cdot\underbrace{w^2(e_1)}_{0} = 1 \,//$$

$(\phi\wedge\tau)(v_1, v_2) = \phi(v_1)\cdot\tau(v_2) - \phi(v_2)$

Ör $n=2$, $M=\mathbb{R}^2$ olsun.

$\alpha = \alpha_i . dx^i$
$\beta = \beta_i dx^j$ R^2'de 1-formlar olsun. Bu takdirde, $\alpha\wedge\beta = ?$

$$\alpha = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy$$

$$\beta = \beta_1 dx^1 + \beta_2 dx^2 = \beta_1 dx + \beta_2 dy$$

$$(\alpha\wedge\beta) = (\alpha_1 dx + \alpha_2 dy)\wedge(\beta_1 dx + \beta_2 dy)$$

$$(\alpha\wedge\beta) = \alpha_1\beta_1 \underbrace{dx\wedge dx}_{0} + \alpha_1\beta_2 dx\wedge dy + \alpha_2\beta_1 \overbrace{dy\wedge dx}^{= -dx\wedge dy} + \alpha_2\beta_2 \underbrace{dy\wedge dy}_{0}$$

$$(\alpha\wedge\beta) = \alpha_1\beta_2 dx\wedge dy - \alpha_2\beta_1 (dx\wedge dy) = \underbrace{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}_{\text{matrisin determinantı}} dx\wedge dy \,//$$

$$\det\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_1\end{bmatrix}$$

Soruya devam

$$(\alpha\wedge\beta)(dx,dy)=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\,dx\wedge dy(dx,dy)$$

$$=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\left(\underbrace{dx\left(\frac{d}{dx}\right)}_{1}\cdot\underbrace{dy\left(\frac{d}{dy}\right)}_{1}-\underbrace{dx\left(\frac{d}{dy}\right)}_{0}\cdot\underbrace{dy\left(\frac{d}{dx}\right)}_{0}\right)$$

$$=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\,//$$

$$(\phi\wedge\psi)(v_1,v_2)=\phi(v_1)\cdot\psi(v_2)-\phi(v_2)\cdot\psi(v_1)$$

Q $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ olsun. (Kutupsal koordinatlar)

$dx\wedge dy=?$

Çözüm

$$x=r\cos\theta\Rightarrow dx=\overbrace{\cos\theta\,dr}^{r\text{'ye göre}}-\overbrace{r\sin\theta\,d\theta}^{\theta\text{'ya göre}}$$

$$y=r\sin\theta\Rightarrow dy=\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta$$

fonksiyondu bunlar
dış türev alınık 1-form oldu.
dereceler artıyor.

$$\iint e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$
$dx\,dy=r\,dr\,d\theta$

$$(dx\wedge dy)=(\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta)\wedge(\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta)$$

$$=\cos\theta\sin\theta\,\underbrace{dr\wedge dr}_{0}+r\cos^2\theta\,dr\wedge d\theta-r\sin^2\theta\,d\theta\wedge dr-r^2\cos\theta\sin\theta\,\underbrace{d\theta\wedge d\theta}_{0}$$

$$=(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)\,dr\wedge d\theta=r.dr\wedge d\theta\,//$$

$$A=\iint dx\,dy=\iint \underbrace{r}_{\text{jacobien}}\,dr\,d\theta$$

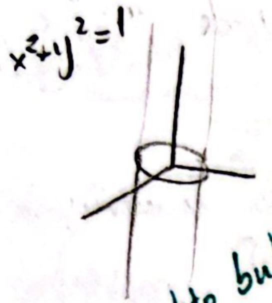
$$J=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

Bir koor. sisteminden başka sisteme geçerken jacobien kadar değişirmiş.

Silindirik Koordinatlar

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \begin{array}{l} dV = dx\,dy\,dz \\ dV = r.dz\,dr\,d\theta \end{array}$$



$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix}$$

$$det = 1.(-1)^6 . \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

1 önceki örnekte bulduk

$$(\underbrace{dx\wedge dy}_{r.dr\wedge d\theta})\wedge dz = r.dr\wedge d\theta\wedge dz$$

$\alpha = x^2dx - y^2dy$, $\beta = dx + dy - 2xydz$ $\mathbb{R}^3$'te 1-formlar olsun. Bu takdirde, $\alpha\wedge\beta = ?$

$$= (x^2dx - y^2dy)\wedge(dx + dy - 2xydz)$$

$$= x^2\underbrace{dx\wedge dx}_{0} + x^2dx\wedge dy - 2x^3y\,dx\wedge dz - y^2\underbrace{dy\wedge dx}_{-dx\wedge dy} - y^2\underbrace{dy\wedge dy}_{0} + 2xy^3dy\wedge dz$$

$$= (x^2+y^2)dx\wedge dy - 2x^3y\,dx\wedge dz + 2xy^3\,dy\wedge dz$$

Lemma: $\mathscr{l} \in \Lambda^n(V)$, $\mathscr{l} \neq 0$ o.ü.,

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ V uzayının bir bazı olsun. $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörleri,

$v_i = a_i^{\,j} e_j$ $(i,j=1,\dots,n)$ şeklinde olsun. Bu takdirde,

Bu tensör değil

$$\boxed{\mathscr{l}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det a_i^{\,j}\, \mathscr{l}(e_1, e_2, \dots, e_n)}$$ 'dir.

$v \in T_p(M)$

$T_p(M) = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$

$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \dots + v^n e_n$

$v_1 = \underbrace{v_1^1}_{a_1^1} e_1 + \underbrace{v_1^2}_{a_1^2} e_2 + \dots \underbrace{v_1^n}_{a_1^n} e_n$

Ör $\mathbb{R}^3$ üz. de aşağıdaki formlar göz önüne alınsın.

$\phi = 2w^1 + w^2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$

$\tau = -w^1 \wedge w^2 + 3w^2 \wedge w^3 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ olsun.

$v_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3$, $v_2 = 2e_2 + 2e_3$, $v_3 = 3e_3$ o.ü., $(\phi \wedge \tau)(v_1, v_2, v_3) = ?$

$$(\phi \wedge \tau) = (2w^1 + w^2) \wedge (-w^1 \wedge w^2 + 3w^2 \wedge w^3)$$

$$= \underbrace{-2w^1 \wedge w^1 \wedge w^2}_{0} + 6w^1 \wedge w^2 \wedge w^3 - \underbrace{w_1 \wedge w_2 \wedge w_2}_{0} + \underbrace{3w^2 \wedge w^2 \wedge w^3}_{0}$$

$\mathscr{l}: \phi \wedge \tau = 6w^1 \wedge w^2 \wedge w^3$

(lemma)

$$\Rightarrow \mathscr{l}(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{array}{c|ccc|} v_1 & 2 & 2 & -1 \\ v_2 & 0 & 2 & 2 \\ v_3 & 0 & 0 & 3 \end{array} \cdot \underbrace{6w^1 \wedge w^2 \wedge w^3 (e_1, e_2, e_3)}_{=1}$$

$$\mathscr{l}(v_1, v_2, v_3) = 2.2.3.6 = \boxed{72}$$

$(dx + dy) \wedge (dx \wedge dz)$

$dx \wedge dx \wedge dz + dy \wedge dx \wedge dz$

27 Aralık

Hatırlatmalar

$$\phi : \underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{r \text{ tane}}\times\underbrace{V^*\times V^*\times\cdots\times V^*}_{s \text{ tane}}\to\mathbb{R}$$

multi-lineer dönüşümüne (r,s) tipinden bir tensör adı verilir.

* $r=1 \Rightarrow$ 1-kovaryant tensör (1-form)

$\alpha : V\to\mathbb{R}$ lineer

dual uzay

$\alpha(V)=\langle\alpha,v\rangle \ , \ \alpha\in V^*$

Alterne, r-kovaryant tensör $\Rightarrow$ r-form

Wedge Çarpım: $\phi\wedge\tau : \Lambda^r(V)\times\Lambda^s(V)\to\Lambda^{r+s}(V)$

$$(\phi\wedge\tau)=\frac{(r+s)!}{r!\cdot s!}\cdot\mathcal{A}(\phi\otimes\tau)$$

Özel olarak; $r=s=1$

$$(\phi\wedge\tau)(v_1,v_2)=\phi(v_1)\cdot\tau(v_2)-\phi(v_2)\tau(v_1)$$

* $\phi\wedge\tau=(-1)^{r+s}(\tau\wedge\phi)$

1-formları çarpınca ters simetrik.

Özel olarak, $r=s=1$

$\phi\wedge\tau=-\tau\wedge\phi \longrightarrow dx\wedge dy=-dy\wedge dx$

$\Rightarrow dx\wedge dx=0$

$dx\wedge \overset{\curvearrowleft}{dz\wedge dy}=-dx\wedge dy\wedge dz$

Genel olarak α 1-form ise,

$\alpha\wedge\alpha=0$

$\underset{\leftrightarrow}{dz\wedge dx}\wedge dy=-dx\wedge \underset{\leftrightarrow}{dz\wedge dy}=dx\wedge dy\wedge dz$

[illegible] 27 Aralık

DIŞ TÜREV (Exterior Derivative)

M bir dif-bilir manifold olsun

teğet demeti

lamda

$$\Lambda(TM) = \Lambda^0(TM) \oplus \Lambda^1(TM) \oplus \cdots \oplus \Lambda^r(TM)$$

olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan tek bir

r-form; (r+1)-form

$$d : \Lambda^r(TM) \rightarrow \Lambda^{r+1}(TM)$$

lineer dönüşümü vardır:

i) $f \in C^\infty(M, p, \mathbb{R}) \Rightarrow$

$$f \in \Lambda^0(T_p(M)) \Rightarrow df \in \Lambda^1(T_p(M))$$

ii) $\varphi \in \Lambda^r(TM)$ ve $\tau \in \Lambda^s(TM)$ o.ü.

$$d(\varphi \wedge \tau) = d\varphi \wedge \tau + (-1)^r \cdot \varphi \wedge d\tau$$

iii) $d^2 = 0$'dır.

$(Rot(grad f = 0))$

$$f(x,y,z) \Rightarrow \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$Rot(grad f) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}\vec{k}$$

i, j ve k'ya karşılık gelen katsayılar.

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}$ i

$$= (f_{zy} - f_{yz})\vec{i} - (f_{zx} - f_{xz})\vec{j} + (f_{yx} - f_{xy})\vec{k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

$f \in C^\infty(M, p, \mathbb{R})$

$\Rightarrow f$ sürekli

$f_{yz} = f_{zy}$

kısmi türevler yer değiştirebilir

$= \boxed{0}$ //

Bu yüzden

$d^2 = 0$

$$TM = \bigcup T_p(M)$$

$p \in M$

(p, V)

n n $= 2n$ boyutlu

p noktasındaki bütün teğet vektörlerin kümesi

$$f \quad df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx^i$$

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

0 form $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} d$$

$$df = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

1 form

$V = span\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$

$V^* = span\{dx, dy, dz\}$

dx, dy ve dz'nin lineer birleşimi olarak yazılabilir. 1-form.

d'ye dış türev (exterior derivative) adı verilir.

(formun derecesini bir derece arttırır.)

Ö $\mathbb{R}^2$ üzerinde,

$w=(x^2+2y)dx+(x+y^2)dy$ 1-formu göz önüne alınsın.

Bu takdirde, $dw=?$

$$dw=\frac{\partial(x^2+2y)}{\partial x}dx\wedge dx+\frac{\partial(x^2+2y)}{\partial y}dy\wedge dx$$

farklı yazıyorum.

$$dw=\left(\frac{\partial(x^2+2y)}{\partial x}dx+\frac{\partial(x^2+2y)}{\partial y}dy\right)\wedge dx+\left(\frac{\partial(x+y^2)}{\partial x}dx+\frac{\partial(x+y^2)}{\partial y}dy\right)\wedge dy$$

Sıra önemli dy sağdaydı, sağda kalacak

$$dw=(2xdx+2dy)\wedge dx+(dx+2ydy)\wedge dy$$

$$dw=2x\underbrace{dx\wedge dx}_{0}+\underbrace{2dy\wedge dx}_{-2dx\wedge dy}+dx\wedge dy+2y\underbrace{dy\wedge dy}_{0}=-2dx\wedge dy+dx\wedge dy$$

$$dw=-dx\wedge dy$$

Uzunca Leibniz aslında

$$w=(x^2+2y)dx+(x+y^2)dy$$

$$dw=\underbrace{\left(\frac{\partial(x^2+2y)}{\partial x}dx+\frac{\partial(x^2+2y)}{\partial y}dy\right)}_{1.\ \text{türevi}}\wedge\underbrace{dx}_{2.}+\underbrace{(x^2+2y)}_{1.}\cdot\underbrace{d^2x}_{2.\text{nin türevi}}$$

Tanım: $w \in \Lambda^r(TM)$ olmak üzere, $w = d\alpha$ ise ($\alpha \in \Lambda^{r-1}(TM)$) w formuna tam form (exact form) adı verilir.

$Mdx + Ndy$
$M_y = N_x$
tam form
tam difeansiyel

Tanım: $dw = 0$ ise, w'ya kapalı form (closed form) adı verilir.

* Her tam form kapalıdır. (exact ⇒ closed)

Gerçekten, w tam form ise $w = d\alpha$ o.ş. $\alpha \in \Lambda^{r-1}(TM)$ vardır. $\Rightarrow dw = d(d\alpha) = \underbrace{d^2\alpha}_{\substack{(iii)\\ \text{özelliği}}} = 0$ // $\Rightarrow w$ kapalıdır.

Tersi doğru olmak zorunda değil.

Ö $\varphi = yz\,dx + xz\,dy + yx\,dz$, $\mathbb{R}^3$ üzerinde 1-form olsun.

Bu soldaki 1-form old. için öyle bir fonk. var mı ki diferansiyeli 1-formu versin. Bunu soracağım kendi kendime

i) φ kapalı mıdır?

ii) φ tam mıdır?

i)
$$d\varphi = \frac{d(yz)}{dx}\underbrace{dx\wedge dx}_{0} + \overbrace{\frac{\partial(yz)}{\partial y}}^{z} dy\wedge dx + \overbrace{\frac{\partial(yz)}{\partial z}}^{y} dz\wedge dx$$

$$+ \underbrace{\frac{d(xz)}{dx}}_{z} dx\wedge dy + \underbrace{\frac{\partial(xz)}{\partial y}}_{0} \underbrace{dy\wedge dy}_{0} + \underbrace{\frac{d(xz)}{dz}}_{x} dz\wedge dy$$

$$+ \underbrace{\frac{d(xy)}{dx}}_{y} dx\wedge dz + \underbrace{\frac{d(xy)}{dy}}_{x} dy\wedge dz + \underbrace{\frac{d(xy)}{dz}}_{0} \underbrace{dz\wedge dz}_{0}$$

$$d\varphi = \cancel{-z\,dx\wedge dy} \cancel{- y\cdot dx\wedge dz} \cancel{+ z\,dx\wedge dy} \cancel{- x\,dy\wedge dz} \cancel{+ y\,dx\wedge dz} \cancel{+ x\,dy\wedge dz}$$

$\Rightarrow d\varphi = 0$ olduğundan φ kapalı formdur.

il (f'i görmeye çalışacağız)

$f = x \cdot y \cdot z$ olsun. Bu takdirde,

$df = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \varphi \Rightarrow \varphi = df$ o.ş. bir $f \in \Lambda^0(TM)$

vardır. $\Rightarrow$ φ formu tamdır.

Not: Önce φ'nin tam form olduğunu görüp

tam $\Rightarrow$ kapalıdır diye çözülebilirdi.

② $\varphi = 2xy^2\,dx\wedge dy + z\,dy\wedge dz$, $\mathbb{R}^3$'te bir 2-form olmak üzere,

φ kapalı mıdır?

$$d\varphi = \left(\frac{\partial(2xy^2)}{\partial x}\underbrace{dx\wedge(dx\wedge dy)}_{0} + \frac{\partial(2xy^2)}{\partial y}\overbrace{dy\wedge(dx\wedge dy)}^{0} + \overbrace{\frac{\partial(2xy^2)}{\partial z}}^{0} dz\wedge(dx\wedge dy)\right)$$

$$+\left(\underbrace{\frac{\partial(z)}{\partial x}}_{0} dx\wedge(dy\wedge dz) + \underbrace{\frac{\partial(z)}{\partial y}}_{0} dy\wedge(dy\wedge dz) + \frac{\partial(z)}{\partial z}\underbrace{dz\wedge(dy\times dz)}_{0}\right)$$

$d\varphi = 0$ olduğundan, φ kapalıdır.

lineer dönüşüm

jacobien

bu

doldurmaları

Not : φ formu kapalı ise tam form olmak zorunda değildir.

$\varphi = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ formu kapalıdır ama tam form değildir.

($d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{dx-dy}{x^{2}}$ olurdu. Alttaki y^2 tamlığı bozdu)

✱ Dış türev tanımındaki ii) maddesini kanıtlayalım.
Kısalık açısından 1-formlar için kanıtlayalım.
Yani $r=s=1$ olsun.

$\varphi = \varphi_\ell dx^\ell$ ve $\tau = \tau_j dx^j$ olsun.

$\Rightarrow \varphi \wedge \tau = \varphi_\ell \tau_j \cdot dx^\ell \wedge dx^j$ (2-formdur)

$$d(\varphi \wedge \tau) = \sum_i \frac{\partial(\varphi_\ell \tau_j)}{\partial x_i} dx^i \wedge (dx^\ell \wedge dx^j)$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_i}\right) \tau_j \, dx^i \wedge dx^\ell \wedge dx^j + \sum_i \varphi_\ell \left(\frac{\partial \tau_j}{\partial x_i}\right) dx^i \wedge dx^\ell \wedge dx^j$$

$$= \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_i}\right) dx^i \wedge dx^\ell}_{d\varphi} \wedge \underbrace{\tau_j dx^j}_{\tau} + (-1)^{\underset{1}{r}} \cdot \sum_i \underbrace{\varphi_\ell \cdot dx^\ell}_{\varphi} \wedge \underbrace{\left(\frac{\partial \tau_j}{\partial x_i}\right) dx^i \wedge dx^j}_{d\tau}$$

$= d\varphi \wedge \tau + (-1)^r \varphi \wedge d\tau$ şeklinde elde edilir.

* Şimdi de (iii) koşulunu kanıtlayalım:

f, dif. bilir bir fonk. olsun. (Yani f 0-formdur)

$$\Rightarrow d^2 f = d(df) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx^i\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx^j \wedge dx^i$$

$$= \ominus \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) dx^i \wedge dx^j = -d^2 f$$

$dx^i \wedge dx^j$ yer değiştirdiğimden (-) geldi

f sürekli old. kısmi türevler yer değiştirebildim.

$$\Rightarrow d^2 f = -d^2 f$$

$$\Rightarrow 2d^2 f = 0 \Rightarrow d^2 f = 0 \;//$$

* α 1-form ise, $\alpha = \alpha_i dx^i$

$$\Rightarrow d^2\alpha = d(d\alpha) = d(d\alpha_i \wedge dx^i) = d(d\alpha_i) \wedge dx^i + (-1)^{\overset{1}{\uparrow}} \cdot d\alpha_i \wedge d(dx^i$$

$$= \underbrace{d(d\alpha_i)}_{0} \wedge dx^i - d\alpha_i \wedge d\underbrace{(dx^i)}_{0}$$

$$= 0 \;//$$

Scanned with CamScanner

3 Ocak

$\cancel{Ⓒ}$ $M = \mathbb{R}^3$ span$\{dx, dy, dz\}$

$\alpha = y^2dx + zxdy - z^2dz$
$\beta = xdx + ydy$

a) $\alpha \wedge \beta = ?$

$\alpha \wedge \beta = (y^2dx + zxdy - z^2dz) \wedge (xdx + ydy)$

$\cancel{x.y^2 dx \wedge dx} + y^3 dx \wedge dy + zx^2 dy \wedge dx \cancel{+ zxy dy \wedge dy} - z^2 x dz \wedge dx - z^2 y dz \wedge dy$

$= (y^3 - zx^2) dx \wedge dy + xz^2 dx \wedge dz + yz^2 dy \wedge dz$ //

b) $d\beta = ?$

$* \; d^2 = 0 \quad d(dx) = 0 \quad d(dy) = 0$

$d\beta = d(xdx + ydy) = dx \wedge dx + dy \wedge dy = 0$ $d\beta = 0$ old.dan β formu kapalıdır

$\left(\frac{dx}{dx} \cdot dx + \frac{dx}{dy} dy + \frac{dx}{dz} dz\right) \wedge dx$ ~~0~~

$+ \left(\frac{dy}{dx} dx + \frac{dy}{dy} dy + \frac{dy}{dz} dy\right) \wedge dy$

c) $\gamma = x^2ydx + z^2dz \quad d\gamma = ?$

$= \left(\frac{\partial(x^2y)}{\partial x} dx + \frac{\partial(y)}{\partial y} dy + \frac{\partial(x^2y)}{\partial z} dz\right) \wedge dx$

$+ \left(\frac{\partial z^2}{\partial x} dx + \frac{\partial z^2}{\partial y} dy + \frac{\partial z^2}{\partial z}\right) \wedge dz$

$= (2xydx + x^2dy) \wedge dx + (2zdz) \wedge dz$

$= x^2 dy \wedge dx$ // $= -x^2 dx \wedge dy$

d) $d\gamma \wedge \alpha = ?$

$(-x^2 dx \wedge dy) \wedge (y^2dx + zxdy - z^2dz)$

$-x^3 z \cancel{dx \wedge dy \wedge dy} + x^2 z^2 dx \wedge dy \wedge dz$

0

$= x^2 y^2 dx \wedge dy \wedge dz$

formları taşıyacak

Diferansiyel formların Geri Çekilmişi (Pull back)

lineer $f: M \to N$

$df: T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$

Bu vektörleri taşıyordu.

$\varphi: M \to M'$ dif. bilir bir dönüşüm olsun.

$$\varphi^*: \Lambda^p\big(\overset{\longrightarrow N\text{ gibi}}{M'}\big) \longrightarrow \Lambda^p(M)$$

$$\left[(\varphi^* w)(x_1,\dots,x_p)\right|_{x_0} = w\big(\varphi_*(x_1),\varphi_*(x_2),\dots,\varphi_*(x_p)\big)_{\varphi(x_0)}$$

şeklinde tanımlanan φ^* dönüşümüne geri çekilme (pull back) dönüşümü adı verilir.

Özel durum: W, M' manifoldu üzerinde 1-form olsun.

$(\varphi^* w)(x) = w(\varphi_*(x))$ şeklindedir.

$$\varphi_*: d\varphi_{x_0}: T_{x_0}(M) \longrightarrow T_{\varphi(x_0)}(M')$$

* $p=0$ durumunu göz önüne alalım.

$\varphi^* \underbrace{f(x)}_{\text{0-form}} = f(\varphi(x)) = (f \circ \varphi)(x)$ şeklindedir.

Geri Çekilmişin Özellikleri

1) φ^* dönüşümü lineerdir.

2) $\varphi^*(w \wedge \overset{\text{eta}}{\eta}) = \varphi^* w \wedge \varphi^* \eta)$

3) $(\varphi \circ \tau)^* = \tau^* \circ \varphi^*$

4) $\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*(\alpha))$ 'dır.

Scanned with CamScanner

$\mathbb{R}^2$'deki kutupsal koordinatları göz önüne alınsın.

$\phi^*(dx\wedge dy) = ?$

$x = r\cos\theta \qquad dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \qquad dx\wedge dy = r\,dr\wedge d\theta$

$y = r\sin\theta \qquad dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$

$\Rightarrow d(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$

$\phi^*(dx\wedge dy) \overset{(2)}{=} \phi^*(dx)\wedge\phi^*(dy)$

$\overset{(4)}{=} d(\phi^* x)\wedge d(\phi^* y)$

$= d(r\cos\theta)\wedge d(r\sin\theta)$

r'ye göre türev

$= (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)\wedge(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)$

$= r\cos^2\theta\, dr\wedge d\theta - r\sin^2\theta\, d\theta\wedge dr = r\,dr\wedge d\theta$

olarak bulunur.

Bu ise $\mathbb{R}^2$'de kutupsal koordinatlarda alan elemanıdır.

$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ F(x,y,z)=(\overset{u}{\overbrace{x^2+yz}},\overset{v}{\overbrace{e^{xyz}}})$. olarak tanımlanıyor. $\mathbb{R}^2$ üzerinde, $w=uv^3du\wedge dv$ 2-formu göz önüne alınıyor. Bu takdirde, $F^*w=?$

3 formu 2 forma çekemezsin. 2, 3'e çekilir ama.

$\underset{\xrightarrow[x]{}}{\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2}$

$$F^*(w)=(x^2+yz)\cdot e^{3xyz}d(x^2+yz)\wedge d(e^{xyz})$$

$$=(x^2+yz)\cdot e^{xyz}\cdot\underbrace{(2xdx+zdy+ydz)}\wedge(yze^{xyz}dx+xze^{xyz}dy+xye^{xyz}dz).$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial(x^2+yz)}{dx}dx+\frac{\partial--}{dy}dy+\frac{\partial-}{\partial}dz\right)}$$

$$F^*(w)=2x^2z\,dx\wedge dy+2x^2y\,dx\wedge dz$$

$$e^{4xyz}(x^2+yz)((2x^2z-yz^2)dx\wedge dy+(2x^2y-y^2z)dx\wedge dz)$$

Vektör alanı nının vektör alanı yönündeki türevi.

Manifold Üzerinde Konneksiyonlar

→ bağlantı

nabla

M bir dif.bilir manifold olsun. M üzerinde ∇ ile gösterilecek olan bir lineer konneksiyon, M üzerindeki herhangi C^∞-vektör alanı ikilisini bir C^∞-vektör alanına atayan bir operatördür.

bazı kitaplarda D ile gösterilir.

↓

diferansiyelin D'si.

Tanım: Her $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ve $f \in C^\infty(M, p, \mathbb{R})$ için,

i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ii) $\nabla_{X+Z}(Y) = \nabla_X Y + \nabla_Z Y$

iii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

iv) $\nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + (X[f])Y$ (Leibniz kuralı)

koşullarını sağlayan $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ fonksiyonuna M üzerinde bir lineer konneksiyon ya da kovaryant türev adı verilir.

Ör X_p, p noktasında $\mathbb{R}^n$'in bir teğet vektörü ve $Y=(y_1, \ldots, y_n)$ bir C^∞-vektör alanı olsun.

Bunlar fonksiyon

X_p'ler skaler. fonk.a nokta bağlanmış.

$$\nabla : T_p(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow T_p(\mathbb{R}^n)$$

$$(X_p, Y) \longmapsto \nabla_{X_p} Y \in T_p(\mathbb{R}^n)$$

$\nabla_{X_p} Y = (X_p[y_1], X_p[y_2], \ldots, X_p[y_n]) \in T_p(\mathbb{R}^n)$ olarak tanımlanan ∇ operatörü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir lineer konneksiyondur, gösteriniz.

(Lie bracket gibi.)

Çözüm arkada

Çözüm:

$X_p, W_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$, $Y, Z \in \chi(M)$, $f \in C^\infty(M, p, \mathbb{R})$ olsun.

$Y = (y_1, \dots, y_n)$, $Z = (z_1, \dots, z_n)$ o.ü. $Y+Z = (y_1+z_1, \dots, y_n+z_n)$ old.dan.

nabla

i) $$\nabla_{X_p}(Y+Z) \overset{\text{tanımdan}}{=} \left(X_p[y_1+z_1], X_p[y_2+z_2], \dots, X_p[y_n+z_n]\right)$$

$$\overset{X_p \text{ lineer}}{=} \left(X_p[y_1], X_p[y_2], \dots, X_p[y_n]\right) + \left(X_p[z_1], \dots, X_p[z_n]\right) = \nabla_{X_p} Y + \nabla_{X_p} Z$$

ii) $$\nabla_{X_p+W_p} Y \overset{\text{tnm}}{=} \left((X_p+W_p)[y_1], (X_p+W_p)[y_2], \dots, (X_p+W_p)[y_n]\right)$$

$$= \left((X_p[y_1]+W_p[y_1]), (X_p[y_2]+W_p[y_2]), \dots, (X_p[y_n]+W_p[y_n])\right)$$

$$= \left(X_p[y_1], X_p[y_2], \dots\right) + \left(W_p[y_1], \dots\right)$$

$$= \nabla_{X_p} Y + \nabla_{W_p} Y$$

iii) $$\nabla_{f(p)X_p} Y = \left((f(p)X_p)[y_1], (f(p)X_p)[y_2], \dots, (f(p)X_p)[y_n]\right)$$

$$= \left(f(p)X_p[y_1], f(p)X_p[y_2], \dots\right)$$

$$= f(p)\left(X_p[y_1], \dots\right)$$

$$= f(p) \cdot \nabla_{X_p} Y \;//$$

Scanned with CamScanner

iv) $\nabla_{X_p}(fY) \overset{tnm}{=} \left(X_p[f\cdot y_1], X_p[f\cdot y_2], X_p[f\cdot y_3], \ldots, X_p[f\cdot y_n] \right)$

$\overset{leibn}{=} \left(X_p[f]\cdot y_1(p) + f(p)\cdot X_p[y_1], X_p[f]\, y_2(p) + f(p)\cdot X_p[y_2], \ldots \right)$

$= X_p[f]\cdot\left(y_1(p), y_2(p), \ldots, y_n(p)\right) + f(p)\left(X_p[y_1], X_p[y_2], \ldots\right)$

$= X_p[f]\cdot Y(p) + f(p)\cdot \nabla_{X_p} Y$

$\left(\begin{array}{l} Y = (y_1, \ldots, y_n) \\ fY = (fy_1, fy_2, \ldots fy_n) \end{array} \right.$

olarak elde edilir. $\xRightarrow{i)\ iv)}$ ∇ bir lineer konneksiyondur.

* Bu örnekte X_p teğet vektörünü bir vektör alanı olarak almak da mümkündür. ∇ konneksiyonuna $\mathbb{R}^n$'in standart konneksiyonu denir.

Özel olarak, $X = \frac{\partial}{\partial u^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial u^j}$ $(i,j = 1, \ldots, n)$

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$ şeklinde bulunur.