

- 2 EKİM PAZARTESİ - (10.30 - 12.20)

O'dan farklı $\mathbb{H}$ bir reel sayının karesi poz. bir reel sayı ve reel üstel fonk. poz. değerler alan bir fonk. old'dan reel sayılar zis. içinde negatif bir reel sayının karesi ve logaritması tanımlanamaz. Kompleks sayılar bu engeli ortadan kal. için tanımlanmış sayılardır.

Tarihsel olarak komp. sayıların mat. alanına girmesinin temelinde reel köklü olmayan polinomların köklerinin bulunması problemi yatar.

Kompleks sayılar ve fonk.ler günlük hayatımızda sınırlı ve körimize giben nesneler değildir. Ancak mth. ve fizik bilim dal.'k' çözüm yöntemleri araştırıldığında kompleks sayılar ve fonk.ler doğal bir ortaya çıkar. Örneğin $y'' + y = 0$ 2. mertebeden homojen dif. denin. çözüm için

$$r^2 + 1 = 0 \quad r = -i \quad e^{it} \cos(t) + e^{it} \sin(t)$$

- Tanım ve Temel Özellikler -

Tanım: $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. $z = (x, y)$ sıralı ikiliye bir kompleks sayı

denir. $i = (0, 1)$ kompleks sayıya sanal (imajinal) birim, $x = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re} z$

sayısına $z = (x, y)$ kompleks sayısının real kısmı, $y = \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im} z = I_z$

sayısına da $z = (x, y)$ kompleks sayısının sanal kısmı denir.

Örnek: $z_1 = (4, -3) \quad z_3 = (-1, 0) \quad z_5 = (\ln 2, \sin 7)$
 $z_2 = (0, 7) \quad z_4 = \left(\sqrt{3}, \frac{4}{5}\right)$

Tanım $z_1 = (x_1, y_1) \quad z_2 = (x_2, y_2)$ kompleks sayıları verilsin. Bu durumda

z_1 ve z_2 kompleks sayıları için

i) $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

ii) $z_1 z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$
biçiminde tanımlıdır.

Örnek: $z_1 = (2, \sqrt{3})$ ve $z_2 = (-\sqrt{3}, -2)$ verildiğine göre $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$?

i) $z_1 + z_2 = (2 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 2)$

ii) $z_1 z_2 =$

Tanım: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ reel sayıların sıralı ikililerinin kümesi üzerinde tanımlı Tanım 1.2'de verilen toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathbb{C}$ ile gösterilen kompleks sayılar kümesi denir ve $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

NOT: Tanım 1.3 nedeniyle $\mathbb{R}^2$ düzlemine kompleks düzlem de denir. Bu düzlemde $(x, 0)$ kompleks sayısı ile x reel sayısı aynı noktayı belirttiklerinden bu iki sayı eşleşir ve $(x, 0) = x$ biçiminde yazılır.

Kompleks sayılar birer sıralı ikililer olduğundan

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$$

Örnek: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a > b$ için $z_1 = (2, \log_2(a-b))$ ve $z_2 = (\sqrt[3]{a+b}, 2)$ verildiğine göre $z_1 = z_2 \Rightarrow a = ?$ $b = ?$

$$\sqrt[3]{a+b} = 2$$

$$\Downarrow$$

$$a+b = 8$$

$$\log_2(a-b) = 2$$

$$a-b = 4$$

$$a = b + 4$$

$$b = 2$$

Önerme: 1) $i^2 = -1$ 2) $iy = (0, y)$ 3) $z = (x, y) = x + iy$ 'dir.

İSPAT: i) $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$

ii) $iy = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot y) = (0, y)$

iii) $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$

NOT: 1) $z = x + iy$ kompleks sayının standart gösterimidir. Bu gösterime göre $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ ol.

$$* z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$* z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

biçimindedir.

2) $x \in \mathbb{R}$ için $x = x + i0 \in \mathbb{C}$ olduğundan $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ 'dir.

3) $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $z = iy$ "kompleks sayıdır" "pür sanal sayı" denir.

ve $0 < y \in \mathbb{R}$ için $\sqrt{-y} = i\sqrt{y}$ biç. tanımlıdır.

SÖNÜŞ: $z^2 + 1 = 0$ denkleminin $\mathbb{C}$ 'de çözümü vardır.

<u>İSPAT:</u>	$z = i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$	$z = -i = -\sqrt{-1}$
	$i^2 = -1$	$(-i)^2 = -1$
	$i^2 + 1 = 0$	$(-i)^2 + 1 = 0$

↓
oldıdan $z = \pm i$ kompleks sayıları verilen denklemin kökleridir.

Örnek: $z_1 = -\frac{2}{3} + \frac{4}{5}i$, $z_2 = \frac{6}{5} - \frac{5}{1}i$

$z_1 + z_2 = ?$

$z_1 z_2 = ?$

Tanım: $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x, y \in \mathbb{R}$ ve $z = x + iy$ ö. bir karmaşık sayının kuvveti:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ tane}}$$

biçiminde tanımlıdır.

Örnek: 1) $i^{38} = ?$ 2) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^{20} = ?$ 3) $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{80}$

1.2 CEBİRSEL ÖZELLİKLER

ÖNERME: z_1, z_2 ve $z_3 \in \mathbb{C}$ ise

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 z_2 = z_2 \cdot z_1$ (Değişme)

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (Birleşme)

eşitlikleri sağlanır.

İSPAT: Ödev.

Tanım: $0 = (0, 0)$ sayısal toplama işlemine göre etkisiz eleman ve $1 = (1, 0)$ sayısal çarpma işlemine göre birim elemandır.

İSPAT: Ödev.

NÖT:

$\mathbb{Z} = x+iy$ sayısının toplama işlemine göre tersi $-z = -x-iy$ sayısı, çarpma işlemine göre $z^{-1} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$

kompleks sayıdır

$z_1, 0 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ için $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$ olarak tanımlanır.

SÖNÜC: $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi bir cisimdir.

Örnek 1.6:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3+4i \\ z_2 &= 1-2i \end{aligned} \quad \text{ise} \quad \frac{z_1}{z_2} = ?$$

5 EKİM
PERŞEMBE

$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{1^2+2^2} = \frac{1+2i}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} = (3+4i) \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right) = \left(3 \cdot \frac{1}{5} - 4 \cdot \frac{2}{5} + i \left(3 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} \right) \right) \\ &= -1+2i \end{aligned}$$

1.2.1 Kompleks Düzlem ve Geometrik Yorum

Düzlemde her (x,y) noktası tanımlanmış bir $z = (x,y)$

kompleks sayısına ve her $z \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı da düzlemde

$(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ noktasına karşılık gelir. Bu bire bir eşleme

değişir. $\mathbb{R}^2$ düzlemine kompleks düzlem veya z -düzlemi adı verilir. x -ekseni reel eksen ve y -ekseni sanal eksen ol. kullanılabilir.

Diğer yandan her (x,y) noktası başlangıç noktası orijinde $(0 = (0,0))$ sonu (bitimi) (x,y) noktasında bir vektör belirlediğinden $\mathbb{C}$ kompleks sayısını bir vektör olarak düşünebiliriz.

1.3 Mutlak Değer ve Kompleks Eşkenlik

Tanım 1.5: $z = x+iy \in \mathbb{C}$ olsun.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

nonnegatif reel sayı olan z kompleks sayısının mutlak değeri (modülü veya normu) denir.

Geometrik olarak $|z|$, orijine z kompleks sayısı arasındaki uzaklıktır. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ noktaları arasındaki uzaklık

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ dir.}$$

ÖRNEKLER

1) $|i| = ?$ $|z| = |0+i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$

2) $z = \sin t + i \cdot \cos t$ $|z| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

3) $z = 4+3i$ $|z| = \sqrt{10}$

4) $z_1 = 6+4i$ $z_2 = 1-8i$ ise z_1 ve z_2 arası uzaklık $|z_1 - z_2|$

5) $z = \frac{i-1}{1+i}$ $\text{Re}(z) = ?$ $\text{Im}(z) = ?$ $|z| = ?$

$$\frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i-i^2-1+i}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

Tanım 1.6: $z = x+iy \in \mathbb{C}$ olsun. $\bar{z} = x-iy$ kompleks sayısının

z komp. sayısının eşleniği (veya konjügesi) denir.

Geometrik olarak $\bar{z}$, z noktasının reel eksene göre yansıması veya

simetrisidir. Detayısıyla

$$\overline{\bar{z}} = z \text{ ve } |\bar{z}| = |z|$$

Örnek 1.12: $z = 2-2i \Rightarrow \bar{z} = 2+2i$

$$z = 7 \Rightarrow \bar{z} = 7$$

$$z = 5i \Rightarrow \bar{z} = -5i$$

Örnek 1.4: $z, w \in \mathbb{C}$ ise

$$1) \operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$2) \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

İSPAT: Alıştırma

Örnek 1.5: $z, w \in \mathbb{C}$ ise

$$1) |z| \geq |\operatorname{Re}(z)| \geq \operatorname{Re} z \text{ ve } |z| \geq |\operatorname{Im}(z)| \geq \operatorname{Im} z;$$

$$2) z \cdot \bar{z} = |z|^2 \text{ ve } w \neq 0 \text{ için } \frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2};$$

$$3) |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \text{ ve } \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0) \quad (\text{Çarpımsallık})$$

$$4) |z+w| \leq |z| + |w| \quad (\text{Üçgen eşitsizliği})$$

İSPAT:

$$1) |z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \geq \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2} = |\operatorname{Re} z| \geq \operatorname{Re} z$$

$$2) \left. \begin{aligned} z &= \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \\ \bar{z} &= \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z) \end{aligned} \right\} z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = |z|^2$$

$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} \quad \text{old.'dan} \quad \frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$$

$$3) |zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) \\ = z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} \\ = |z|^2 \cdot |w|^2$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$4) |z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) \\ = (z+w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ = |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2 \\ = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ = (|z| + |w|)^2$$

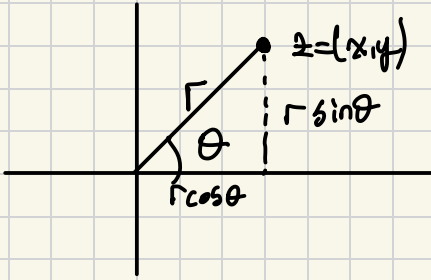
SÖNÜÇ 1.6:

Her $z, w \in \mathbb{C}$ için

$$||z| - |w|| \leq |z - w| \text{ 'dir. (Ters Üçgen eşitsizliği)}$$

1.4 KUTUPSAL GÖSTERİM

$\theta \neq z = x + iy \in \mathbb{C}$, $|z| = r$ ve θ , z vektörünün pozitif x -ekseni ile yaptığı açı olsun. Reel sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının tanımıyla $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ 'dir.



Tanım 1.7: $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ ifadesine z komp. sayının bir kutupsal (polar veya trigonometrik) gösterimi ve θ açısına da z kompleks sayısının bir argümenti denir.
 $\theta = \arg z$ ile gösterilir.

NOT 1.4.1:

- 1) $\tan \theta = \frac{y}{x}$ eşitliğini sağlayan θ açıdır. Bu durumda $\arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ 'dir.
- 2) $z = 0$ 'ın argümenti tanımlanamaz.

3) Düzlemde polar koordinatlarda $(r, \theta) = (r, \theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
 aynı noktayı gösterdiğinden $\arg z$ çok değerlidir. $\theta = \arg z$ nin
 $(-\pi, \pi]$ aralığındaki değerine argümanın esas değeri denir ve
 $\text{Arg} z$ ile gösterilir.

ÖRNEKLER: 1) $z = 1 + \sqrt{3}i$

2) $z = -i$

3) $z = -1 - i$ $\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ $\tan \theta = 1 \Rightarrow \arg z = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$
 kompleks sayıların kutupsal biçimde gösteriniz. $\text{Arg} z = \frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$

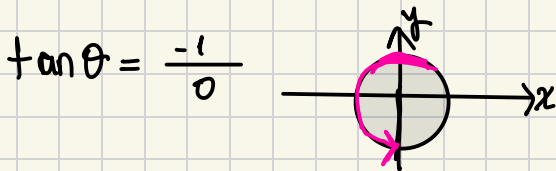
1) $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\tan \theta = \frac{y}{x} = \sqrt{3}$ $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\arg z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\text{Arg} z = \frac{\pi}{3}$

$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

2) $|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$



$\arg z = -\frac{\pi}{2}$

$\arg z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$z = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}$

Örnek 1.14: $z = x+iy \in \mathbb{C}$ olsun.

$$|x|+|y| \leq \sqrt{2} |z| \quad \text{vld. gösteriniz.}$$

Çözüm: $|z|=r$ ve $\text{Arg } z = \theta$ olsun.

Bu durumda $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 'dir.

$$\begin{aligned} (|x|+|y|)^2 &\stackrel{\text{K.B}}{=} (|r|\cos\theta + r\sin\theta)^2 \\ &= |r|^2|\cos\theta|^2 + 2|r|^2|\sin\theta|\cos\theta + |r|^2|\sin\theta|^2 \\ &= |r|^2(|\cos\theta|^2 + |\sin\theta|^2) + |r|^2|\sin 2\theta| \leq |r|^2 + |r|^2 \\ &= 2|r|^2 \\ &= 2|z|^2 \end{aligned}$$

1.5 Kutupsal Gösterimle Çarpma ve Bölme

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Kutupsal gösterimle verilen iki kompleks sayı olsun. Bu durumda

$$z.w = rs(\cos(\theta+\psi) + i\sin(\theta+\psi))$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\theta-\psi) + i\sin(\theta-\psi)) \quad \text{biçimindedir.}$$

Burada

$$|zw| = r.s = |z||w|$$

$$\arg zw = \theta + \psi + 2k\pi$$

$$= \arg z + \arg w$$

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{r}{s}$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \theta - \psi + 2k\pi$$

$$= \arg z - \arg w + 2k\pi$$

ÖRNEK: $z = \sqrt{3} + i$ ve $w = 1 + \sqrt{3}i$ kutupsal gösterişlerini

hesaplayınız.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

a) $z.w \Rightarrow$

b) $\frac{z}{w}$

$$\begin{aligned} z.w &= r s (\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})) \\ &= r s (0 + i\sin 90) \\ &= r s (i) \end{aligned}$$

9 EKİM PAZARTESİ

Örnek 1.7: z ve w sıfırdan farklı kompleks sayılar olsun.

1) $\arg(z.w) = \arg z + \arg w \pmod{2\pi}$

2) $\arg(\frac{z}{w}) = \arg z - \arg w \pmod{2\pi}$

3) $\arg(\bar{z}) = -\arg z \pmod{2\pi}$

4) $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg z \pmod{2\pi}$ dir.

Burada $\pmod{2\pi}$ ifadesi eşitliğin 2π sayısının bir katı eklenmesiyle de doğru olduğu anlamındadır.

NOT: $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olsun. $\arg(z.w) = \arg z + \arg w$ eşitliği

genel olarak doğru değildir. Örneğin $z = -1$ ve $w = i$ olsun.

$\arg z = \pi$ ve $\arg w = \frac{\pi}{2}$ 'dir. Ancak $z.w = -i$ ve

$$\arg(z.w) = -\frac{\pi}{2} \neq \arg z + \arg w \text{ 'dir.}$$

ÖRNEK: $z = \sqrt{3} + i$ ve $w = 1 + \sqrt{3}i$ kutupsal gösterişlerini

hesaplayınız.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

a) $z.w \Rightarrow$

b) $\frac{z}{w}$

$$\begin{aligned} z.w &= r s (\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})) \\ &= r s (0 + i\sin 90) \\ &= r s (i) \end{aligned}$$

9 EKİM PAZARTESİ

Örnek 1.7: z ve w sıfırdan farklı kompleks sayılar olsun.

1) $\arg(z.w) = \arg z + \arg w \pmod{2\pi}$

2) $\arg(\frac{z}{w}) = \arg z - \arg w \pmod{2\pi}$

3) $\arg(\bar{z}) = -\arg z \pmod{2\pi}$

4) $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg z \pmod{2\pi}$ dir.

Burada $\pmod{2\pi}$ ifadesi eşitliğin 2π sayısının bir katı eklenmesiyle de doğru olduğu anlamındadır.

NOT: $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olsun. $\arg(z.w) = \arg z + \arg w$ eşitliği

genel olarak doğru değildir. Örneğin $z = -1$ ve $w = i$ olsun.

$\arg z = \pi$ ve $\arg w = \frac{\pi}{2}$ 'dir. Ancak $z.w = -i$ ve

$$\arg(z.w) = -\frac{\pi}{2} \neq \arg z + \arg w \text{ 'dir.}$$

1.6 KOMPLEKS SAYILARIN TAM SAYI ÜSLERİ VE ÜSTEL FORMLARI

Tanım: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ olsun. Kutupsal gösterimle çarpım ve tümevarımla her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$z^n = r^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

biçimindedir. Bu formüle De Moivre formülü denir.

Bu formül trigonometrik eşdeşliklerin elde edilmesi açısından önemlidir.

ÖRNEK: $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ (DMF)

$$\cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\sin\theta\cos\theta) = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$^*\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$^*\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

e^x fonksiyonunun Taylor seri açılımında $x = i\theta$ seçilir ve

sanal kısımları ayırırsa;

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!}$$

$$= 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right) + i \left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta$$

elde edilir.

Tanım: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ formülüne **Euler formülü** denir.

* $z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$ ifadesine de z kompleks sayısının
* üstel formu denir.

NOTLAR: 1) Her $\theta \in \mathbb{R}$ için $|e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$

2) $k \in \mathbb{Z}$ için $e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1 + i0 = 1$

$$e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \sin \pi = -1$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{\frac{3\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

3) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ve $w = s(\cos \psi + i \sin \psi)$ olsun. Bu durumda

* $z \cdot w = r e^{i\theta} \cdot s e^{i\psi} = r s e^{i(\theta+\psi)}$ * $\frac{z}{w} = \frac{r}{s} e^{i(\theta-\psi)}$ dir.

4) $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
 $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$

olduğundan $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, bulunur.
 $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

bulunur.

ÖNERME:Her $\theta \in (0, 2\pi)$ reel sayısı ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$(*) \quad 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$(**) \quad \sin\theta + \sin 2\theta + \dots + \sin(n\theta) = \frac{1}{2} \cot\frac{\theta}{2} - \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

Özdeşlikleri doğrular.

BİRİNCİ:

$$\begin{aligned} & 1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) + i(\sin\theta + \sin 2\theta + \dots + \sin(n\theta)) \\ &= 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{ni\theta} = \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \cdot \frac{1 - e^{-i\theta}}{1 - e^{-i\theta}} \\ &= \frac{1 - e^{-i\theta} - e^{i(n+1)\theta} + e^{in\theta}}{|1 - e^{i\theta}|^2} \\ &= \frac{1 - \cos\theta + i\sin\theta - \cos((n+1)\theta) - i\sin((n+1)\theta) + \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - \cos\theta - \cos((n+1)\theta) + \cos(n\theta)}{2 - 2\cos\theta} + i \frac{\sin\theta - \sin((n+1)\theta) + \sin(n\theta)}{2 - 2\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}}{2 \cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}} + i \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2\cos\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}}{2 \cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}} \quad \sin\theta + \dots + \sin(n\theta) = \frac{\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} - \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

1.7 KOMPLEKS SAYILARIN KÖKLERİ

Tanım: $a \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $z^n = a$ denklemini sağlayan

z -kompleks sayılarına a sayısının n -yinci kökleri denir.

$a=0$ ise n -yinci tek kök $z=0$ sayıdır.

$z^n=1$ denkleminin köklerine birimin n -yinci kökleri denir.

ÖNERME: (Kök Formülü)

$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $r=|a|$, $\theta = \arg a$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.

denklemin kökleri $z^n = a$
 $k=0,1,\dots,n-1$ için

$$z_k = r^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

kompleks sayılardır.

NOT: (Geometrik Yorum)

$k=0,1,\dots,n-1$ için $|z_k| = R = r^{1/n}$ ve

$$z_{k+1} = r^{1/n} e^{\frac{\theta + (2k+1)\pi}{n} i} = z_k e^{\frac{2\pi i}{n}} \text{ yani } z_{k+1} \text{ kökü}$$

z_k kökünün $\frac{2\pi}{n}$ açısıyla döndürülmesi sonucu elde edildiğinden $z^n = a$ denkleminin kökleri merkezi orijinde

yarıçapı $r^{1/n}$ olan çemberin üzerinde eşit uzaklıklarda bulunurlar.

Ve eşkenar n-genin köşe noktalarını oluştururlar.

ÖRNEK: $z^3=1$ denkleminin kökleri

$$a=1 \quad r=|a|=1 \quad \theta = \arg 1 = 0 \quad \text{ve } n=3 \text{ için}$$

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \quad k=0,1,2$$

$$z^3 = 1 \cdot e^{(0+2k\pi)i}$$

$k=0$ için

$$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

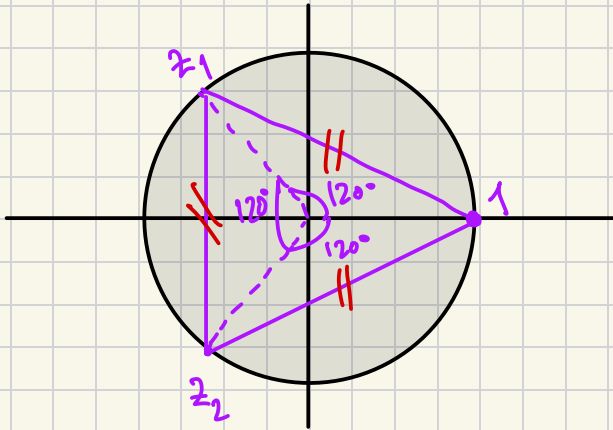
$$z = 1 \cdot e^{\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)i}$$

$k=1$ için

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

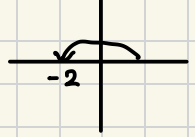
$k=2$ için

$$\begin{aligned} z_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



Örnek: $z^5 + 2 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm $z^5 = -2 = a$ $r = |a| = 2$ $\arg(z) = \pi$ ve $n=5$



olmak üzere $k = 0, 1, 2, 3, 4$ için

$$z_k = 2^{1/5} \left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) \right]$$

$k=0$ için $z_0 = 2^{1/5} \left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]$

$k=1$ " $z_1 =$

$k=2$ " $z_2 =$

$k=3$ " $z_3 =$

$k=4$ " $z_4 =$

ÖRNEK: $z^2 = 1-i$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm

$a = 1-i$ $r = |1-i| = \sqrt{2}$, $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

ve $n=2$ olmak üzere $k=0,1$ için

$$z_k = (\sqrt{2})^{1/2} \left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right) \right]$$

$k=0$ için $z_0 = 2^{1/4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)$

$k=1$ için $z_1 = 2^{1/4} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \right)$

Örnek

$z^2 = 1+i$ denkleminin köklerini bulunuz.

$$a = 1+i \quad |z| = \sqrt{2} \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$n=2$ olmak üzere $k=0,1$ için

$$z_0 = 2^{1/4} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$z_1 = 2^{1/4} \left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) \right)$$

ÖRNEK

$z^{4/3} = -4$ denkleminin köklerini bulunuz.

$$a = -4 \quad r = |a| = 4 \quad \arg(-4) = \pi$$



olmak üzere $k=0,1,2,3$ için denklemin kökleri;

$$z_k = 4^{3/4} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{\frac{4}{3}}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{\frac{4}{3}}\right) \right] \quad \text{biçimindedir.}$$

1.8 KUADRATİK DENKLEMLER VE ÇÖZÜM KÜMELERİ

Önerme: $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ sabitler olsun.

1) $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ 'dir.}$$

2) $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \text{ 'dir.}$$

ÖRNEK: $x^2 + x + 1 = 0$ denk. köklerini bulunuz.

Çözüm:

$$a = b = c = 1 \quad \Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0 \text{ olarak üzere}$$

denklemin kökleri;

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ 'dir.}$$

BÖLÜM 2: KOMPLEKS DÜZLEMİN TOPOLOJİK YAPISI

Analizin merkezini limit, yak. dizi ve süreklilik kavramları oluşturur. Türev, integral ve yak. seri kavramları bu temel kavramlar üzerine inşa edilir. Dolayısıyla bu kavramların genel bir çerçevede içerisinde çalışılması teori ve uygulama açısından oldukça önemlidir. Bu genel çerçevenin belirlenmesinde analizde limit ve süreklilik kavramlarının dayandığı ve genellenebilecek temel prensiplerin anlaşılması zorunludur. Bu prensiplerden biri reel sayılar arasında mutlak değer fonksiyonunun tanımlanmış uzaklık kavramı ve diğerinde uzaklık kavramının belirlediği açık küme kavramıdır. Metrik uzaylar genel anlamda uzaklık ve analizin temel kavramlarının soyut uzaylara genellenmesi çalışmalarının sonucudur. Metrik veya uzaklık kavramı yerine açık küme kavramı başlangıç değeri alınarak oluşturulan topolojik uzaylar analizin temel kavramlarının soyut uzaylarda çalışılmasını en genel çerçevesini belirler.

2.1 METRİK UZAYLAR

Tanım: X boş kümeden farklı bir küme $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonk. olsun. Her $x, y, z \in X$ için d fonksiyonu

$$M1) d(x, x) = 0 \quad \text{ve} \quad x \neq y \text{ için } d(x, y) \geq 0$$

$$M2) d(x, y) = d(y, x)$$

$$M3) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

metrik aksiyamlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu ve (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir. X kümesinin elemanlarına da noktalar denir.

Tanım: $E \subset X$ ise d fonksiyonu E üzerinde metrik aksiyamlarını sağlar. Dolayısıyla (E, d) bir metrik uzaydır. Bu uzaya (X, d) uzayının bir alt uzayı denir.

Tanım: (X, d) bir metrik uzay $x \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$B(a, r) = \{ x \in X : d(x, a) < r \}$$

ve

$$\bar{B}(a, r) = \{ x \in X : d(x, a) \leq r \}$$

kümelerine sırasıyla, a merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar

(veya küre) ve kapalı yuvar (veya küre) denir.

ÖRNEK: $X = \mathbb{R}$ olsun. $d(x, y) = |x - y|$ fonk. $\mathbb{R}$ üzerinde metriktir. Bu

metriğe mutlak değer metriği denir ve $|\cdot|$ ile gösterilir. Bu metriğe göre açık yuvarlar açık aralıklardır.

ÖRNEK: $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2} \text{ fonk. bir metriktir. } (\mathbb{R}^n, d)$$

metrik uzayına n -boyutlu Öklid Uzayı denir.

ÖRNEK: $\emptyset \neq X$ olsun. $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu (X, d) metrik uzayına ayrık (discrete) metrik uzay denir.

Bu uzayda açık yuvarlar

$$B(x, r) = \begin{cases} \{x\} & r \leq 1 \\ X & r > 1 \end{cases}$$

ÖRNEK: $C([a, b]) = \left\{ f: f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonk.} \right\}$

reel değerli sürekli fonk. uzayı üzerinde

$$d_\infty(f, g) = \sup \{ |f(t) - g(t)| : t \in [a, b] \} \text{ fonk. bir metriktir.}$$

Yine aynı küme üzerinde

$$d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$$

Fark. bir metriktir.

Tanım: d_1, d_2 bir X kümesi üzerinde iki metrik olsun. Her

$$x, y \in X \text{ için } m d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq M d_1(x, y)$$

esitsizliğini gerçekleyen $m, M > 0$ reel sabitleri varsa d_1, d_2 metriklerine denk metrikler denir.

ÖRNEK: $X = \mathbb{C}$ olsun. Her $z, w \in \mathbb{C}$ için

$$d(z, w) = |z - w|$$

Fark. $\mathbb{C}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe mutlak değer metriği denir ve $||$ ile gösterilir. $A \in \mathbb{C}$ ise (A, d) uzayı $(\mathbb{C}, || \cdot ||)$ metrik uzayının bir alt uzayıdır. Bu uzayda açık yuvarlar, açık daireler ve disklerdir.

ÖRNEK: $z = x + iy$, $w = s + it$ için

$$d_{\infty}(z, w) = \max\{|x-s|, |y-t|\}$$

ve

$$d_1(z, w) = |x-s| + |y-t|$$

Fonksiyonları $\mathbb{C}$ üzerinde bir metriktir. d_∞ metriğine maksimum metrik, d_1 metriğine toplam veya taxicab metriği denir. $(\mathbb{C}, d_\infty)$ uzayında açık yuvarlar açık karelerdir.

2.2 DÜZLEMEDE KÜMELERİN YAPISI, AÇIK KÜMELER

Tanım: $a \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olsun.

$$D(a, r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a| < r \}$$

kümesine merkezi a yarıçapı r olan açık disk (veya açık yuvar) ve

$$\overline{D}(a, r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r \}$$

kümesine merkezi a yarıçapı r olan kapalı disk (veya kapalı yuvar) denir. $D(0, 1)$ diskin birim disk denir ve D ile gösterilir.

Tanım: $A \subset \mathbb{C}$ olsun. Her bir $z \in A$ için ve $r > 0$ için ve

$$D(z, r_z) \subset A$$

olacak biçimde bir $r_z > 0$ sayısı varsa A kümesine $\mathbb{C}$ içinde açık bir küme veya $\mathbb{C}$ kümesinin açık bir alt kümesi denir.

16 EKİM PAZARTESİ

ÖRNEK: 1) Açık diskten tanımından her bir $z \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ için $D(z, r) \subset \mathbb{C}$ olduğundan $D, \mathbb{C}$ içinde açık

bir kümedir.

2) $\emptyset, \mathbb{C}$ içinde açık bir kümedir. Çünkü tanım uygulayabileceğimiz nokta yoktur.

ÖNERME: $a \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun. $D(a, r)$ açık disk $\mathbb{C}$ içinde açık bir kümedir.

İSPAT: $z \in D(a, r)$ olsun. Bu durumda

$$|z - a| < r$$

esitliği gerçektir. $s = r - |z - a| > 0$ olmak üzere her bir $\zeta \in D(z, s)$ için üçgen eşitsizliğinden

$$|\zeta - a| = \left| \zeta - z + z - a \right| \leq \left| \zeta - z \right| + |z - a|$$

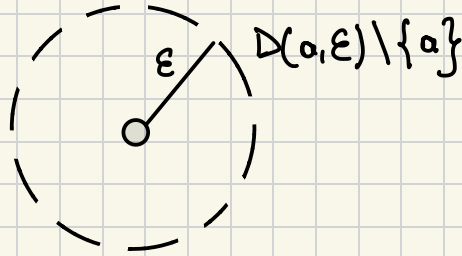
$$< s + |z - a| = r - |z - a| + |z - a| = r$$

olduğundan $\zeta \in D(a, r)$ bulunur. Buna göre

$$D(z, s) \subset D(a, r)$$

Buna göre $D(a, r), \mathbb{C}$ içinde açık bir kümedir.

Tanım: $a \in \mathbb{C}$ noktasını içeren herhangi bir açık kümeye a noktasının bir komşuluğu, $D(a, \epsilon)$ diski a noktasının ϵ -komşuluğu ve $D(a, \epsilon) \setminus \{a\}$ kümesine de a 'nın delinmiş ϵ komşuluğu denir.

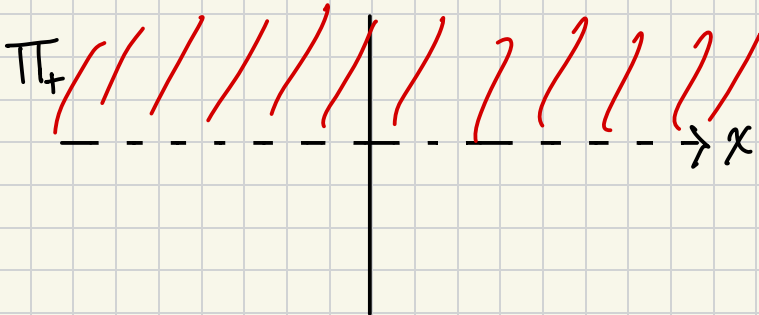


ÖDEV: 1) $D(a, r) \setminus \{a\}$ delinmiş diski $\mathbb{C}$ içinde açık bir kümedir gösteriniz.

$$2) \Pi_+ = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0 \right\} = \left\{ z = (x, y) \in \mathbb{C} : y > 0 \right\}$$

kümesi $\mathbb{C}$ içinde açık bir kümedir. Gösteriniz.

Bu kümeye açık üst yarı düzlem denir.



3) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} : x > 0\}$ kümesi $\mathbb{C}$ içinde bir açık kümedir. Gösteriniz. (Açık sağ yarı düzlem)



2) **Gözümlü:** $z \in \Pi_+$ ve $r = \frac{\operatorname{Im} z}{2} > 0$ olsun.

Herhangi bir $y \in D(z, \frac{\operatorname{Im} z}{2})$ için

$$\frac{\operatorname{Im} z}{2} > |y - z| = |z - y| \geq \operatorname{Im}(z - y) = \operatorname{Im} z - \operatorname{Im} y$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{Im} z}{2} > \operatorname{Im} z - \operatorname{Im} y$$

$$\operatorname{Im} y > \frac{\operatorname{Im} z}{2} > 0$$

$\Rightarrow y \in \Pi_+$ yani $D(z, \frac{\operatorname{Im} z}{2}) \subset \Pi_+ \Rightarrow \Pi_+, \mathbb{C}$ içinde açık bir kümedir.

Teorem: 1) Herhangi iki açık kümenin kesişimi açık bir kümedir.

2) Açık kümelerin herhangi bir ailesinin birleşimi açık bir kümedir.

İSPAT: 1) $A, B \subset \mathbb{C}$ içinde açık kümeler olsun.

$z \in A \cap B$ ise $z \in A$ ve $z \in B$ olduğundan açık küme tanımına göre

$$D(z, r_1) \subset A \text{ ve } D(z, r_2) \subset B$$

olacak biçimde $r_1, r_2 > 0$ reel sayıları vardır. $r = \min\{r_1, r_2\}$ olsun. Bu durumda $r > 0$ ve $D(z, r) \subset A \cap B$ dir. Dolayısıyla $A \cap B, \mathbb{C}$ içinde bir açık kümedir.

NOT: Düzlemin kendisi, $\emptyset$, herhangi sonlu sayıda açık kümelerin kesişimi ve sonsuz sayıda açık kümelerin birleşimi açık kümedir.

Açık kümelerin yapı teoremi olarak adlandırılan bu sonuçlar soyut uzaylarda topoloji aksiyomlarını belirler.

Yani bir X kümesinin bazı alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{A}$ ailesi $\emptyset, X$ kümesini içeriyor ve keffi birleşim ve sonlu irakesit işlemlerine göre kapalı ise $\mathcal{A}$ ailesi X üzerinde bir topoloji ve $(X, \mathcal{A})$ ikilisi de bir topolojik uzay denir.

2.3 DÜZLEMDE KÜMELEKİN YAPISI, KAPALI KÜMELER

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ olsun. E kümesinin tümleyeri

$$E^c = \mathbb{C} \setminus E = \{ z \in \mathbb{C} : z \notin E \}$$

kümesi açık bir küme ise E kümesi $\mathbb{C}$ içinde kapalı bir küme denir.

Kapalı küme tanımına ve De Morgan kurallarına göre herhangi sayıda

kapalı kümelerin ara kesiti ve sonlu sayıda kapalı kümelerin birleşimi

kapalı kümedir.

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

$\emptyset^c = \mathbb{C}$ açık bir küme $\mathbb{C}^c = \emptyset$ açık küme olduklarından

$\emptyset$ ve $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ içinde kapalı kümedir.

ÖRNEK: $E = \{ z \in \mathbb{C} : |z-2| \geq 3 \}$ kümesi $\mathbb{C}$ içinde kapalı bir kümedir.

Gösteriniz.

Çözüm: $E^c = \{ z \in \mathbb{C} : z \notin E \} = \{ z \in \mathbb{C} : |z-2| < 3 \}$

$$= D(2, 3)$$

açık disk $\mathbb{C}$ içinde açık küme olduğundan E kümesi $\mathbb{C}$ içinde

kapalı bir kümedir.

ÖDEV: 1) $a \in \mathbb{C} \rightarrow 0$ olsun. $\overline{D}(a, r)$ kapalı disk $\mathbb{C}$ içinde kapalı bir kümedir.

2) $\Pi_+ = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0 \}$ kapalı üst yarı düzlemi, $\mathbb{C}$ içinde kapalı bir kümedir. Gösteriniz.

Kompleks düzlemde herhangi bir küme açık veya kapalı olmak zorunda değildir. Örneğin

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z \leq 1 \}$$

kümesi ne açık ne de kapalı bir kümedir.

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ olsun. E kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye E kümesinin kapanışı denir ve $\overline{E}$ ile gösterilir. Yani E kümesinin kapanışı, E kümesini kapsayan kapalı kümelerin arakesitidir.

$$E \subset A_n \text{ (} A_n \text{ kapalı)} \quad \overline{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

E bir kapalı küme ise $\overline{E} = E$ 'dir.

Eğer $\overline{E} = \mathbb{C}$ ise E kümesine $\mathbb{C}$ içinde yoğun bir küme veya yoğundur denir.

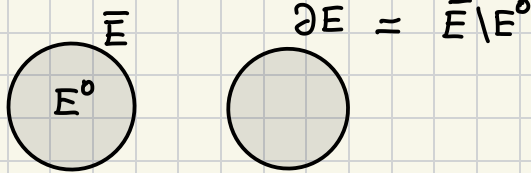
$E \subset X$ ve $E = X$ ise E , X içinde yoğundur denir.

E tarafından kapsanan en büyük açık kümeye E kümesinin içi denir. Ve E° ile gösterilir. E eğer açık bir kümeysen

E 'nin içi kendisidir. ($E^\circ = E$)

$$A_i \subset E, \quad E^\circ = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$\partial E = \bar{E} \setminus E^\circ$ kümesine E kümesinin sınırı veya kenarı denir.



$a \in \partial E$ olması için gerek her $r > 0$ reel sayısı için

$$D(a, r) \cap E \neq \emptyset \text{ ve } D(a, r) \cap E^c \neq \emptyset \text{ 'dir.}$$

E kümesinin kapalı olması için gerek

$$\partial E \subset E$$

dir. E kümesinin hem açık hem de kapalı olması için gerek

$$\partial E = \emptyset$$

olmasıdır.

ÖRNEK: $S = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z \leq 1 \}$ kümesi için

$$\bar{S} = \{ z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1 \}$$

$$S^\circ = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 1 \}$$

$$\partial S = \overline{S} \setminus S^\circ = \left\{ \operatorname{Im} z = 0 \text{ veya } \operatorname{Im} z = 1 \right\}$$

ÖRNEK: $D(a, r)$ diskinin kapanışı $\overline{D}(a, r)$ kapalı diski ve sınırı

$$C(a, r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a| = r \}$$

ÖRNEK: $\partial \mathbb{C} = \emptyset$ 'dir.

$$\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ = \left\{ \operatorname{Im} z = 0 \text{ veya } \operatorname{Im} z = 1 \right\}$$

ÖRNEK: $D(a, r)$ diskinin kapağı $\bar{D}(a, r)$ kapalı diski ve sınırı

$$C(a, r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a| = r \}$$

ÖRNEK: $\partial \emptyset = \emptyset$ 'dir.

19 EKİM PERSEMBE

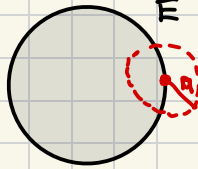
Tanım: E bir küme ve $f: \mathbb{N} \rightarrow E$ $t \mapsto f(t)$ ve artan dönüşüm ise E kümesi sayılabilir bir kümedir. Sayılabilir alt kümesi olan metrik uzay ayrılabilir uzaydır. Örneğin her $A \subset \mathbb{C}$ için $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ uzay ayrılabilir uzaydır. Öklid uzayları da ayrılabilir uzaydır.

2.4 DÜZLEMDE NOKTALARIN YAPISI

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ olsun. $D(a, r) \subset E$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı varsa a noktasına E kümesinin bir iç noktası denir. E kümesinin tüm iç noktalarının kümesi E° ile gösterilir.

Açık kümelerin bütün elemanları iç noktalar olan kümelerdir.

Tanım: Her $r > 0$ için $E \cap D(a, r) \neq \emptyset$ ve $E^c \cap D(a, r) \neq \emptyset$ ise a noktasına E kümesinin sınır veya kenar noktası denir.



Tanım: Her $r > 0$ için $E \cap D(a, r) \setminus \{a\} \neq \emptyset$ ise a noktasına E kümesinin bir limit noktası veya yığılma noktası denir. E 'nin limit noktalarının kümesi E' ile gösterilir. $a \in E$ ve a, E 'nin bir limit noktası değilse a noktasına E kümesinin ayrık veya izole noktası denir. $a \in E$ ayrık bir nokta ise $r > 0$ için $D(a, r) \cap E = \{a\}$ 'dir. Her bir elemanı ayrık nokta olan kümeye ayrık küme denir.

$\overline{E} = E \cup E'$ ve E kümesinin kapalı olması için g.y.k. $E' \subseteq E$

ÖRNEK: $E = D(a, r)$ ise $E' = \overline{D}(a, r)$

Sonlu elemanlı kümelerin yığılma noktası YOKTUR

ÖRNEK: $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu elemanlı bir küme için $E' = \emptyset$ (E kümesi bir ayrık küme ise $E' = \emptyset$ 'dir.)

2.5 BAĞLANTILI KÜMELER

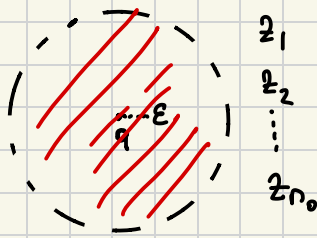
Tanım: $A \subset \mathbb{C}$ kümesinin $\emptyset$ ve A kümesinden başka hem açık hem kapalı alt kümesi yoksa A kümesine $\mathbb{C}$ içinde bağlantılı küme denir. Eğer $A \subset \mathbb{C}$ açık ve bağlantılı bir kümesi A kümesine bölge denir. $A \subset \mathbb{C}$ açık kümesi boş kümeden farklı iki ayrı açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa A kümesi bağlantılı bir kümedir. Aksi halde bağlantısız kümedir.

ÖRNEK: $\mathbb{C}$, $D(a, r)$, açık yarı düzlemler, $D(a, r) \setminus \{a\}$ ve $\{z \in \mathbb{C}, r < |z-a| < R\}$ kümeleri birer bölgedir.

2.6 YAKINSAK DİZİLER

Tanım: $A \subset \mathbb{C}$ olsun. $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ fonksiyonuna A içinde bir kompleks dizi denir ve $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ veya (z_n) ile gösterilir.

Tanım: (z_n) , A içinde bir dizi ve $a \in \mathbb{C}$ olsun. $(|z_n - a|)$ reel dizisi 0'a yakınsıyor ise, yani her bir $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ iken $|z_n - a| < \varepsilon$ olacak biçimde sadece ε 'a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (z_n) kompleks dizisi a noktasına yakınsar denir. a noktasına dizinin limiti denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ile gösterilir.



ÖRNEK: $|z| < 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$

ÖRNEK: $z_n = \frac{n}{n+i}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ old. gösteriniz.

Çözüm: $|z_n - 1| = \left| \frac{n}{n+i} - 1 \right| = \left| \frac{-i}{n+i} \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow 0$ old.'dan

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ 'dir.

NOT: 1) $||z_n| - |a|| \leq (z_n - a)$ old.'dan (z_n) dizisi a noktasına yakınsıyor ise $(|z_n|)$ dizisi $|a|$ " yakınsar. ve $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \right| = |a|$ 'dir.

2) $|\overline{z_n} - \bar{a}| = |z_n - a|$ old.'dan (z_n) dizisi a noktasına yakınsıyor ise $(\overline{z_n})$ dizisi $\bar{a}$ noktasına yakınsar ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{z_n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n} = \bar{a} \text{ 'dir.}$$

3) Her (z_n) kompleks dizisi $x_n = \operatorname{Re} z_n$ ve $y_n = \operatorname{Im} z_n$ olmak üzere (x_n) ve (y_n) reel sayı dizilerini belirler. ve

$$\max\{|Re z|, |Im z|\} \leq |z| \leq |Re z| + |Im z|$$

eşitsizliği reel ve kompleks dizilerin arasındaki yakınsaklık ilişkisini belirler.

Teorem: (z_n) kompleks dizisinin $z_0 = x_0 + y_0$ noktasına yakınsaması için g.y.k. (x_n) ve (y_n) reel sayı dizilerinin sırasıyla x_0, y_0 noktalarına yakınsamasıdır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \text{ 'dır.}$$

ÖRNEK: $n \in \mathbb{N}$ $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + i\sqrt{n}$ kompleks dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Re z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

ald.'dan (z_n) yakınsaktır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Im z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = e + i //$$

ÖDEV $\theta \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1 + i \sin\left(\frac{\theta}{n}\right) \right) = ?$

Tanım: (z_n) bir kompleks dizi ve $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ kesin monoton artan bir fonksiyon olsun. $(z_{\varphi(n)})$ dizisine (z_n) dizisinin bir alt dizisi denir. $k \in \mathbb{N}$, $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere (z_{n_k}) ile gösterilir.

Tanım: (z_n) bir kompleks sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $n, m > n_0$ için $|z_n - z_m| < \varepsilon$ olacak biçimde sadece ε 'a bağlı bir n_0 sayısı varsa (z_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Teorem: (z_n) kompleks sayı dizisinin yakınsak olması için g.y.k. (z_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olmasıdır.

ÖDEV (z_n) Cauchy dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa (z_n) dizisi de yakınsaktır. Gösteriniz.

Tanım: (X, d) bir metrik uzay olsun. X içindeki her Cauchy dizisi X içinde yakınsak ise (X, d) uzayına tam metrik uzay denir.

2.7 YAKINSAK DİZİLER VE TOPOLOJİK ÖZELLİKLER

Teorem: $E \subset \mathbb{C}$ kümesinin kapalı bir küme olması için g.y.k.

E kümesi içindeki yakınsak bir dizinin limitinin E kümesine ait olmasıdır.

Teorem: $a \in \mathbb{C}$ noktasının $E \subset \mathbb{C}$ kümesinin bir limit noktası olması için g.y.k. a noktasına yakınsayan bir $(z_n) \subset E \setminus \{a\}$

ÖRNEK: $a = 2$ noktasının $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ açık üst yarı düzlemin bir limit noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n \in \mathbb{N}$ için $z_n = 2 + \frac{i}{n}$ olsun. $z_n \neq 2$ ve $\operatorname{Im} z_n = \frac{1}{n} > 0$ old. 'dan $z_n \in \Pi_+ \setminus \{2\}$

$$|z_n - 2| = \left| 2 + \frac{i}{n} - 2 \right| = \left| \frac{i}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

olduğundan (z_n) dizisinin limiti 2'dir.

2.8 KOMPAKT KÜMELER

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ ve $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$

düzlemde açık kümelerin bir ailesi olsun.

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

ise $\mathcal{G}$ ailesine E kümesinin bir açık örtüsü denir.

Bu ailenin $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}$ sonlu tane elemanı için

$$E \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

ise $\mathcal{G}$ ailesinin sonlu bir alt örtüsü vardır.

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü

varsa E kümesine kompakt (veya tıkkız) küme denir.

23 Ekim - PAZARTESİ

Tanım: (X, d) metrik uzay ve bu uzayın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

Örnek: Düzlemde her sonlu küme kompakt bir kümedir.

Örnek: $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ metrik uzayında kompakt bir kümenin her kapalı altkümesi kompakt bir kümedir. Gösteriniz.

Gözüm: E kompakt bir küme ve $F \subset E$ kapalı bir küme ve

$\mathcal{G} = \{ G_\alpha : \alpha \in I \}$, F kümesinin herhangi bir açık örtüsü olsun. $\mathcal{G} \cup F^c$ ailesi E kümesinin bir açık alt örtüsüdür. E kompakt olduğundan bu ailenin E kümesini, dolayısıyla F kümesini örten sonlu alt örtüsü vardır. F^c bu sonlu alt örtünün bir elemanı ise F^c kümesini o alt örtüden çıkarabiliriz. Dolayısıyla $\mathcal{G}$ ailesinin F kümesini örten sonlu alt örtüsü vardır ve F kompakt bir kümedir.

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ olsun. $E \subset D(a, r)$ olacak biçimde bir $a \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ reel sayısı varsa E kümesine sınırlı bir küme denir.

$$\text{Gap } E = \sup \left\{ |z - w| : z, w \in E \right\}$$

sayısına E kümesinin gapı denir.

$\text{Gap } E < \infty$ ise E kümesi sınırlı, aksi halde sınırsız bir kümedir.

Örnek: $D(a,r)$ diskinin çapı $2r$ ve düzlemde bir karenin çapı köşegeninin uzunluğudur. $\mathbb{C}$ ve yarı düzlemler sınırsız kümelerdir.

Teorem: (Heine-Borel Teo.): $E \subset \mathbb{C}$ kümesinin kompakt olması için g.y.k E kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır.

Örnek: $\overline{D}(a,r)$ kapalı ve sınırlı olduğundan kompaktır.

örnek: $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ metrik uzayında

$$E = \left\{ 0, z = x+iy \in \mathbb{C} : \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, y=1 \text{ ve } |x| \geq \frac{1}{8\pi} \right\}$$

kümesinin $\mathbb{C}$ içinde kompakt bir küme olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} E &= \left\{ 0, \frac{1}{k\pi} + i : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \cap \left\{ 0, |x| \geq \frac{1}{8\pi}, y=1 \right\} \\ &= \left\{ 0, \frac{1}{k\pi} + i : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, |k\pi| \leq 8\pi \right\} \\ &= \left\{ 0, \frac{1}{k\pi} + i : k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8 \right\} \end{aligned}$$

kümesi sınırlı bir küme olduğundan $E \subset \mathbb{C}$ içinde kapalı bir kümedir.

$$\left| \frac{1}{k\pi} + i \right| = \sqrt{\frac{1}{k^2 \pi^2} + 1} < \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ olduğundan}$$

her $z \in E$ için $|z| < \sqrt{2}$ 'dir. Bu durumda $E \subset D(0, \sqrt{2})$ dir.

Yani E kümesi sınırlıdır. Heine- teoreminden E kümesi kompaktır.

Teorem: (Bolzano - Weierstrass) Sonsuz ve sınırlı her $E \subset \mathbb{C}$ kümesinin $\mathbb{C}$ içinde bir limit noktası vardır.

Teorem: $E \subset \mathbb{C}$ kümesinin kompakt bir küme olması için g.y.k.

E içindeki her sonsuz dizinin yakınsak bir alt dizisinin var olmasıdır.

2.9 GENİŞLETİLMİŞ KOMPLEKS DÜZLEM

Tanım: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kümesine genişletilmiş kompleks düzlem denir. Her $z \in \mathbb{C}$ için

$$z + \infty = \infty + z = \infty$$

$$z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \quad z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$$

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \frac{z}{0} = \infty, \frac{z}{\infty} = 0$$

2.9.1 Genişletilmiş Düzlem Topolojisi

$D(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}$ kümesine ∞ noktasının bir komşuluğu denir. $\mathbb{C}$ içinde açık olan her küme $\overline{\mathbb{C}}$ içinde de açıktır.

2.9.2 Genişletilmiş Düzlem ve Riemann Küresi

$$S^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 \right\}$$

birim küre ve $N = (0, 0, 1)$ bu kürenin kuzey kutbu olsun.

$\mathbb{C} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ eşleştirmesiyle, $\mathbb{C}, \mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayıdır.

Bu eşleme ile $\mathbb{C}, S^2$ kümesini ekvator boyunca keser.

Her $z \in \mathbb{C}$ için z ve N noktasından geçen doğru küreyi tek bir

$Z = (x_1, x_2, x_3)$ noktasından keser.

$|z| > 1$ ise Z noktası kuzey yarımküredeedir,

$|z| < 1$ ise Z noktası güney yarımküredeedir.

$|z| = 1$ " $z = Z$ ve $|z| \rightarrow \infty$ $Z \rightarrow N$

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ ve $Z = (x_1, x_2, x_3)$, z noktasının küre üzerinde karşılık

gelen nokta olsun. $\mathbb{R}^3$ 'de z ve N noktalarından geçen doğru denklemini

$$\left\{ tN + (1-t)z : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ ((1-t)x, (1-t)y, t) : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ olduğundan}$$

Z noktasının koordinatlarını bulmak için t 'yi bulmak yeterlidir.

$$1 = (1-t)^2 x^2 + (1-t)^2 y^2 + t^2$$

$$1 - t^2 = (1-t)^2 (x^2 + y^2)$$

$$1 - t^2 = (1-t)^2 \cdot |z|^2$$

$$1 + t = (1-t) \cdot |z|^2$$

$$1 + t = |z|^2 - t \cdot |z|^2$$

$$t(1 + |z|^2) = |z|^2 - 1 \Rightarrow t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \text{ olur.}$$

$$x_1 = (1-t)x = \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)x = \frac{2}{|z|^2 + 1} \operatorname{Re}(z)$$

$$x_2 = \frac{2}{|z|^2 + 1} \operatorname{Im}(z) \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

$N \neq z = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ noktasına $\mathbb{C}$ de karşılık gelen z noktası

$t = x_3$ alınarak $z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ formülü ile belirlenir.

Örnek: a) $0 = (0, 0)$ ve $z = 1+i$ kompleks sayılarına küre üzerinde karşılık gelen noktaları bulunuz.

Çözüm: i) $z = 0 = (0, 0) \Rightarrow |z| = 0 \Rightarrow z = (0, 0, -1)$

ii) $z = 1+i \Rightarrow |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow z = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

b) Birim kürede $(1, 0, 1)$ ve $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktalarına karşılık gelen düzlemdeki noktaları bulunuz.

i) $z = \overset{x_1 \ x_2 \ x_3}{(1, 0, 1)} \Rightarrow z = \frac{1+0i}{1-1} = \infty$

ii) $z = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = z = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-i}{2-\sqrt{2}} //$

3.1 TANIM VE TEMEL ÖZELLİKLER

Tanım: $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ olsun. Her bir $z \in A$ kompleks sayısını tek bir $w = f(z)$ kompleks sayısına eşleyen $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ kuralına kompleks değerli kompleks değerli bir fonksiyon ya da kısaca kompleks fonksiyon denir.

$w = f(z)$ kompleks sayısına f fonksiyonunun z noktasındaki değeri, f fonksiyonunun uygulanabildiği bütün z noktalarının kümesine f 'nin tanım kümesi denir ve D_f ile gösterilir.

$G_f = f(D_f) = \{f(z) \mid z \in D_f\}$ kümesine de f 'nin görüntü (resim) kümesi denir.

Görüldüğü üzere f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümeleri kompleks düzlemin birer alt kümeleridir. Yani

$$D_f \subset \mathbb{C}, G_f \subset \mathbb{C} \text{ 'dir.}$$

G_f kümesini kapsayan herhangi bir kümeye f 'nin değer kümesi denir.

ÖRNEK: 1) $f(z) = c \in \mathbb{C}$ (sabit fonk.) $D_f = \mathbb{C}$, $G_f = \{c\}$

2) $f(z) = z$ (birim fonk.) $D_f = G_f = \mathbb{C}$

3) $f(z) = \bar{z}$ (eşlenik fonk.) $D_f = G_f = \mathbb{C}$

4) $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (mutlak değer fonk.) $D_f = \mathbb{C}$, $G_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

5) $f(z) = 4z + 7$ $D_f = G_f = \mathbb{C}$

6) $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$, $D_f = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$

3.2 KOMPLEKS POLİNOM VE RASYONEL FONKSİYONLAR

Tanım: $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $a_i \in \mathbb{C}$ sabit olsun.

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Fonksiyonuna kompleks polinom denir. $a_n \neq 0$ sayısına bu polinomun

başkatsayısı ve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sayısına da polinomun derecesi denir.

Tanım: $p(z) = 0$ eşitliğini sağlayan z noktalarına p kompleks polinomunun

kökleri veya sıfırları denir.

Tanım: p ve q kompleks polinomlar olmak üzere;

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad (q(z) \neq 0)$$

Fonksiyonuna bir kompleks rasyonel fonksiyon denir.

ÖRNEK: $p(z) = z^3 + i$ polinomunun katsayıları $\{a_3=1, a_2=a_1=0, a_0=i\}$

derp = 3

$$z^3 + i = 0 \Rightarrow z^3 = -i = 1 \cdot e^{-i \frac{\pi}{2}}$$

$$z_k = 1 \cdot e^{i \left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right)} \quad k = 0, 1, 2$$

$$k=0 \text{ için } z_0 = e^{-i \frac{\pi}{6}}$$

$$k=1 \text{ için } z_1 = e^{i \frac{\pi}{2}}$$

$$k=2 \text{ için } z_2 = e^{i \frac{3\pi}{6}}$$

3.3 KÜMELERİN GÖRÜNTÜLERİ

Tanım: $f: A \longrightarrow B$ bir kompleks fonksiyon olsun. $E \subset A$ ise

$f(E) = \{f(z) : z \in E\}$ kümesine E kümesinin f altındaki görüntüsü (imajı) denir.

Bu tanımdan $E \subset F \subset A$ ise $f(E) \subset f(F)$ 'dir. E_α , A kümesinin alt kümelerinin herhangi bir ailesi ise

$$f\left(\bigcup_{\alpha} E_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f(E_{\alpha})$$

Tanım: Her $z \in A$ için $|f(z)| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ reel sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir. f fonk. A kümesi üzerinde sınırlı olması $f(A)$ kümesinin sınırlı bir küme olması ile denktir.

Tanım: $G \subset B$ ise $f^{-1}(G) = \{z \in A : f(z) \in G\}$ kümesine G kümesinin f altındaki ters görüntüsü denir.

Bu tanımdan

$$f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$$

ve

$G \subset H \subset B$ ise $f^{-1}(G) \subset f^{-1}(H)$ ' dir.

$\{G_\alpha\}$, B kümesinin alt kümelerinin herhangi bir ailesi ise

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} G_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(G_{\alpha}) \text{ ve } f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} G_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(G_{\alpha})$$

ÖRNEK: $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ $f(z) = \frac{z-1}{|z|^2+2}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde sınırlıdır.

Gösteriniz.

$$(\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$$

Çözüm:

$$|f(z)| = \left| \frac{z-1}{|z|^2+2} \right| \leq \frac{|z-1|}{|z|^2+2} \leq \frac{|z|+1}{|z|^2+2} < \frac{1+1}{2} = 1$$

olduğundan f , $\mathbb{D}$ üzerinde sınırlıdır.

3.4 BİR-BİR VE ÖRTEN FONKSİYON

Tanım: $A, B, C \subseteq \mathbb{C}$ boştan farklı olmak üzere

$$f: A \longrightarrow B$$

bir kompleks fonk. olsun. $z \neq a$ özelliğine sahip $z, a \in A$ için $f(z) \neq f(a)$ ise f fonksiyonu A üzerinde 1-1 veya injektif bir fonk. denir.

Tanım: Her $w \in B$ için $f(z) = w$ olacak bir $z_w \in A$ varsa f fonksiyonuna örten (surjektif) veya üzerine fonk. denir.

Bu tanıma göre $f: A \rightarrow B$ örten bir kompleks fonk. ise $f(A) = B$ 'dir.

ÖRNEK: $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(z) = \bar{z}$ 1-1?

Çözüm: $z, a \in \mathbb{C}$ için $\varphi(z) = \varphi(a)$

$$\bar{z} = \bar{a}$$

$$\overline{\bar{z}} = \overline{\bar{a}}$$

$$z = a$$

φ , 1-1 'dir

ÖRNEK: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ 1-1?

Çözüm: $-2, 2 \in \mathbb{C}$ için $f(-2) = f(2) = 4$ olduğundan f , 1-1 değildir.

ÖRNEK: $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $p(z) = z^3 + i$ polinom fonksiyonu örtendir. Gösteriniz.

Çözüm: $w \in \mathbb{C}$ keyfi olsun. $w = i$ ise $z_w = 0 \in \mathbb{C}$ için $p(z_w) = i = w$
 $w \neq i$ ise $w = z^3 + i$ $z^3 = w - i$

$$z^3 = w - i = |w - i| e^{i(\arg(w - i))} \quad \text{dir:}$$

Buradan $z_w = |w - i|^{1/3} \cdot e^{i(\arg(w - i)/3)} \in \mathbb{C}$ olduğundan p polinom

Fonksiyonu örtendir.

Tanım: $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathbb{C}$ kompleks fonksiyonların bileşkesi $h: A \rightarrow \mathbb{C}$

$$h(z) = (g \circ f)(z) = g(f(z))$$

Fonksiyonudur.

Tanım: $f: A \rightarrow B$ 1-1 ve örten olsun. Her $z \in A$ ve her $w \in B$ için

$$g(f(z)) = z \quad \text{ve} \quad f(g(w)) = w$$

özdeşliklerini sağlayan g fonksiyonuna ($g: f \rightarrow A$)

f fonksiyonunun tersi denir ve $g = f^{-1}$ ile gösterilir.

ÖRNEK: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $f(z) = z^2$

$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $g(z) = z + 1$

$h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $h(z) = (g \circ f)(z)$ ise $h(2i) = ?$

ÖRNEK: $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi(z) = \bar{z}$ fonksiyonunun ters fonksiyonu nedir?

$$\psi^{-1}(\psi(z)) = z \Rightarrow \psi^{-1}(\bar{z}) = z \Rightarrow \psi^{-1}(z) = \bar{z},$$

ÖRNEK: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $f(z) = 2z + 1$

a) 1-1 ve örtendir Gösteriniz.

b) $f^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonk. bulunuz.

Çözüm: a) i) $P(z) = f(z)$

$$2z+1 = 2a+1$$

$$z=a \quad f, 1-1$$

ii) $w \in \mathbb{C}$ keyfi olsun.

$$2w = \frac{w-1}{2} \in \mathbb{C}$$

$$\text{icin} \quad f(2w) = \cancel{2} \cdot \frac{w-1}{\cancel{2}} + 1 = w$$

a'dan f örten.

$$b) \quad z = P(P^{-1}(z)) = 2P^{-1}(z) + 1 \Rightarrow P^{-1}(z) = \frac{z-1}{2} //$$

3.5 KOMPLEKS FONKSİYONLARIN REEL VE SANAL KISIMLARI

Tanım: $P: A \rightarrow \mathbb{C}$ bir kompleks fonk. olsun.

1) $u: A \rightarrow \mathbb{R}$, $u(z) = u(x,y) = \operatorname{Re} P(z)$ fonksiyonuna, P 'nin reel kısmı

2) $v: A \rightarrow \mathbb{R}$, $v(z) = v(x,y) = \operatorname{Im} P(z)$ // // sanal kısmı

denir.

$$z = x + iy \Rightarrow P(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ÖRNEK: $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P(z) = z^2$ fonk. için $z = x + iy$ olmak üzere

$$P(z) = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{(2xy)}_{v(x,y)}$$

ÖRNEK: $g(z) = \frac{z}{z^2+1}$ ise

$$u(x,y) = \frac{x(x^2+y^2+1)}{(x^2-y^2+1)^2 + 4x^2y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{y(1-(x^2+y^2))}{(x^2-y^2+1)^2 + 4x^2y^2}$$

3.6 Kompleks Fonksiyonların Limiti

Tanım: $a, w \in \mathbb{C}$, E, δ a noktesının en az bir delinmiş komşuluğunu kapsayan bir küme ve $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ bir kompleks fonk. olsun. Her bir $\epsilon > 0$ reel sayısı ve $x \in E$ için $0 < |x-a| < \delta$ olduğunda

$$|f(x) - w| < \epsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ reel sayısı var ise yani

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z) - w| = 0$$

ise w noktesına $f(z)$ fonksiyonunun a noktesındaki limiti denir ve

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w$$

öğerek yazılır.

ÖRNEK: $\lim_{z \rightarrow i} \underbrace{(2z+i)}_{f(z)} = \underbrace{3i}_w$ old. gösteriniz.

Limit tanımından her bir $\epsilon > 0$ reel sayısı

$$|z-i| < \delta$$

iken

$$|f(z) - w| = |2z+i - 3i| = 2|z-i| < 2\delta = \epsilon$$

gerçekten: $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ seçilirse $\lim_{z \rightarrow i} (2z+i) = 3i$ olur.

Önerme: $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ kompleks fonksiyonunun bir $a \in \mathbb{C}$ noktasında limiti

varsa bu limit tektir.

İspat: $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w_1$ ve $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w_2$ ve $w_1 \neq w_2$ olsun.

limit tanımından $\varepsilon = \frac{|w_1 - w_2|}{2} > 0$ sayısı için $0 < |z - a| < \delta_1$ olduğunda $|f(z) - w_1| < \varepsilon$ ve $0 < |z - a| < \delta_2$ olduğunda $|f(z) - w_2| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta_1, \delta_2 > 0$ reel sayıları vardır.

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. $0 < |z - a| < \delta$ olduğunda

$$|w_1 - w_2| = |w_1 - f(z) + f(z) - w_2| \leq |f(z) - w_1| + |f(z) - w_2|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |w_1 - w_2| \text{ dir. (Çelişki!)}$$

Dolayısıyla $w_1 = w_2$ 'dir. Yani bir kompleks fonksiyonun limiti varsa tektir.

NOT: Geometrik olarak limit, w noktasının her $D(w, \varepsilon)$, ε -komsuluğu

için $f(D(a, \delta) \setminus \{a\}) \subset D(w, \varepsilon)$ olacak η noktasının bir $D(a, \delta) \setminus \{a\}$, δ -delinmiş komsuluğu vardır.

ÖNERME: (Temel Limit)

i) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = c \in \mathbb{C}$ ise her $a \in \mathbb{C}$ için $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c$ 'dir.

ii) $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = z$ ise her $a \in \mathbb{C}$ için $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = a$ 'dır.

7 KASIM PESEMBE

ÖRNEK: $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonunun $z=i$ noktasındaki limiti bulunuz.

ÖRNEK: $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot \operatorname{Re} z}{|z|} = 0$ 'dır. Gösteriniz.

Her bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $0 < |z| < \delta$ iken $|f(z) - 0| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ reel sayısını bulalım.

$$|f(z)| = \left| \frac{z \cdot \operatorname{Re} z}{|z|} \right| = \frac{|z| \operatorname{Re} z}{|z|} \leq |z| < \delta = \varepsilon \text{ olur. } \delta = \varepsilon \text{ seçilirse}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = 0 \text{ gerçekleşir.}$$

Teorem: (Kompleks - İki Koşullu Reel Limit ilişkisi)

$f(z) = u(z) + i v(z)$ bir kompleks fonk., z_0 , f fonksiyonunun tanım kümesinin bir limit noktası ve $w_0 = u_0 + i v_0 \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = u_0 \text{ ve } \lim_{z \rightarrow z_0} v(z) = v_0 \text{ dır.}$$

ÖRNEK: $f(z) = \frac{\sin x}{x} + i \frac{2 \tan y}{y}$ fonksiyonunun $z_0 = (0, 0)$ noktasındaki limitini bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ ve } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \tan y}{y} = 2 \text{ old.'dan}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 1 + 2i \text{ 'dır.}$$

Teorem: (Limit Yokluk Testleri)

$\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^2$ bir küme, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonk. ve $\alpha = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, E$ kümesinin bir limit noktası olsun.

1) (Ardışık Limit Yokluk Testi)

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow a_1} \left(\lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y) \right) \neq \lim_{y \rightarrow a_2} \left(\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) \right) = L_2$$

veya f fonksiyonunun L_1, L_2 ardışık limitlerinden en az biri yok ise

f fonksiyonunun α noktasında limiti yoktur.

2) (Koordinat Değişimi ile Limit Yokluk Testi)

$\theta \in [0, 2\pi]$ ve $r > 0$ reel sayısı için

$\lim_{r \rightarrow \alpha} f(a_1 + r \cos \theta, a_2 + r \sin \theta)$ yok veya θ değişkenine bağlı ise

f fonksiyonunun α noktasında limiti yoktur

$$f(z) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{fonksiyonunun } z_0 = 0 \text{ noktasındaki limit}$$

yoktur. Gösteriniz.

$$z_0 = 0 = \overset{\theta_1}{\theta} + i \overset{\theta_2}{0} \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2 \cdot r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} \sin 2\theta = \sin 2\theta$$

θ 'ya bağlı olduğundan $f(z)$ 'nin $z_0 = 0$ 'da limiti yoktur.

3.7 Limitin Cebirsel Özellikleri

$f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$ iki fonksiyon ve

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w_0, \quad \lim_{z \rightarrow a} g(z) = w_1$$

olsun. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$1) \lim_{z \rightarrow a} (\alpha f(z) \mp \beta g(z)) = \alpha w_0 \mp \beta w_1$$

$$2) \lim_{z \rightarrow a} (f(z) \cdot g(z)) = w_0 \cdot w_1$$

$$3) w_1 \neq 0 \text{ ise } \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{w_1} \text{ dir.}$$

$$4) \lim_{z \rightarrow a} (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

Örnek: 1) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3 + z - 1}{z^7 - 2z + 3} = 0$

2) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{6z^5 + z^3 + z - 1}{4z^5 + 3z^4 + z^2 + 1} = \frac{6}{4}$

3) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^6 + z^2 - 1}{3z^3 + z + 1} = \infty$

Örnek: 1) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3 + z - 1}{z^7 - 2z + 3} = 0$ 2) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{6z^5 + z^3 + z - 1}{4z^5 + 3z^4 + z^2 + 1} = \frac{6}{4}$

3) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^6 + z^2 - 1}{3z^3 + z + 1} = \infty$

- 2 KISIM -

4.1 Tanım ve Temel Özellikler

Tanım: $\emptyset \neq E \subset \mathbb{C}$ ve $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ bir kompleks fonksiyon $a \in E$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $z \in E$ ve $|z - a| < \delta$ olduğunda

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

olacak bir $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ reel sayısı varsa f fonksiyonuna a noktasında sürekli bir fonk. veya kısacası f fonksiyonuna a noktasında sürekli'dir denir. Eğer f, E kümesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonuna E üzerinde sürekli'dir denir. E kümesi üzerinde sürekli olan fonksiyonların kümesi $C(E)$ ile gösterilir.

NOT: Sürekliliğin ε - δ tanımı $\equiv \lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$ ($a \in E$)'dir.

0 halde f fonk.'nın a noktasında sürekli olması için g.y.k

- 1) f fonksiyonunun a noktasında tanımlı olması,
- 2) f fonksiyonunun a noktasında limitinin var olması,
- 3) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$ olmasıdır.

ÖRNEK: 1) $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $\varphi(z) = c \in \mathbb{C}$, $z = a$ noktasında $\mathbb{C}$ noktasında sürekli.

2) $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $\varphi(z)$, $z = a$ noktasında sürekli.

3) $p(z)$ kompleks fonksiyonu $\mathbb{C}$ 'de sürekli.

4) $g(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $g: E \rightarrow \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}, q(z) = 0\}$
 rasyonel kompleks fonksiyonu $\mathbb{C}$ 'de sürekli.

ÖRNEK: $m: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $m(z) = |z|$ fonksiyonunun $\mathbb{C}$ 'de sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm = $a \in \mathbb{C}$ olsun. $\nearrow$ keyfi bir nokta. $\varepsilon > 0$ için $|z - a| < \delta$ iken

$$|m(z) - m(a)| = ||z| - |a|| \leq |z - a| < \delta = \varepsilon$$

olur. $\delta = \varepsilon$ alınırsa $m(z)$ fonksiyonu a noktasında sürekli. a

keyfi olduğundan $m(z)$ $\mathbb{C}$ üzerinde sürekli.

ÖRNEK: $\varphi(z) = \bar{z}$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde sürekli. Gösteriniz.

$a \in \mathbb{C}$ keyfi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $|z - a| < \delta$ iken

$$|\varphi(z) - \varphi(a)| = |\bar{z} - \bar{a}| = |\overline{z - a}| = |z - a| < \delta = \varepsilon \text{ gerçektir.}$$

Dolayısıyla $\delta = \varepsilon$ seçilirse φ fonksiyonu $z = a$ 'da sürekli.

α keyfi olduğundan $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ 'de sürekli.

ÖRNEK:

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z=0 \\ \frac{\bar{z} \sin 2x}{x}, & z \neq 0 \end{cases} \quad \text{fonksiyonunun } z_0=0 \text{ 'da sürekli olduğunu gösteriniz.}$$

$\varepsilon > 0$ sayısı için $|z| < \delta$ iken ($z=0$ noktasında sürekli olduğu aşıkordır.)

$$|f(z) - f(0)| = |f(z)| = \left| \frac{\bar{z} \sin 2x}{x} \right| \leq \frac{|z| \cdot 2|x|}{|x|} = \varepsilon$$

gerçeklenir. δ halde f $z_0=0$ noktasında sürekli.

ÖRNEK:

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{z - 2} \quad \text{fonksiyonunun}$$

a) $z=2$ noktasında limitini inceleyiniz.

b) $z=2$ noktasında sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm: a) $\lim_{z \rightarrow 2} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z-2)(z+2)}{z-2} = 4$

olduğundan f 'nin $z_0=2$ 'de limiti vardır.

b) f fonksiyonu $z_0=2$ noktasında tanımsız olduğundan bu noktada sürekli değildir.

4.2 SÜREKLİ FONKSİYONLARIN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Teorem: $f, g \in C(E)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun.

1) $\alpha f + \beta g : E \rightarrow \mathbb{C}$, $(\alpha f + \beta g)(z) = \alpha f(z) + \beta g(z)$ fonksiyonu E 'de sürekli.

2) $f, g: E \rightarrow \mathbb{C}$ $(fg)(z) = f(z)g(z)$ Fonksiyonu E üzerinde sürekli.

3) $G = E \setminus \{z \in E : g(z) = 0\}$ olsun. $\frac{f}{g}: G \rightarrow \mathbb{C}$ $\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$

Fonksiyonu G üzerinde sürekli.

NOT: Teoremdaki 1) ve 2) özellikleri E üzerinde sürekli fonksiyonların

$\mathbb{C}(E)$ kümesinin bir halkası ve özellikle $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

ÖRNEK: $f(z) = 2|z| + z^3 + z^2 - 2z + 1$ Fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde sürekli.

$m(z) = |z|$ ve $p(z) = z^3 + z^2 - 2z + 1$ Fonk. 'ları sürekli olduğundan

$f(z) = 2m(z) + p(z)$ Fonksiyonu da sürekli.

ÖRNEK: $f(z) = \frac{\bar{z}(z^2 + 4)}{z^3 - 8}$ Fonksiyonunun sürekli olduğu noktaları bulunuz.

Çözüm: $z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$

$$z - 2 = 0 \quad z_1 = 2$$

$$z^2 + 2z + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = -12$$

$$z_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \mp i\sqrt{3} \quad \text{'dır.}$$

0 halde $f, \mathbb{C} \setminus \{2, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\}$ kümesi üzerinde sürekli.

ÖRNEK: $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + \bar{z} + 2}$ sürekli olduğu noktalar kümesi

ÖDEV

4.3 SÜREKLİLİK KRİTERLERİ

Teorem: (Dizi Kriteri) $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun bir $a \in E$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter a noktasına yakınsayan her $(z_n) \subset E$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a)$$

olmasıdır.

İSPAT: $f, a \in E$ noktasında sürekli ve $(z_n) \subset E$ a noktasına yakınsayan bir dizi olsun. ε - δ tanımından verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $|z - a| < \delta$ iken

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

olacak bir $\delta = \delta(a, \varepsilon)$ vardır. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ olduğundan $n > n_0$ iken

$$|z_n - a| < \delta$$

olacak bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

O halde her $n > n_0$ için

$$|f(z_n) - f(a)| < \varepsilon$$

olur. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a)$ 'dır.

($\Leftarrow$) Tersine a noktasına yakınsayan her (z_n) dizisi için

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a)$ olsun. Fakat f fonksiyonu a noktasında sürekli

olmasın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $|z_n - a| < \frac{1}{n}$ ve

$|f(z_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ gerçekleşecek z_n noktaları ve $\varepsilon > 0$ vardır.

$(z_n) \rightarrow a$ fakat $f(z_n), f(a)$ noktalarına yakınsamadığından bir

gelişki oluşur. Dolayısıyla f, a 'da sürekli değildir.

SÖNÜŞ: $E, E' \subset \mathbb{C}$ açık kümeler, $f: E \rightarrow E'$ ve $g: E' \rightarrow \mathbb{C}$

sürekli fonksiyon ise $h: E \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = g(f(z))$ bileşke fonksiyonu

sürekli değildir.

ÖRNEK: $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon. $|f|: E \rightarrow \mathbb{R}$,

$|f|(z) = |f(z)|$ sürekli bir fonksiyondur.

Bir f fonksiyonunun bir $a \in E$ noktasında sürekli olması

$f(a)$ noktasının her $D(f(a), \varepsilon) \in \mathbb{C}$ komşuluğu için a noktasının

$f(D(a, \delta)) \subset D(f(a), \varepsilon)$ veya $D(a, \delta) \subset f^{-1}(D(f(a), \varepsilon))$

özelliklerine sahip $D(a, \delta)$, f komşuluğunun var olmasına denktir.

Teorem (Global Süraklılık Teoremi): $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ise

1) f, E kümesi üzerinde süraklıdır.

2) Her $V \subset \mathbb{C}$ açık kümesinin $f^{-1}(V)$ ters görüntüsü E içinde açık bir kümedir.

3) Her $F \subset \mathbb{C}$ kapalı kümesinin $f^{-1}(F)$ ters görüntüsü kapalı bir kümedir.

İfadelemleri denktir.

Teorem: $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(z) + i v(z)$ fonksiyonunun süraklı olması için gerek ve yeter koşul $u(z)$ ve $v(z)$ 'nin süraklı olmasıdır.

ÖRNEK: $f(z) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + i \frac{y^2+y}{x+y}$ fonksiyonunun süraklı olduğu kümeyi bulunuz.

Çözüm: $A = \{ (x,y) : x^2+y^2 \neq 0 \} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
 $B = \{ (x,y) : x+y \neq 0 \} = \mathbb{C} \setminus \{ z = x+iy \in \mathbb{C}, y = -x \}$] $A \cap B$

$E = A \cap B = \mathbb{C} \setminus \{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid y = -x \}$

kümesi üzerinde f süraklıdır.

Tanım: $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ fonksiyonuna kompleks üstel fonk. denir ve $\mathbb{C}$ üzerinde süraklıdır.

6 KASIM

4.4 DÜZGÜN SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Tanım: $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonk. olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı ve her $z, w \in E$ için $|z - w| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ olacak biçimde sadece ε 'a bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu E üzerinde düzgün süreklidir denir.

ÖRNEK: $f(z) = z$ düzgün süreklidir.

$f(z) = z^2$ süreklidir, düzgün süreklidir değil.

Tanım: $E, F \subset \mathbb{C}$ ve $a \in \mathbb{C}$ olsun. E kümesi ile a noktası arasındaki uzaklık

$$d(a, E) = \inf \{ |z - a| : z \in E \} \leq |z - a|$$

sayısıdır. $a \in \bar{E}$ olması için g.y.k. $d(a, E) = 0$ olmasıdır. Dolayısıyla E kümesi kapalı bir küme ise ve $a \notin E$ ise $d(a, E) > 0$ 'dır.

Tanım: E ve F kümeleri arasındaki uzaklık

$$d(E, F) = \inf \{ |z - w| : z \in E, w \in F \}$$

sayısıdır.

ÖNERME: $E \subset \mathbb{C}$ ise $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z) = d(z, E)$ uzaklık fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde düzgün süreklidir.

İSPAT: Her $\varepsilon > 0$ reel sayısı ve her $z, w \in E$ için $|z - w| < \delta$ olduğunda

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= |d(z, E) - d(w, E)| \leq ||z - a| - |w - a|| \\ &\leq |z - w| \\ &< \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

gerçeklenecek biçimde sadece ε 'a bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ sayısı vardır. Dolayısıyla f , $\mathbb{C}$ üzerinde düzgün süreklidir.

4.5 SÜREKLİ FONKSİYONLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ

ÖNERME: (Tümsek Prensipli) $E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme olsun. Ve $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bir $a \in E$ için $f(a) \neq 0$ ise a noktasının $D(a, f)$ komşuluğu üzerinde $f(z) \neq 0$ 'dır.

İSPAT: $\varepsilon = |f(a)| > 0$ olsun. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan $z \in D(a, f)$ için $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

$|z - a| < \delta$

Her $z \in D(a, f)$ için

$$|f(a) - f(z)| \leq |f(z)| + |f(a)| \leq |f(z) - f(a)| + |f(a)| < \varepsilon \text{ 'dur.}$$

$$|f(a) - f(z)| < \varepsilon \Rightarrow |f(a) - \underset{\substack{\parallel \\ f(a)}}{f(z)}| < \varepsilon \Rightarrow 0 < |f(z)| \text{ elde edilir.}$$

TEOREM: $f, g: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonlar ise

$$A = \{ z \in E : f(z) = g(z) \}$$

kümesi $\mathbb{C}$ içinde kapalı bir kümedir.

İSPAT: $h: E \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = f(z) - g(z)$ fonksiyonu E üzerinde sürekli.

$\{0\} \subset \mathbb{C}$ tek nokta kümesi $\mathbb{C}$ içinde kapalı bir küme ve

$$A = \{ z \in E : h(z) = 0 \} = h^{-1}(\{0\})$$

olduğundan global süreklilik kriterinden A kümesi $\mathbb{C}$ içinde kapalı bir kümedir.

SÖNÜÇ: $f, g: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonlar ve A, E kümesinin yoğun bir alt

kümesi olsun. Her $z \in A$ için $f(z) = g(z)$ ise her E için $f(z) = g(z)$ 'dir.

TEOREM: $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ve $E \subset \mathbb{C}$ içinde bağlantılı

bir küme olsun. $f(E)$ kümesi de $\mathbb{C}$ içinde bağlantılı bir kümedir.

TEOREM: $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ve $A \subset E$ kompakt bir

küme ise $f|_A$ A üzerinde düzgün sürekli.

TEOREM: $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ve $A \subset E$ kümesi kompakt bir

küme ise $f(A) \subset \mathbb{C}$ içinde kompakt bir kümedir.

SONUÇ: $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ve $A \subset E$ kümesi kompakt bir küme ise $|f|$ fonksiyonu E kümesi üzerinde maksimum veya minimum değerlerini alır. Bu sonuca Ekstremin Değer Teoremi denir.

BÖLÜM 5: KOMPLEKS ANALİTİK FONKSİYONLAR

5.1 KOMPLEKS TÜREV

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $a \in E$ olsun.

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \dots (*)$$

limiti varsa f fonksiyonuna a noktasında kompleks türevlenebilir (veya diferansiyellenebilir) bir fonksiyon $f'(a)$ sayısına f fonksiyonunun a noktasındaki kompleks türevi denir.

f , E kümesinin her noktasında türevlenebilir ise, f , E kümesi üzerinde kompleks türevlenebilir bir fonksiyon denir.

(*) limiti yoksa f fonksiyonu a noktasında türevlenebilir değildir (kompleks türevi yoktur) denir.

Tanım: f , E üzerinde kompleks türevlenebilir bir fonksiyon ise f' fonksiyonuna f fonksiyonunun kompleks türev fonksiyonu denir.

f' fonksiyonu sürekli ise f' e sürekli kompleks türevlenebilir bir fonksiyon denir.

NOT: Bir kompleks fonksiyonun kompleks türevinin bu fonksiyonun her mertebeden var ve sürekli olması gibi reel analizde benzeri olmayan bir sonucu verir. Bu yüzden kompleks ve reel sayılar teorisi birbirinden oldukça farklıdır. Sürekli kompleks türevlenebilir fonksiyonlar kompleks uzayın çok özel bir alt uzayını oluşturmaktadır. Bu fonksiyonlara analitik (holomorfik veya regüler) fonksiyonlar denir.

ÖRNEK: $f(z) = c \in \mathbb{C}$ ise her bir $a \in \mathbb{C}$ için $f'(a) = 0$ 'dır.
 $\Rightarrow f'(z) = 0$

ÖRNEK: $f(z) = z \Rightarrow f'(z) = 1$ 'dir.

ÖRNEK: $f(z) = z^2 \Rightarrow f'(i) = 2i$

ÖNERME: $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, bir $a \in E$ noktasında kompleks türevlenebilir bir f fonksiyonu ise f fonksiyonu a noktasında sürekli'dir.

ÖRNEK: $f(z) = \operatorname{Re} z$ fonksiyonunun $a=0$ noktasında türevinin var olup olmadığını inceleyiniz.

Gözüm: $z = x+iy \in \mathbb{C}$ için $f(z) = \operatorname{Re}(z) = x$ ve $f(0) = 0$ 'dır.

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{x - 0}{x+iy - 0} = \frac{x}{x+iy} \cdot \frac{(x-iy)}{(x-iy)} = \frac{x^2}{x^2+y^2} - i \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} - i \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} - i \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = 1$$

$$\neq \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} - i \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = 0$$

olduğundan $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$ limiti yoktur. Dolayısıyla f , $z=0$ 'da türetenebilir bir fonksiyon değildir.

5.2 ANALİTİK FONKSİYONLAR VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun.

f , E üzerinde kompleks türetenebilir ve f' , E üzerinde sürekli bir fonksiyon ise f fonksiyonuna, E üzerinde analitik (holomorf veya regüler) fonksiyon denir.

Tanım: $a \in E$ noktasının bir $D(a,r)$ komşuluğunda analitik olan bir fonksiyon a noktasında analitiktir denir. $\mathbb{C}$ üzerinde analitik olan fonksiyona tam (entire) fonksiyon denir. Analitik fonksiyon sınıfı $\mathcal{H}(E)$ veya $\mathcal{A}(E)$ ile gösterilir.

ÖRNEK: $f(z)=c$ ve $f(z)=z$ fonksiyonları $\mathbb{C}$ üzerinde analitik

funksiyonlardır.

ÖDEV: $f(z)=z^3$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ 'de tam fonksiyondur. Gösteriniz.

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

9 KASIM

5.3 CEBİRSEL ÖZELLİKLER VE ANALİTİK KRİTERLERİ

Teorem: $E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme, $f, g: E \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonlar

ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sabitler olsun. $\alpha f + \beta g$ E üzerinde analitik bir

1) fonksiyondur ve türevi $(\alpha f + \beta g)'(z) = \alpha f'(z) + \beta g'(z)$ 'dir.

2) $f \cdot g$ E üzerinde bir fonk. 'dur ve türevi;

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \text{ dir.}$$

3) $\frac{f}{g}$, $E \setminus \{z \in \mathbb{C} : g(z)=0\}$ üzerinde analitik bir fonk. 'dur.

$$\text{ve türevini } \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g^2(z)} \text{ 'dir.}$$

ÖRNEK: $p(z) = z^5 + 4z^4 + 2z^2 - z + 1$ kompleks polinom fonksiyonu

tam fonk. 'dur ve türevi $p'(z) = 5z^4 + 16z^3 + 4z - 1$ 'dir.

ÖRNEK: $r(z) = \frac{z^2+1}{z-2}$ kompleks rasyonel fonksiyonu $E = \mathbb{C} \setminus \{2\}$

kümesi üzerinde analitik bir fonk.'dur ve türevi her $z \in E$

icin $r'(z) = \frac{2z(z-2) - (z^2+1)}{(z-2)^2} = \frac{z^2-4z-1}{(z-2)^2}$

ÖRNEK: $f(z) = \frac{z^2+2}{z^6-2z^4-z^2+2}$ fonk.'nın analitik olduğu en geniş

kümeyi ve türevini bulunuz.

Çözüm: $z^6 - 2z^4 - z^2 + 2 = z^4(z^2-2) - (z^2-2)$

$$= (z^2-2)(z^4-1) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} z^2=2 & \text{ve} & z^4=1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ z_1=\sqrt{2} & z_2=-\sqrt{2} & \begin{array}{l} z_3=1 \\ z_4=-1 \end{array} \end{array}$$

$z_6=-1$
 $z_5=-1$

denkleminin çözüm kümesine göre $f, E = \mathbb{C} \setminus \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}, -1, 1\}$

kümesi üzerinde analitiktir ve türevi.

$$f'(z) = \frac{2z(z^6-2z^4-z^2+2) - (6z^5-8z^3-2z)(z^2+2)}{(z-2)^2}$$

LEMMA: (Kompleks L'Hopital Kuralı)

$E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme, $f, g: E \rightarrow \mathbb{C}$ kompleks türevlenebilir

fonk.'lar ve $a \in E$ olsun. $f(a)=g(a)=0$ ve $g'(a) \neq 0$ ise

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ÖNERME: (Ters Fonk. Teoremi)

$f: E \rightarrow G$ 1-1, örten analitik bir fonk. ve

$f^{-1}: G \rightarrow E$ sürekli bir fonk. ise f^{-1} analitik bir fonk. 'dur ve

türevi
$$[f^{-1}(z)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(z)]} \text{ 'dır.}$$

Teorem: (Zincir Kuralı) $\emptyset \neq E$, $G \subset \mathbb{C}$ açık kümeler, $f: E \rightarrow G$ ve

$g: G \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonk. 'lar ise $h: E \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = (g \circ f)(z)$

$= g(f(z))$ fonksiyonu E üzerinde analitik bir fonk. 'dur.

ve türevi

$$h'(z) = (g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z) \text{ dir.}$$

ÖDEV:

$$f(z) = \left(\frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z^3 + 2} \right)^6 \text{ fonksiyonunun analitik old.}$$

en geniş kümeyi ve türevini bulunuz.

5.4 Cauchy - Riemann Eşitlikleri

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $f: E \rightarrow \mathbb{C}$

$f(z) = u(z) + i v(z)$ olsun. u, v, E üzerinde sürekli, kısmi türevlenebilir fonk.'lar ise f, E üzerinde sürekli, kısmi türevlenebilir bir fonk.'dur denir. Ve her $z \in E$ için

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = f_x(z) = u_x(z) + i v_x(z) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f(z)}{\partial y} = f_y(z) = u_y(z) + i v_y(z)$$

dir.

ÖRNEK: $f(z) = x^2 + y^2 + i \sin xy$, $\mathbb{C}$ üzerinde sürekli, kısmi türevlenebilir bir fonk.'dur. ve her $z = x + iy \in \mathbb{C}$ için

$$f_x(z) = 2x + i \cdot \cos(xy) \cdot y$$

$$f_y(z) = 2y + i \cdot \cos(xy) \cdot x \quad \text{'dir.}$$

Tanım: $u(z) = u(x, y)$ ve $v(z) = v(x, y)$, $E \subset \mathbb{C}$ açık kümesi üzerinde kısmi türevlere sahip fonk.'lar olsun.

$$u_x(z) = v_y(z) \quad \text{ve} \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

eşitliklerine Cauchy - Riemann eşitlikleri denir. Her $z \in E$ için bu eşitlikleri sağlayan u, v fonk.'larına C^1 eşitliklerini sağlar denir.

$z = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ biçiminde ise C-R eşitlikleri

$$u_r(r, \theta) = \frac{1}{r} v_\theta(r, \theta) \text{ ve } u_\theta(r, \theta) = -r v_r(r, \theta)$$

biçimindedir.

Teorem: (Cauchy-Riemann Teoremi)

$E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(z) + i v(z)$

olsun. f 'nin E üzerinde analitik olması için gçk. u ve v 'nin E üzerinde sürekli, kısmi türevlere sahip ve C-R eşitliklerini sağlamasıdır.

Böyle bir Fonksiyonun türevi;

$$f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = v_y(z) - i u_y(z)$$

veya

$$f'(z) = e^{-i\theta} (u_r(r, \theta) + i v_r(r, \theta)) = \frac{1}{r} e^{-i\theta} (v_\theta(r, \theta) - i u_\theta(r, \theta))$$

ile belirlenir.

NOT: C-R teoreminden kompleks türevin olduğu $z \in E$ noktasında

$$f'(z) = f'_x(z) = -i f'_y(z) \text{ 'dir. C-R eşitliklerinden}$$

$$f'_x(z) + i f'_y(z) = 0$$

denklemine denktir.

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{ve}$$

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

C-R operatörleri cinsinden C-R eşitlikleri,

$$\bar{\partial} P(z) = 0$$

eşitliği ile verilebilir.

Teorem: $E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(z) + i v(z)$

fonksiyonunun bir $z_0 \in E$ noktası türevlenebilmesi için g.y.k. u, v fonksiyonlarının z_0 noktasında sürekliliği, kısmi türevlenebilir fonksiyonlar ve

$$u_x(z_0) = v_y(z_0) \quad , \quad u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

C-R eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu fonksiyonun z_0 noktasındaki türevi

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0) = v_y(z_0) - i u_y(z_0) \text{ 'dır.}$$

ÖRNEK: $f(z) = \bar{z}$, $\mathbb{C}$ 'de türevlenebilir mi?

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ için } f(z) = x - iy$$

$$\Rightarrow u(x, y) = x \quad v(x, y) = -y$$

$$u_x(x, y) = 1 \quad v_y(x, y) = -1 \quad u_x \neq v_y$$

olduğundan C-R eşitlikleri sağlanmaz $f, \mathbb{C}$ 'de türevlenemez.

ÖRNEK: $f(z) = u(z) + i v(z) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}, & z = x+iy \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$

$z=0$ 'da C-R eşitlikleri sağlandığını, fakat türevinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $u_x(0) + i v_x(0) = f'_x(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+0) - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$

$$u_y(0) + i v_y(0) = f'_y(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0+iy) - f(0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$u_x(0) = u_y(0) = 0, \quad u_y(0) = -v_x(0) = 0$$

olduğundan C-R sağlanır ancak

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z-0} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} \stackrel{y=x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x+ix)}{2x^2(x+ix)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan türev yoktur.

ÖDEV 1) $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ C-R sağlandığını gösteriniz ve türevini bulunuz.

2) $f(z) = |z|^2 - 1$ Fonksiyonunun kompleks türevelere sahip noktalar kümesini bulunuz. f fonksiyonunun analitik bir nokta var mıdır? Neden?

$$3) a) f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z-\pi)}{z-\pi} & , \quad z \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 1 & , \quad z = k\pi \end{cases}$$

b) $f(z) = \sqrt{|xy|}$ fonksiyonlarının hiçbir noktada türevi yoktur.

Gösteriniz.

4) $f(z) = |z^n - 1|^2 \quad (n \in \mathbb{N})$ fonk. 'nın türeve sahip olduğu noktalar kümesini bulunuz.

5) $f(z) = \cos(|z+2i|^2)$ ve $z_0 = 1-i$ olsun. $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

Analistik Fonksiyonların Temel Özellikleri

Teorem: $E \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ $f(z) = u(z) + i v(z)$

analitik bir fonksiyon ise

- i) f fonksiyonu E üzerinde sabit bir fonksiyondur.
- ii) $\forall z \in E$ için $f'(z) = 0$ 'dır.
- iii) u veya v fonksiyonu E üzerinde sabit bir fonksiyondur.
- iv) $\bar{f}: E \rightarrow \mathbb{C}$, $\bar{f}(z) = u(z) - i v(z)$ fonksiyonu analiktir.
- v) $m: E \rightarrow \mathbb{R}$ $m(z) = |f(z)|$ fonksiyonu E üzerinde sabit bir fonksiyondur.
- vi) $\arg f(z)$ fonksiyonu E üzerinde sabit bir fonksiyondur. İfadeleri denli ifadelerdir.

UYARI: Teoremden eğer E bir bölge değil ise ifadeler doğru değildir.

ÖRNEK: U, V boş kümeden farklı ayrık açık kümeler ve $E = U \cup V$

olsun. $f: E \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \in U \\ 0, & z \in V \end{cases}$$

ile tanımlı fonksiyonun E üzerindeki türevi 0 olmasına rağmen E bir bölge olmadığından dolayı f fonksiyonu E üzerinde sabit bir fonksiyon değildir.

ÖRNEK: f bir tam fonksiyon ve her $z \in \mathbb{C}$ için

$|f(z) - 3 + i| = 4$ ise f fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: f ve $g(z) = -3 + i$ sabit fonksiyonu tam fonksiyonlar olduklarından analitik fonksiyonlar için skalarla çarpma ve toplama kuralından $g(z) = f(z) - 3 + i$ bir tam fonksiyondur ve her $z \in \mathbb{C}$ için $|g(z)| = 4$ yani g fonksiyonunun mutlak değeri $\mathbb{C}$ üzerinde sabit bir fonksiyondur. $\mathbb{C}$ bir bölge olduğundan sabitlik ve denklemleri teoreminden g $\mathbb{C}$ üzerinde bir sabit fonksiyondur. Dolayısıyla bir C sabiti ve her $z \in \mathbb{C}$ için $g(z) = f(z) - 3 + i = C$ olduğundan $f(z) = 3 - i - C$ bir sabit fonksiyondur.

ÖRNEK: f bir tam fonksiyon ve $F = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : u = 0\}$ olsun. $f(\mathbb{C}) \subset F$ ise f fonksiyonunun $\mathbb{C}$ üzerinde sabit bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her bir $z \in \mathbb{C}$ için $f(z) \in F$ olduğundan F kümesinin tanımından $u(z) = \operatorname{Re} f(z) = 0$ sabit fonksiyondur. $\mathbb{C}$ bir bölge olduğundan sabitlik ve denklemleri teoreminden (bir bölge üzerinde reel kısmı sabit olan analitik bir fonksiyon sabit bir fonksiyon olduğundan) f $\mathbb{C}$ üzerinde sabit bir fonksiyondur.

5.6 Analitik Fonksiyonlar ve Harmonik Fonksiyon İlişkileri

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $u: E \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez sürekli kısmi türevlenebilir bir

Fonksiyon olsun. u fonksiyonu E üzerinde $\Delta u(z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u(z)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u(z)) =$

$u_{xx}(z) + u_{yy}(z) = 0$ homojen Laplace denklemini sağlıyorsa u fonksiyonuna

E üzerinde bir reel harmonik fonksiyon veya harmoniktir denir.

ÖRNEK: Sabit fonksiyonlar her mertebeden sürekli kısmi türevlenebilir ve türevi sıfır olan fonksiyonlar olduklarından harmonik fonksiyonun tanımından

$c(z) = c(x,y) = c$ sabit fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde harmonik bir fonksiyondur.

ÖRNEK: $u(z) = u(x,y) = e^x \cos y$ fonksiyonunun $\mathbb{C}$ üzerinde harmonik bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm $u_x(x,y) = e^x \cos y$ $u_y(x,y) = e^x (-\sin y)$

$u_{xx}(x,y) = e^x \cos y$ $u_{yy}(x,y) = -e^x \cos y$

$u_{xx} + u_{yy} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$ old'ndan. Harmoniktir.

Teorem: (Analitik Harmonik Fonksiyon ilişkisi)

$E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme olsun.

i) $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ise $\operatorname{Re}(f)$ ve $\operatorname{Im}(f)$ harmonik fonksiyonlardır.

ii) $E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme olsun. $u: E \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik bir fonksiyon ise

$g(z) = u_x(z) - i u_y(z)$ E üzerinde analitik bir fonksiyondur.

NOT: Bir analitik fonksiyonun her mertebeden türevleride analitik fonksiyonlar olduğundan, harmonik fonksiyonların her mertebeden kısmi türevleride harmonik fonksiyonlardır.

ÖRNEK: $P(z) = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ kompleks üstel fonksiyonu bir tam fonksiyon ve $u(z) = u(x, y) = e^x \cos y = \operatorname{Re}(e^z)$, $v(z) = v(x, y) = e^x \sin y = \operatorname{Im}(e^z)$ olduğundan analitik-harmonik fonksiyon ilişkisi teoreminden u, v fonksiyonları $\mathbb{C}$ üzerinde harmonik fonksiyonlardır.

ÖRNEK: $E \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ $f(z) = u(z) + i v(z)$ analitik bir fonksiyon olsun. $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(z) = u(z) v(z)$ fonksiyonunun harmonik bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: f analitik olduğundan skalerle çarpma ve çarpma kuralından $g: E \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = -\frac{i}{2} (f(z))^2$ analitik bir fonksiyondur. $z \in E$ için

$$g(z) = -\frac{i}{2} (f(z))^2 = -\frac{i}{2} (u(z) + i v(z))^2$$

$$= -\frac{i}{2} (u^2(z) - v^2(z) + 2i u(z) v(z)) = u(z) v(z) + i \left(\frac{v^2(z) - u^2(z)}{2} \right)$$

oldüğundan $\varphi(z) = u(z) v(z) = \operatorname{Re}(g(z))$ dir. Analitik-harmonik fonksiyon ilişkisi teoreminden φ fonksiyonu E üzerinde harmonik bir fonksiyondur.

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $u: E \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik bir fonksiyon olsun.

E üzerinde $P(z) = u(z) + i v(z)$ analitik olacak bir $v: E \rightarrow \mathbb{R}$

harmonik fonksiyonuna u fonksiyonunun bir harmonik eşleniği (veya harmonik kenjügesi) denir.

ÖRNEK: Analitik - harmonik fonk. ilişkisi sonucundan f bir analitik fonksiyon ise

$\text{Im}(P(z))$ fonksiyonu $\text{Re}(P(z))$ fonksiyonunun bir harmonik eşleniğidir.

ÖRNEK: $u(z) = u(x,y) = x - e^x \sin y$ fonksiyonunun $\mathbb{C}$ üzerinde harmonik bir fonksiyon olduğunu gösteriniz ve bir harmonik eşleniğini bulunuz.

Çözüm: $z = x + iy \in \mathbb{C}$ için $u(z) = u(x,y) = x - e^x \sin y = \text{Re}(z) + \text{Re}(ie^z)$
 $= \text{Re}(z + ie^z)$ 'dır. $I(z) = z$ özdeşlik fonksiyonu ve e^z kompleks üstel fonksiyonu tam fonksiyonlar olduklarından analitik fonksiyonlar için toplama ve skalarla çarpma kuralından $f(z) = z + ie^z$ fonksiyonu bir tam fonksiyondur. Analitik - harmonik fonksiyon ilişkisi teoremi ve harmonik eşleniğin tanımından $u(z) = u(x,y) = x - e^x \sin y = \text{Re}(z + ie^z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde harmonik bir fonksiyondur ve bir harmonik eşleniği $v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $v(z) = v(x,y)$
 $= \text{Im}(z + ie^z) = \text{Im}(x + iy + ie^x(\cos y + i \sin y)) = \text{Im}((x - e^x \sin y) + i(y + e^x \cos y))$
 $= y + e^x \cos y$ fonksiyonudur.

ÖRNEK: $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ Fonksiyonunun $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bölgesi üzerinde harmonik bir fonksiyon olduğunu gösteriniz ve bir harmonik eşleniğini bulunuz.

Çözüm: $z = x+iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{x-iy}{x^2+y^2} \right)$
 $= \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right)$ 'dir. $f(z) = \frac{1}{z}$ kompleks rasyonel fonksiyonu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bölgesi üzerinde analitik bir fonksiyon olduğundan analitik fonksiyon - harmonik fonksiyon ilişkisi teoreminden

$$u(z) = u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} = \operatorname{Re} f(z) \text{ fonksiyonu } \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ bölgesi üzerinde}$$

harmonik bir fonksiyondur ve bir harmonik eşleniği $v : \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$

$$v(z) = v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{x-iy}{x^2+y^2} \right) = - \frac{y}{x^2+y^2}$$

Fonksiyonudur.

Önerme: (Harmonik eşleniğin sabit farkıyla tekliği).

$E \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $u : E \mapsto \mathbb{R}$ harmonik bir fonksiyon olsun. $u, w :$

$E \mapsto \mathbb{R}$ u fonksiyonunun harmonik eşlenikleri ise bir c reel sabiti

ve her $z \in E$ için $v(z) = w(z) + c$ 'dir.

İSPAT: Harmonik eşleniğin tanımından $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(z) + i v(z)$

ve $g(z) = u(z) + i w(z)$ E üzerinde analitik fonksiyonlardır. Analitik fonksiyonlar için toplama ve skalerle çarpma kuralından $h : E \mapsto \mathbb{C}$,

her $z \in E$ için $h(z) = f(z) - g(z) = i(v(z) - w(z))$ analitik fonksiyondur. h bir reel sabit c olduğundan $v(z) = w(z) + c$ 'dir.

$$h(z) = f(z) - g(z) = u(z) + i v(z) - u(z) - i w(z) = i(v(z) - w(z))$$

E üzerinde analitik bir fonksiyondur ve $\operatorname{Re} h(z) = 0$ sabit fonksiyonudur.

Sabitlik ve denklemleri teoreminde bir bölge üzerinde reel kısmı sabit olan bir analitik fonksiyon sabit bir fonksiyon olduğundan,

h bir sabit fonksiyondur. Dolayısıyla bir c reel sabiti her $z \in E$ için

$$h(z) = ic = i(v(z) - w(z)) \text{ veya } v(z) = w(z) + c \text{ 'dir.}$$

5.6.1 Harmonik Eşleniğin Bulunması

$E \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $u: E \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik bir fonk. olsun. u fonksiyonunun harmonik eşleniğini bulmak için aşağıdaki yol izlenir.

1) $v: E \rightarrow \mathbb{R}$, u harmonik fonksiyonunun bir harmonik eşleniği olsun.

2) $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ $f(z) = u(z) + i v(z)$ fonksiyonu E üzerinde analitik old. 'dan her $z = x + iy \in E$ için

$$u_x(z) = v_y(z) \quad \text{ve} \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

C-R koşullarını sağlar.

3) $u_x(z) = v_y(z)$ eşitliğinden integral alınırsa y 'den bağımsız bir φ fonksiyonu için

$$v(z) = v(x, y) = \int u_x(z) dy + \varphi(x)$$

Fonksiyonu elde edilir.

4) $u_y(z) = -v_x(z)$ eşitliğinde 3)'te elde edilen $v(z)$ fonk. yerine yazılarak φ fonksiyonu bulunur.

ÖR: $u(z) = u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x + 1$

Fonksiyonunun $\mathbb{C}$ üzerinde harmonik fonk. 'dur. Gösteriniz. Harmonik eşlenik bulunuz.

$u_x(z) = 3x^2 - 3y^2 - 1 \quad u_y = -6xy$

$u_{xx}(z) = 6x \quad u_{yy} = -6x$

$u_{xx} + u_{yy} = 6x - 6x = 0$ old.'dan $u(z)$ fonk. ϕ üzerinde harmonik

bir fonk. 'dur. ϕ ^{basit bağlantılı} bir bölge old.'dan u 'nun bir harmonik eşleniği

vardır. $v: \phi \rightarrow \mathbb{R}$, u 'nun harmonik eşleniği olsun. $f(z) = u(z) + iv(z)$

ϕ üzerinde analitik old.'dan C-R koşulları sağlanır. Bu durumda

i) $u_x(z) = 3x^2 - 3y^2 - 1 = v_y(z)$

$\Leftrightarrow v(z) = v(x,y) = \int (3x^2 - 3y^2 - 1) dy = 3x^2y - y^3 - y + \varphi(x)$

ii) $u_y = -v_x \Leftrightarrow -6xy = -6xy - \varphi'(x) \Leftrightarrow -\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = C$

Böylece $v(z) = v(x,y) = 3x^2y - y^3 - y + C$ olarak elde edilir.

Teorem: Basit bağlantılı bir $\mathbb{C} \phi$ bölgesi üzerinde her harmonik fonksiyonun bir harmonik eşleniği vardır.

İSPAT: Alıştırma

NOTLAR:

1) Genel bir bölge üzerinde harmonik fonksiyonun bir harmonik eşleniği olmayabilir. Örneğin

$$u(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

Fonksiyon $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bölgesi üzerinde harmoniktir. Fakat bu bölgede harmonik eşleniği yoktur. (Neden?)

2) Her açık disk basit bağlantılı bir bölgedir.

Sonuç: $E_1, E_2 \subset \mathbb{C}$ bölgeler $f: E_1 \rightarrow E_2$ analitik bir fonk. ve

$u: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik bir fonk. ise $u \circ f$, fonksiyonu E_1 bölgesi üzerinde harmonik bir fonk.'dur.

5.6.2: Disk Üzerinde Dirichlet Problemi

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $\phi: \partial E \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonk. olsun. Her

$\xi \in \partial E$ için $\lim_{z \rightarrow \xi} u(z) = \phi(\xi)$ ve E üzerinde harmonik olan bir

u fonksiyonu bulma problemine, diğer bir ifadeyle ϕ fonksiyonunu

$D(0,1)$ üzerine harmonik olarak genişletme problemine Dirichlet problemi

denir. Ve bu problemin çözümü varsa u fonksiyonudur.

Teorem: Dirichlet probleminin çözümü varsa, çözümü tektir.

Tanım: $P: D \times \partial D \rightarrow \mathbb{R}$

$$P(z, \xi) = \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{\xi} + z}{\bar{\xi} - z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|\bar{\xi} - z|^2}$$

Fonksiyonuna birim disk için Poisson çekirdeği denir.

$z = re^{i\theta}$ ve $\zeta = e^{it}$ kutupsal gösterimi ile

$$P(z, \zeta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}$$

$D(a, 1)$: birim disk

$$|z-a| < 1, \quad |\zeta-a|=1$$

$D(a, R)$ diskinin Poisson çekirdeği

$$P(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{\zeta} + z}{\bar{\zeta} - z} \right) = \frac{R^2 - |z|^2}{|\bar{\zeta} - z|^2}, \quad (|z-a| < R, |\zeta-a|=R)$$

$\phi : \partial D(a, R) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilen bir fonk. ise

$P_\phi : D(a, R) \rightarrow \mathbb{R}$ Poisson integrali

$$P_\phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{z-a}{R}, e^{it}\right) \phi(e^{it}) dt$$

biçiminde tanımlıdır. ve kutupsal gösterimle

$$P_\phi(a + re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) \phi(a + Re^{it})}{R^2 - 2Rr\cos(t-\theta) + r^2} dt$$

olarak yazılır.

Lemma: 1) Her $|z| < 1$, $|z|=1$ için $P(z, \bar{z}) > 0$ ve Poisson

gekindeği z 'ye göre harmonik fonksiyondur.

$$2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{it}) dt = 1 \text{ 'dir}$$

$$3) |a|=1 \text{ ve } \int > 0 \text{ olsun. } z \rightarrow a \text{ için } \sup_{|z-a|>\delta} P(z, \bar{z}) \rightarrow 0 \text{ 'dir.}$$

Teorem: 1) $\phi : \partial D(a, R) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilen bir fonk. ise

$P_\phi(z)$ fonksiyonu $D(a, R)$ üzerinde harmoniktir.

2) $\phi : \partial D(a, R) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonk. ise $u(z) = P_\phi(z)$ fonksiyonu $D(a, R)$ üzerinde Dirichlet probleminin çözümüdür.

$$P_\phi(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) \phi(a + Re^{it})}{R^2 - 2Rr \cos(t - \theta) + r^2} dt$$

olarak yazılır.

Sonuç: (PIF) u , $\bar{D}(a, R)$ diskini kapsayan bir bölge üzerinde harmonik bir fonk. ise

$$u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \theta) + r^2} u(a + Re^{it}) dt \quad (r < R, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

olarak ifade edilir.

Teorem: u , yukarıdaki sonucun koşullarına sahip olmak üzere

$$\frac{R-r}{R+r} u(a) \leq u(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} u(a)$$

Teorem: u , yukarıdaki sonucun koşullarına sahip olmak üzere

$$\frac{R-r}{R+r} u(a) \leq u(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} u(a)$$

7 ARALIK PERSEMBE

6. ELEMENTER FONKSİYONLAR

6.1 Kompleks Üstel Fonksiyon

Tanım: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $f(z) = \exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ Fonksiyonuna

Kompleks Üstel Fonk. denir.

Önerme: 1) $z \in \mathbb{C}$ için $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ ve $\arg(e^z) = y \pmod{2\pi}$ 'dir. Özellikle

her $z \in \mathbb{C}$ için $e^z \neq 0$ dir.

2) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$ örten bir fonk.'dur.

3) $f(z) = e^z$ türevi kendisine eşit olan bir fonksiyondur.

4) $f(z) = e^z$, $2\pi i$ periyotlu bir fonk.'dur.

5) Her $z, w \in \mathbb{C}$ için $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ ve $e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}$ 'dir.

6) $e^z = 1 \Leftrightarrow$ her $m \in \mathbb{Z}$ için $z = 2m\pi i$ olmasıdır.

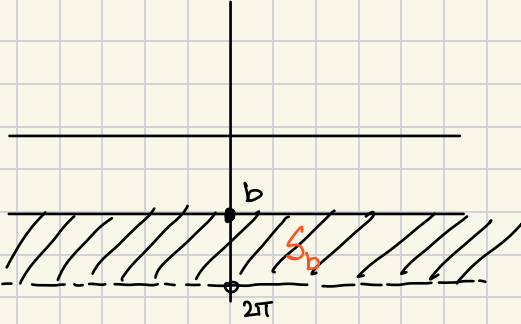
7) $e^z = -1 \Leftrightarrow$ her $m \in \mathbb{Z}$ için $z = (2m+1)\pi i$ olmasıdır.

İSPAT: Alıştırma

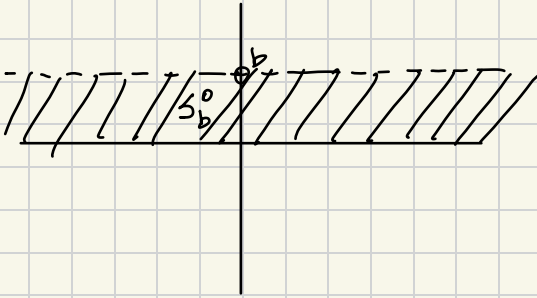
Tanım: $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$S_b = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} : b-2\pi < y \leq b \}$$

düzlemde kalınlığı 2π olan yarı kapalı yatay şeritlerdir.



$S_b^o = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} : b-2\pi < y < b \}$ düzlemde kalınlığı 2π olan açık yatay şeritlerdir.



Bu şerit içindeki herhangi iki kompleks sayının sanal kısımları arasındaki uzaklık 2π 'den küçük veya eşittir.

Tanım: Eğer $b=\pi$ ise $S_\pi = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} : -\pi < y \leq \pi \}$ şeridine esas

şerit, bu şeritin içi de

$$S_\pi^o = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} : -\pi < y < \pi \}$$
 açık şerittir.

Teorem: $f: S_b \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $f(z) = e^z$ fonksiyonu 1-1 ve örten dir.

İSPAT: $z, w \in S_b$ olsun. $e^z = e^w \Rightarrow z=w$?

$$e^z = e^w \Rightarrow e^{z-w} = 1 \Leftrightarrow z-w = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z-w) = 0 \text{ ve } |\operatorname{Im}(z-w)| = 2k\pi < 2\pi$$

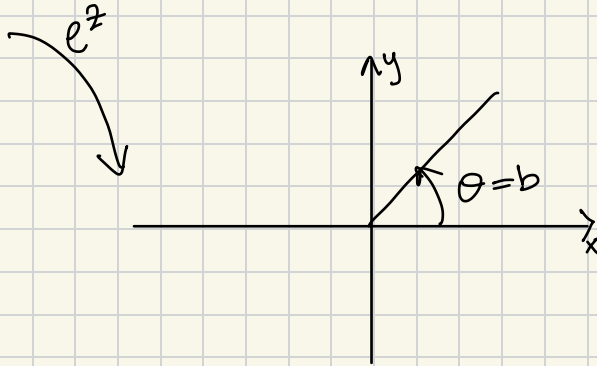
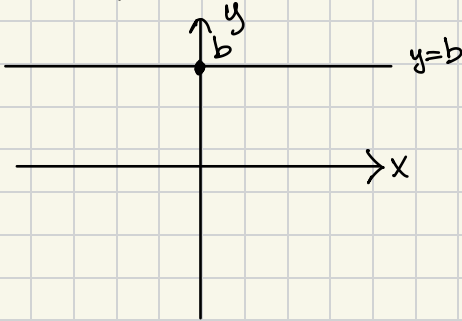
$$\Leftrightarrow k=0 \Leftrightarrow z-w=0 \Leftrightarrow z=w$$

$$\Leftrightarrow f(z) = e^z \quad S_b \text{ 'de } 1-1 \text{ dir.}$$

NOT: 1) $y=b \in \mathbb{R}$ için $e^z = e^{x+ib} = e^x (\cos b + i \sin b)$ olduğundan e^z

Fonksiyonu $y=b$ yatay doğrusunun başlangıcı orijinde ve pozitif x -ekseniyle

$\theta=b$ açısı yapan kıvrıma resmeder.



$y=b=\pi$ yatay doğrusunu negatif reel eksenle

$$S_{\pi}^0 \text{ serisini de } \mathcal{R}(\pi) = \mathbb{C} \setminus \{z = x+iy : x \leq 0, y=0\}$$

bölgesi üzerine 1-1 resmeder.

2) $x=a \in \mathbb{R}$ için $|e^z| = |e^{a+iy}| = e^a$ old'undan e^z fonksiyonu $x=a$ dikey doğrusunun merkezi orijin yarıçapı e^a olan çembere resmeder.

6.2 Kompleks Logaritma Fonksiyonu

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad e^w = z \quad w = u(z) + i v(z) \quad \text{olsun.}$$

$$e^{u(z) + i v(z)} = z$$

$$e^{u(z)} \cdot (\cos v(z) + i \sin v(z)) = x + iy$$

$$x = e^{u(z)} \cdot \cos v(z)$$

$$y = e^{u(z)} \sin v(z)$$

$$\frac{y}{x} = \tan v(z)$$

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = v(z) = \arg(z) \pmod{2\pi}$$

$$|e^{u(z) + i v(z)}| = |z|$$

$$e^{u(z)} = |z|$$

$$u(z) = \ln |z|$$

Tanım: $\log z = \ln |z| + i \arg z$ sayılarına $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kompleks sayısının kompleks logaritması ve $\text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$ sayısına da logaritmanın esas değeri denir.

$$\text{Örnek: 1) } \log 1 = \ln |1| + i \arg(1)$$

$$= 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ ve esas değeri } \text{Log } 1 = 0 \text{ dir.}$$

$$2) \log(1+i) = \ln |1+i| + i \arg(1+i)$$

$$= \ln \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ve esas değeri $\text{Log}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$ 'dır.

ÖNERME: 1) Her $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $e^{\log z} = z$ her $w = u+iv \in \mathbb{C}$ ve her $k \in \mathbb{Z}$ için $\log e^w = w + 2k\pi i$ 'dir.

2) $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $\log(z \cdot w) = \log z + \log w \pmod{2\pi i}$ dir.
 $\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log z - \log w \pmod{2\pi i}$

İSPAT: Alıştırma.

Kompleks Logaritmanın Analitik Dalları

Tanım: $\ell_b : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S_b$

$$\ell_b(z) = \ln|z| + i \arg z$$

Fonksiyonun S_b şeridi veya argümentin $[b-2\pi, b]$ değer aralığı tarafından tanımlanan bir dalı veya bransı denir.

NOT: $\ell_b, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ üzerinde sürekli olmadığından analitik değildir. Ancak ℓ_b fonksiyonu düzlemde başlangıcı orijinde ve pozitif x-ekseni ile b açısı yapan için çıkarıldığında geriye kalan

$$\Omega(b) = \{ z \in \mathbb{C} : \arg z \neq b-2\pi, b \}$$
 bölgesi üzerinde sürekli dir.

Teorem: $\ell_b : \Omega(b) \rightarrow S_b^0$ fonksiyonu analitik bir fonksiyondur.

İSPAT: $z = re^{i\theta}$ olsun. Bu durumda $\operatorname{Re}(\ell_b(z)) = u(z) = \ln|z|$
 $= \ln|re^{i\theta}|$
 $= \ln r$

$\operatorname{Im}(\ell_b(z)) = v(z) = \arg(z) = \theta \in (b-2\pi, b)$

Fonksiyonları $\Omega(b)$ üzerinde sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır. O halde

$$u_r = \frac{1}{r} \quad v_\theta = 0$$

$$u_\theta = 0 \quad v_r = 1$$

dir. Burada $u_r = \frac{1}{r} v_\theta$ ve $u_\theta = -r v_r$

C-R eşitliği sağlandığından ℓ_b analitik bir fonksiyondur ve türevi

$$\begin{aligned} \frac{d\ell_b(z)}{dz} &= e^{i\theta} \left(u_r(r, \theta) + i v_r(r, \theta) \right) \\ &= e^{-i\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{re^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{z} \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Tanım: ℓ_b bir Ω bölgesi üzerinde analitik ve her $z \in \Omega$ için $e^{\ell_b(z)} = z$ ise ℓ_b fonksiyonuna logaritmanın bir (analitik) dalı veya branşı denir.

ÖRNEK: Her $b \in \mathbb{R}$ için ℓ_b fonksiyonu $\Omega(b)$ bölgesi üzerinde logaritmanın bir analitik dalıdır.

ÖNERME: 1) ℓ logaritmanın herhangi bir analitik dalı ise $\ell'(z) = \frac{1}{z}$ 'dir.

2) Logaritmanın herhangi bir analitik dalı bir $b \in \mathbb{R}$ için,

$$\ell_b(z) = \log z = \ln|z| + i \arg z$$

Formunda bir fonksiyondur.

3) f, g bir Ω bölgesi üzerinde logaritmanın analitik dalları ise bir $k \in \mathbb{Z}$ için $f(z) = g(z) + 2k\pi i$ 'dir.

İSPAT: Aklıştırma

TANIM: $\ell_{\pi}(z) = \text{Log } z = \ln|z| + i \text{Arg } z$ fonksiyonuna logaritmanın esas analitik (holomorfik) dalı veya bacağı denir.

Bu dal, argümentin $(-\pi, \pi)$ aralığı tarafından belirlenen logaritmanın analitik dalıdır.

$$\sim(\pi) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Arg}(z) \neq \mp \pi \right\} = \mathbb{C} \setminus \left\{ z = x+iy \in \mathbb{C} : x \leq 0, y=0 \right\}$$

bölgesine logaritmanın analitik olduğu esas bölge denir.

ÖRNEK: 1) $(0, 2\pi)$ aralığının tanımladığı logaritmanın analitik dalı

$$\log z = \ln|z| + i \arg(z), \quad \arg(z) \in (0, 2\pi)$$

$$\sim(2\pi) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg z \neq 0, 2\pi \right\} = \mathbb{C} \setminus \left\{ z = x+iy \in \mathbb{C} : x \geq 0, y=0 \right\}$$

bölgesi üzerinde analiktir.

2) $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığının tanımladığı logaritmanın analitik dalı

$$\log z = \ln|z| + i \arg(z), \quad \arg(z) \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sim\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg z \neq \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\} = \mathbb{C} \setminus \left\{ z = x+iy \in \mathbb{C} : x=0, y \geq 0 \right\} \text{ bölgesi üzerinde analiktir.}$$

II Arealik Pazarlesi

Örnek: $\mathcal{H} = \{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2 \}$ halka bölgesi üzerinde logaritmanın bir dalı tanımlanamaz.

Çözüm: Logaritmanın herhangi bir analitik dalı $\log z = \ln|z| + i \arg z$

Fonksiyondur. $\arg z$, $\mathcal{H}$ bölgesinde sürekli olmadığından $\log z$ analitik değildir.

Değısıyla $\mathcal{H}$ bölgesinde analitik bir dalı tanımlanamaz.

Örnek: Logaritmanın esas analitik dalı için

$$g(z) = \log(1-z)$$

Fonksiyonunun analitik olduğu bölgeyi ve kompleks türev fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Logaritmanın esas analitik dalı için $g(z) = \log(1-z)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{C} \setminus \{ z = x+iy \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(1-z) \leq 0, \operatorname{Im}(1-z) = 0 \} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{ z = x+iy \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(1-x-iy) \leq 0, \operatorname{Im}(1-x-iy) = 0 \} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{ z = x+iy \in \mathbb{C} : 1 \leq x, y=0 \} \end{aligned}$$

bölgesi üzerinde analitik bir fonk.'dur ve türevi

$$g: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad g'(z) = \frac{1}{z-1} \text{ 'dir.}$$

Tanım: $c \in \mathbb{C}$ bir sabit ve $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ise $z^c = e^{c \log z}$ ve

$\neq$ sıfır değerini almayan bir fonksiyon ve g herhangi bir fonk. ise

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z) \cdot \log f(z)} \quad \text{biçiminde tanımlıdır.}$$

NOT: $c = m \in \mathbb{Z}$ ise

$$z^m = e^{m \log z} = e^{m(\ln|z| + i \arg z)} = (|z| \cdot e^{i \arg z})^m = z^m$$

ifadesi z^m 'nin üstel formudur.

Örnek: Logaritmanın esas dala için $w = i$ sayısının reel ve sanal kısımları

ve mutlak değerini bulunuz.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm: } w = i &= e^{i \log i} = e^{i(\ln|i| + i \operatorname{Arg} i)} \\ &= e^{i(0 + i \frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} w = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$|w| = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\operatorname{Im} w = 0$$

Önerme: $f(z) \neq 0$ ve $g(z)$ herhangi bir fonk. olmak üzere Logaritmanın herhangi bir analitik dala için $f(z)^{g(z)}$ analitik bir fonk.'dur ve türevi

$$\frac{d}{dz} \left(f(z)^{g(z)} \right) = g(z) f(z)^{g(z)-1} f'(z) + g'(z) \cdot f(z)^{g(z)} \cdot \ln f(z) \quad \text{dir.}$$

İSPAT: ÖDEV

Örnek: Logaritmanın esas dalı için

$$s(z) = \sqrt{z} = z^{1/2}$$

Fonksiyonunun analitik dalı olduğu kümeyi ve kompleks türev fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Logaritmanın esas dalı için

$$s(z) = z^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \log z}$$

Fonksiyonunun analitik olduğu bölge

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ z = x+iy : x \leq 0, y=0 \}$$

bölgesidir ve $s' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere

$$s'(z) = \frac{1}{2} z^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \text{ dir.}$$

6.3 KOMPLEKS TRİGONOMETRİK FONK.'LAR

Tanım: $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kompleks kosinüs trigonometrik fonksiyonu

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} ,$$

$s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kompleks sinüs trigonometrik fonksiyonu

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

NOT: Kompleks tanjant

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

" kotanjant

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

" sekant

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}$$

" kosekant

$$\csc z = \frac{1}{\sin z}$$

ile tanımlıdır.

Teorem: 1) Her $z \in \mathbb{C}$ için $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ 'dir.

2) $\cos z$ ve $\sin z$ tam fonksiyonları için

$$\frac{d}{dz} (\cos z) = -\sin z \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dz} (\sin z) = \cos z$$

$$\left. \begin{array}{l} 3) \cos z = 0 \Leftrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ \sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi \end{array} \right\} k \in \mathbb{Z}$$

4) $\tan z$ ve $\sec z$, $\mathbb{C} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} i \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ bölgesinde analitik ve

$$\frac{d}{dz} (\tan z) = \sec^2 z \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dz} (\sec z) = \sec z \cdot \tan z$$

5) $\cot z$ ve $\operatorname{cosec} z$, $\mathbb{C} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$$\frac{d}{dz} (\cot z) = -\csc^2 z \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dz} (\csc z) = -\csc z \cdot \cot z$$

İSPAT: Alıştırma

NOT: $\mathbb{R}$ 'de tanımlı trigonometrik fonksiyonların tüm özellikleri

$\mathbb{C}$ 'de tanımlı kompleks " " içinde geçerlidir.

Ö/ $1 + \tan^2 z = \sec^2 z \quad \cos^2 z - \sin^2 z = \cos 2z$

6.4 KOMPLEKS HİPERBOLİK FONK. LAR

Tanım:	Kompleks	hiperbolik	kosinüs	$\Rightarrow \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
	"	"	sinüs	$\Rightarrow \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
	"	"	tanjant	$\Rightarrow \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$
	"	"	kotanjant	$\Rightarrow \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$
	"	"	secant	$\Rightarrow \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$
	"	"	kosecant	$\Rightarrow \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$

Teorem: 1) Her $z \in \mathbb{C}$ $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ 'dir.

2) $\cosh z$ ve $\sinh z$ tam fonksiyonları ve $z \in \mathbb{C}$ için

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z, \quad \frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z$$

3) $\cosh z = 0 \iff z = (2k+1)\frac{\pi}{2}i$; $k \in \mathbb{Z}$

$$\sinh z = 0 \iff z = k\pi i$$

4) $\tanh z$ ve $\operatorname{sech} z$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}i, k \in \mathbb{Z} \right\}$ üzerinde analitik

ve her $z \in \Omega$ için

$$\frac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z \text{ 'dir}$$

5) $\coth z$ ve $\operatorname{cosech} z$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ k\pi i : k \in \mathbb{Z} \}$ üzerinde analitik

ve her $z \in \Omega$ için

$$\frac{d}{dz} \coth z = -\operatorname{csch}^2 z \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dz} \operatorname{cosech} z = -\operatorname{cosech} z \coth z$$

6.4.1: Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonlar Arasındaki İlişki

$$1) \cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh z$$

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$2) \sin(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = \frac{-1}{i} \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right) = i \sinh z$$

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) = i \cdot \sin z$$

ÖNERME: Her $z = x + iy$ e ϕ için

$$1) \cos z = \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y \quad \text{ve} \quad |\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$

$$2) \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y \quad \text{ve} \quad |\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

$$3) \cosh z = \cosh x \cdot \cos y - i \sinh x \cdot \sin y \quad \text{ve} \quad |\cosh z| = \sqrt{\cosh^2 x - \sin^2 y}$$

$$4) \sinh z = \sinh x \cdot \cos y + i \cosh x \cdot \sin y \quad \text{ve} \quad |\sinh z| = \sqrt{\cosh^2 x - \cos^2 y}$$

İSPAT: 1) $\cos z = \cos(x + iy)$

$$= \cos x \cdot \cos(iy) - \sin x \cdot \sin(iy)$$

$$= \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y$$

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x \cdot \cosh^2 y + \sin^2 x \cdot \sinh^2 y}$$

$$= \sqrt{\cos^2 x \cdot \cosh^2 y + (1 - \cos^2 x) \sinh^2 y}$$

$$= \sqrt{\cos^2 x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y}$$

$$= \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$

6.4.2 : Ters Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonlar

ÖNERME: 1) $\arcsin z = -i \log(iz + \sqrt{1-z^2})$, $\frac{d}{dz}(\arcsin z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

2) $\arccos z = -i \log(z + \sqrt{z^2-1})$, $\frac{d}{dz}(\arccos z) = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$

3) $\arctan z = \frac{i}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$, $\frac{d}{dz}(\arctan z) = \frac{1}{1+z^2}$

4) $\operatorname{arccosh} z = \log(z + \sqrt{z^2-1})$, $\frac{d}{dz}(\operatorname{arccosh} z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$

5) $\operatorname{arcsinh} z = \log(z + \sqrt{z^2+1})$, $\frac{d}{dz}(\operatorname{arcsinh} z) = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$

6) $\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$, $\frac{d}{dz}(\operatorname{arctanh} z) = \frac{1}{1-z^2}$

İSPAT: 1) $w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$2iw = e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}}$$

$$2iwe^{iz} = e^{2iz} - 1$$

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0$$

$$u^2 - 2iwu - 1 = 0$$

$$\Delta = -4w^2 + 4 = 4 - 4w^2$$

$$u_{1,2} = \frac{2iw \mp 2\sqrt{1-w^2}}{2} = iw \mp \sqrt{1-w^2}$$

$$e^{iz} = iw + \sqrt{1-w^2}$$

$$iz = \log(iw + \sqrt{1-w^2})$$

$$z = \arcsin w = -i \log(iw + \sqrt{1-w^2})$$

veya

$$e^{iz} = iw - \sqrt{1-w^2}$$

$$iz = \log(iw - \sqrt{1-w^2})$$

$$z = -i \log(iw - \sqrt{1-w^2})$$

$$z = -i \log(iw - \sqrt{1-w^2})$$

$$= -i(\ln|i w - \sqrt{1-w^2}| + i \arg(-1 - \sqrt{1-w^2} + iw))$$

$$= \arg(iw - \sqrt{1-w^2}) - i \ln \sqrt{\sin^2 w + \sinh^2 w}$$

2.4ol

$$e^{2iz} - 2iw e^{iz} - 1 = 0$$

$$e^{iz} = iw + (1-w^2)^{1/2}$$

$$iz = \ln[iw + (1-w^2)^{1/2}] \quad \text{veya} \quad z = -i \ln[iw + (1-w^2)^{1/2}]$$

7. Kompleks İntegraller

7.1 Ters Türev veya Belirsiz İntegraller

Tanım: $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonk. olsun. $F: E \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonk. ve her $z \in E$ için $F'(z) = f(z)$ ise F fonksiyonuna f fonksiyonunun ters türevi veya belirsiz integrali denir.

Önerme: F, G bir E bölgesi üzerinde f fonksiyonunun ters türevleri ise bir $c \in \mathbb{C}$ sabiti ve her $z \in E$ için $F(z) = G(z) + c$ 'dir.

İSPAT: F ve G fonksiyonları E bölgesi üzerinde analitik fonksiyonlar old.'dan

$$h: E \rightarrow \mathbb{C} \quad h(z) = F(z) - G(z)$$

biçiminde tanımlı h fonksiyonu da E bölgesi üzerinde analitiktir. Ters türevin tanımından her $z \in E$ için

$$h'(z) = F'(z) - G'(z) = f(z) - f(z) = 0$$

dir. Bir bölge üzerinde türevi sıfır olan analitik fonksiyon sabit fonk. old.'dan h fonksiyonu sabittir.

Dolayısıyla bir $c \in \mathbb{C}$ ve her $z \in E$ için

$$h(z) = F(z) - G(z) = c \iff F(z) = G(z) + c \text{ 'dir.}$$

ÖRNEK: 1) $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

2) $\int \sin z dz = -\cos z + C$

3) $\int \cos z dz = \sin z + C$

4) $\int e^z dz = e^z + C$

Örnek: 1) $\int (3z^2 + \cos z) dz = z^3 + \sin z + C$

2) $\int 2z \cos(z^2) dz \Rightarrow z^2 = u \quad 2z dz = du \quad \int \cos u du = \sin u + C = \sin(z^2) + C$

Kısmi integrasyon

3) $\int ze^z dz = ze^z - \int e^z dz = ze^z - e^z + C$

4) $\int \frac{1}{z^2-1} dz = \int \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz$
 $= \frac{1}{2} \log \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + C$

Ödev: $\int \frac{dz}{1+z^2} = ?$ (iki farklı yolla bulunuz.)

7.2 Kompleks Eğrisel İntegraller

Tanım: $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{C}$ bir bölge

$$\gamma: [a, b] \rightarrow E \quad \gamma(t) = x(t) + i y(t)$$

ve $\Gamma = \gamma([a, b])$ olsun. (Γ, γ) ikilisine E içinde bir eğri

γ Fonksiyonuna bu eğrinin bir parametrisasyonu, bir parametrik denklemi veya parametrik gösterimi denir. $[a,b]$ aralığına eğrinin parametre aralığı, $t \in [a,b]$ 'ye eğrinin parametre değişkeni, $x(t), y(t)$ fonksiyonlarına γ Fonksiyonunun koordinat fonksiyonları, $\gamma(a)$ noktasına eğrinin başlangıç noktası ve $\gamma(b)$ noktasına eğrinin bitim noktası denir.

$\gamma(a) = \gamma(b)$ ise (Γ, γ) eğrisine kapalı bir eğri ve $\gamma'(a,b)$ açık aralığı üzerinde 1-1 ise (Γ, γ) eğrisine basit bir eğri denir.

$\bar{\gamma}: [a,b] \rightarrow E$, $\bar{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$ olsun. $(\Gamma, \bar{\gamma})$ eğrisine (Γ, γ) eğrisinin bir geometrik tersi denir.

NOT: Kompakt bir kümenin sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü kompakt old.'dan $\gamma([a,b])$ kompakt bir kümedir.

7.2.1 TÜREVLENEBİLİR VE DÜZGÜN EĞRİLER

$\gamma: [a,b] \rightarrow E$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ parametrik denklemi ile verilmiş bir eğri olsun. $x(t), y(t)$ fonksiyonları türevlenebilir ise γ eğrisine türevlenebilir eğri denir ve türevi

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

ile tanımlanır. γ' sürekli ise γ eğrisine sürekli türevlenebilir bir eğri veya $\mathcal{C}^1$ eğridir denir.

γ' sürekli ve $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ eğrisine düzgün bir eğri denir.

Parçalı düzgün eğri, her noktada türevleri sıfırdan farklı olan sonlu

sayıda $\mathcal{C}^1$ eğrilerinin topolojik birleşiminden oluşan bir eğridir. Basit kapalı

parçalı düzgün bir eğriye bir **Jordan eğrisi** denir.

7.2.2. YÖN KAVRAMI

Tanım: $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ basit kapalı bir eğri olsun. t parametre değişkeni

a noktasından b noktasına artarken $\gamma(t)$, γ eğrisinin saatin tersi

yönünde $\gamma(a)$ noktasından $\gamma(b)$ noktasına tanyar ise γ eğrisine

pozitif yönlendirilmiş eğri denir.

Örnek: Düzlemde z_1 noktasını z_2 noktasına birleştiren Γ doğru parçası

basit, kapalı olmayan düzgün bir eğridir ve parametrik denklemi

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \Gamma, \gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$$

fonksiyonudur.

Örnek: $\Gamma = \{ z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \}$ birim çemberin standart parametrik denklemi

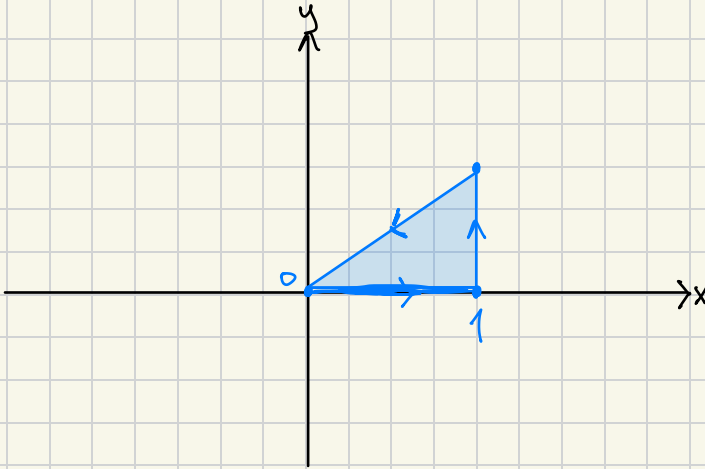
$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Fonksiyonu olan basit, kapalı ve pozitif yönlendirilmiş bir eğridir.

Örnek: $\gamma: [0,3] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ t + i(t-1), & 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t) + i(3-t), & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

parametrik denklemleri ile verilen γ eğrisi basit, kapalı ve pozitif yönlendirilmiş parçalı düzgün bir eğridir.



Örnek: $\gamma(t) = e^{2it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ birim çemberin parametrik denklemdir.

Kapalı, pozitif yönlendirilmiş, düzgün, basit olmayan eğridir. Denklemi çemberi iki kere tıkar.

7.2.3 EĞRİLERİN YENİDEN PARAMETRELENMESİ

Tanım: $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ ve $\bar{\gamma}: [c,d] \rightarrow \mathbb{C}$ iki eğri olsun.

$\alpha: [a,b] \rightarrow [c,d]$ t-1, örten, her $t \in [a,b]$ için $\alpha'(t) > 0$ ve

$\gamma(t) = \bar{\gamma}(\alpha(t))$ olacak bir α fonksiyonu varsa $\bar{\gamma}$ eğrisine γ

Eğrisinin yeniden parametrelenmesi denir.

7.2.4. HOMOTOPİK EĞRİLER VE BASİT BAĞLANTILIK

Tanım: Bir bölge içinde birbirlerine sürekli bir formda deforme edilebilen ya da büzülebilen eğrilere bu bölge içinde homotopik eğriler denir.

E içinde bir noktaya deforme edilebilen (büzülebilen), diğer bir ifadeyle sabit bir eğriye homotopik olan bir eğriye **topolojik olarak basit bir eğri** denir.

E içinde her γ kapalı eğrisi topolojik olarak basit bir eğri ise E bölgesine basit bağlantılı bir bölge denir. Geometrik olarak basit bağlantılı bölge içinde hiçbir delik olmayan bölgedir.

Örnek: Düzlemde çokgenler ve çemberler homotopik eğrilerdir.

Örnek: Kompleks düzlem, açık yarı düzlemler ve diskler basit bağlantılı bölgelerdir.

-Eğrilerin Uzunluğu ve İntegralleri-

$\gamma: [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ parametrik denklemi ile tanımlanan

γ türevlenebilir eğrisinin uzunluğu (veya boyu)

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

sayıdır.

$\gamma: [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ parametrik denklemi ile verilen

γ eğrisinin $[a, b]$ aralığı üzerindeki (belirli) integrali

$$\int_a^b \gamma(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt$$

olarak tanımlanır.

ÖRNEK: $\gamma: [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t$ parametrik denklemi ile tanımlanan bir eğri ise $L(\gamma) = b - a$ 'dır. Dolayısıyla eğrilerin uzunluğu kavramı iki nokta arasındaki uzaklık kavramını genelleştiren bir kavramdır.

ÖRNEK: $\gamma: [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ $0 \leq t \leq 2\pi$ birim çemberinin uzunluğu $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |ie^{it}| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi //$

birim çemberin çevresidir.

$|ie^{it}|$ $\searrow$ $e^{it} = \underbrace{\cos t}_{x(t)} + i \underbrace{\sin t}_{y(t)}$ $x'(t) = -\sin t$
 $y'(t) = \cos t$

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1 //$$

$ie^{it} = -\sin t + i \cos t \} \gamma'(t) \text{ olduğu görülür.}$

ÖRNEK: $\gamma: [0, 1] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t + it^2$ basit, düzgün fakat kapalı olmayan bir eğridir. Bu eğrinin integrali

$$\int_0^1 \gamma(t) dt = \int_0^1 t dt + i \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{it^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{3} //$$

Tanım: $E \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonk ve $\gamma: [a, b] \rightarrow E$

$\gamma(t) = x(t) + i y(t)$ parametrik denklemleri ile verilen türevlenebilir bir eğri olsun.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Integraline f fonksiyonunun γ eğrisi boyunca kompleks eğrisel integrali ve

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt$$

Integraline de f fonksiyonunun γ eğrisi boyunca yay uzunluğu ölçüsüne göre kompleks eğrisel integrali denir.

Örnek: $\gamma: [a, b] \rightarrow E$, $\gamma(t) = c$ ise $\gamma'(t) = 0$ old.'dan

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \text{ dir}$$

Örnek: $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ türevlenebilir bir eğri ve $f(z) = 1$ ise

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L(\gamma)$$

Önerme: Kompleks eğrisel integralin tanımı eğrinin parametrik denkleminde bağımsızdır.

İspat: $\bar{\gamma}: [c, d] \rightarrow E$, $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ eğrisinin yeniden parametrelenmesi olsun. Bu durumda $\gamma(t) = \bar{\gamma}(\alpha(t))$ olacak biçimde kesin pozitif, 1-1 ve örten bir $\alpha: [a, b] \rightarrow [c, d]$ fonksiyonu vardır.

① halinde $\gamma'(t) = \bar{\gamma}'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$ old. dan

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\bar{\gamma}(\alpha(t)) \cdot \bar{\gamma}'(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \quad \left(\begin{array}{l} s = \alpha(t) \\ ds = \alpha'(t) dt \end{array} \right) \\ &= \int_c^d f(\bar{\gamma}(s)) \cdot \bar{\gamma}'(s) ds = \int_{\bar{\gamma}} f(z) dz\end{aligned}$$

NOT: 1) $\int_{\gamma} f(z) dz$: pozitif yönlendirilmiş γ eğrisi üzerinde hesaplanan kompleks eğrisel integrali.

2) $\int_{|z-a|=r} f(z) dz$: Merkezi a , yarıçapı r olan bir çember üzerinde hesaplanan kompleks eğrisel integral. $\left(\begin{array}{l} \text{yöne bağlı olarak} \\ 2 \text{ farklı değeri olabilir.} \end{array} \right)$

3) $f(z) = u(z) + i v(z)$ ve $dz = dx + i dy$ ise **KEI (Kompleks eğrisel integral)**

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u(z) + i v(z)) (dx + i dy) \\ &= \int_{\gamma} u(z) dx - v(z) dy + i \int_{\gamma} v(z) dx + u(z) dy\end{aligned}$$

biçimini alır.

Teorem: (Green Teoremi)

γ pozitif yönlendirilmiş bir Jordan eğrisi ve $p(x,y)$, $q(x,y)$, γ eğrisi ve içi S kümesini kapsayan bir bölge üzerinde sürekli kısmi türevlenebilir fonk.'lar ise

$$\int_{\gamma} p(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_S (q_x(x,y) - p_y(x,y)) dx dy$$

biçimindedir.

Örnek: $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$; $\gamma(t) = t+it$ parametrik denklemi ile verilen bir eğri olsun. Bu durumda $\int_{\gamma} z^2 dz = ?$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_{\gamma} (\gamma(t))^2 \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 (t+it)^2 \cdot (1+i) dt \\ &= \int_0^1 t^2 (1+i)^3 dt \\ &= (1+i)^3 \int_0^1 t^2 dt = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{2}{3}(-1+i) // \end{aligned}$$

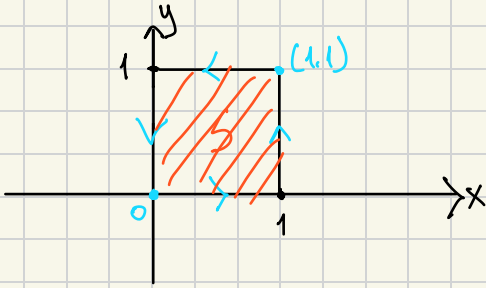
Handwritten note in pink: $\frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Örnek: γ , köşeleri $z=0$, $z=1$, $z=1+i$, $z=i$ noktalarında olan

kenarın pozitif yönlendirilmiş kenarları ise

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = ?$$

Çözüm:



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_{\gamma} (x-iy)(dx+idy) \\ &= \int_{\gamma} xdx + ydy + i \left(\int_{\gamma} -ydx + xdy \right) \end{aligned}$$

Green Teoremi

$$\iint_S (0-0) dx dy + i \iint_S (1-(-1)) dx dy$$

$$= 2i \iint_S dx dy = 2i \text{ Alan}(S) = 2i$$

7.3 CEBİRSEL ÖZELLİKLER VE İNT. HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

Teorem: $E \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f, g: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonk.'lar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\gamma, \gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow E$ parçalı düzgün eğriler ve $\gamma_2(a) = \gamma_1(b)$ olsun. Bu durumda KEİ

$$1) \int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz \quad (\text{Lineerlik})$$

$$2) \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad (\text{parçalanış})$$

3) $\bar{\gamma}$, γ nın geometrik tersi o.ü.

$$\int_{\bar{\gamma}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{dır.}$$

Özelliklerine sahiptir.

Teorem: (Eğrisel İntegralin Esas Teoremi)

$E \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. F, E üzerinde

f fonksiyonunun ters türevi ve γ, E içinde z_0 noktasını bir z_1 noktasına

birleştiren parçalı düzgün bir eğri ise

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = F(z_1) - F(z_0)$$

ve γ kapalı bir eğri ise $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ 'dır.

İspat: $\gamma: [a, b] \rightarrow E$, $z_0 \in E$ noktasını $z_1 \in E$ noktasına birleştiren bir eğri olsun. Bu durumda,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} (F(\gamma(t))) dt$$

$$= F(\gamma(t)) \Big|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\ = F(z_1) - F(z_0) \text{ 'dır.}$$

Örnek: γ , $0 \in \mathbb{C}$ noktasını $1 \in \mathbb{C}$ noktasına birleştiren parçalı düzgün bir eğri ise

$$\int_{\gamma} z e^z dz = ?$$

Çözüm: $\int t e^t dt = t \cdot e^t - e^t = e^t (t-1) + C$ idi.

$f(z) = z e^z$ ise $F(z) = (z-1)e^z$ 'dir.

$$\int_{\gamma} z e^z dz = (z-1)e^z \Big|_{z=0}^1 = 0 - (-1) = 1 //$$

ÖNERME: $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ $\gamma(t) = a + re^{it}$ parametrik denklemiyle verilen pozitif yönlendirilmiş çember olsun.

$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

İSPAT: ALIŞTIRMA

Tanım: $\gamma, \mathbb{C}$ içinde basit kapalı bir eğri ve $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ olsun.

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

Sayıncı γ eğrisinin a noktasını **sarma sayısı** veya γ eğrisinin a noktasına göre **indeksi** denir.

$$\dot{\gamma} = \{ a \in \mathbb{C} \setminus \gamma : I(\gamma, a) \neq 0 \}$$

kümesidir.

Örnek: $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + re^{it}$ çemberi ise $z \in D(a, r)$ için $I(\gamma, a) = 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(a, r)$ için $I(\gamma, a) = 0$ 'dır.

ve $\dot{\gamma} = D(a, r)$ açık diskidir.

Teorem: (ML - eşitsizliği)

$E \subset \mathbb{C}$ bir bölge γ, E içinde parçalı düzgün eğri ve $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. L , γ eğrisinin uzunluğu ve $M = \max \{ |f(z)| : z \in \gamma \}$ ise

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz \leq ML$$

Örnek: f kapalı birim disk kapsayan bir bölge üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyon ve $|f(z)| \leq 1$ ise

$$\left| \int_{|z|=1} f(z) dz \right| \leq 4$$

dir. Gösteriniz.

Çözüm: $I = \int_{|z|=1} f(z) dz$, $I = |I| \cdot e^{i\theta}$

$$\left| \int_{|z|=1} f(z) dz \right| = \int_{|z|=1} e^{-i\theta} f(z) dz \quad \gamma(t) = 1e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f(e^{it}) \cdot i \cdot e^{it} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cdot i \cdot e^{i(t-\theta)} dt$$

$$= \operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} f(e^{it}) i e^{i(t-\theta)} dt \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cdot \sin(\theta - t) dt$$

$$\leq \int_0^{2\pi} |\sin(\theta - t)| dt = \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sin t dt = 4$$

-21 Aralık Perşembe-

Lemma (Lokal 1-1'lik)

$f: E \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonk. $a \in E$ ve $f'(a) \neq 0$ ise a noktasının bir $D(a, \delta)$ komşuluğu üzerinde f , 1-1'dir.

8. CAUCHY İNTEGRAL TEOREMİ

Teorem (Cauchy İntegral Teoremi): $E \subset \mathbb{C}$ bir bölge $f(z) = u(z) + i v(z)$ analitik bir fonk. ve γ, E tarafından kapsanan pozitif yönlendirilmiş bir Jordan eğrisi ise

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{'dir.}$$

Diğer bir ifade ile f pozitif yönlendirilmiş bir γ Jordan eğrisini ve içini kapsayan bir bölge üzerinde analitik ise

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{'dir.}$$

İSPAT: $G = \gamma$ olsun. $G \subset E$ ve f, E üzerinde analitik bir fonksiyon olduğundan Cauchy-Riemann eşitlikleri sağlanır. Yani,

$$u_x = v_y \quad \text{ve} \quad u_y = -v_x \quad \text{'dir.}$$

Eğrisel integralin tanımı ve Green Teoreminden

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u(z) + i v(z))(dx + i dy) = \int_{\gamma} u(z) dx - v(z) dy + i \int_{\gamma} v(z) dx + u(z) dy$$

$$\iint_G \underbrace{(-u_x - u_y)}_0 dx dy + i \iint_G \underbrace{(u_x - u_y)}_0 dx dy = 0 //$$

Örnek: γ , $\mathbb{C}$ içinde basit kapalı parçalı düzgün herhangi bir eğri olsun.

$$\int_{\gamma} \cos z e^{z^2 \sin z} dz = ?$$

Çözüm: $f(z) = \cos z e^{z^2 \sin z}$ fonksiyonu bir tam fonk.'dur. Yani $f(z)$ $\mathbb{C}$ üzerinde analitik bir fonk.'dur. $\gamma \cup \overset{\circ}{\gamma} \subset \mathbb{C}$ olduğundan Cauchy İnt. Teo.'ne göre

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \text{ 'dır.}$$

Örnek. $\int_{\gamma} \sqrt{z-1} dz = ?$

Çözüm: $f(z) = \sqrt{z-1} = (z-1)^{1/2} = e^{\log(z-1)^{1/2}} = e^{\frac{1}{2} \log(z-1)}$

biçiminde yazılabilir. Logaritmanın esas dalı için $\log(z-1)$ Fonk.

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ z = x+iy \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z-1) \leq 0, \operatorname{Im}(z-1) = 0 \}$$

bölgesi üzerinde analitik bir Fonk.'dur. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu da

aynı bölgede analiktir. $\gamma \cup \overset{\circ}{\gamma} \subset \Omega$ olduğundan Cauchy İnt. Teo.'ne göre

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \text{ 'dır.}$$

Örnek: $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 3e^{it}$ olsun.

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z^2 + 7)^2} dz = ?$$

Çözüm: γ , merkezi $a=3$, yarıçapı $r=1$ olan pozitif yönlendirilmiş bir çemberdir. Dolayısıyla pozitif yönlendirilmiş bir Jordan eğrisidir.

$$P(z) = \frac{\cosh z}{(z^2 + 7)^2} \quad \text{Panksiyonu} \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{C} : z^2 + 7 = 0 \}$$
$$= \mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{C} : z = \pm i\sqrt{7} \}$$

bölgesi üzerinde analittir.



$$|3 \pm i\sqrt{7}| = \sqrt{3^2 + (\pm\sqrt{7})^2} = \sqrt{9+7} = 4 > 1 \quad \text{olduğundan}$$

$\pm i\sqrt{7} \notin \gamma \cup \bar{\gamma} \subset \Omega$ olduğundan Cauchy int. Teo.'ne göre

$$\int_{\gamma} P(z) dz = 0 \quad \text{'dir.}$$

Sonuç: (Ters Türevin Varlığı Teoremi) $E \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge,

$P: E \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir Pank. ve $a \in E$ olsun. $F: E \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(z) = \int_a^z P(\zeta) d\zeta \quad \text{Panksiyonu } E \text{ üzerinde analitik bir Pank.'dur. ve her}$$

$$z \in E \text{ için } F'(z) = P(z) \quad \text{'dir.}$$

Sonuç: $P(z) \neq 0$ bir tam Pank. ise, bir $g(z)$ tam Panksiyonu için $P(z) = e^{g(z)}$ biçimindedir.

Sonuç: (Eğrilerin Deform Edilme Prensipleri)

γ_1 ve γ_2 , E içinde birbirlerini deform edebilen pozitif yönlendirilmiş

Jordan Eğrileri ve P , E üzerinde analitik bir fonk. ise

$$\int_{\gamma_1} P(z) dz = \int_{\gamma_2} P(z) dz \text{ 'dir.}$$

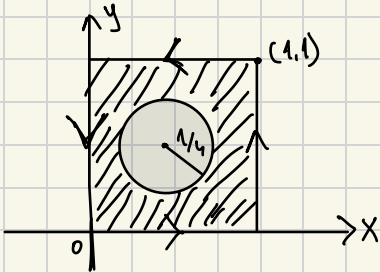
Eğer γ , basit veya basit bağlantılı bir bölge içinde kapalı bir eğri ise

$$\int_{\gamma} P(z) dz = 0 \text{ 'dır.}$$

Örnek: γ_2 , köşeleri $0, 1, 1+i$ ve i noktalarında olan karenin pozitif yönlendirilmiş kenarı (veya sınırı) olsun.

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z - \frac{1+i}{2}} = ?$$

Çözüm:



$$\gamma_2 = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} : 0 < x < 1, 0 < y < 1 \} \text{ 'dir.}$$

$$\gamma_1 = [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_1(t) = \frac{1+i}{2} + \frac{1}{4} e^{it} \text{ olsun.}$$

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 \subset \gamma_2 \text{ 'dir. } P(z) = \frac{1}{z - \frac{1+i}{2}} \text{ Fonksiyonu}$$

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} : z - \frac{1+i}{2} = 0 \right\}$$

$= \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1+i}{2} \right\}$ bölgesi üzerinde analitiktir.

$(\gamma_2 \cup \gamma_2) \setminus \dot{\gamma}_1 \subset \Omega$ ve dolayısıyla γ_1 ve γ_2 , Ω içinde birbirini

deforme edebilen pozitif yönlendirilmiş Jordan eğrileri olduğundan

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z - \frac{1+i}{2}} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - \frac{1+i}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{i}{5} e^{it} dt}{\frac{1+i}{2} + \frac{1}{4} e^{it} - \frac{1+i}{2}} dt = 2\pi i \text{ 'dir.}$$

Sonuç: 1) γ_1 basit bağlantılı bir bölge içinde kapalı bir eğri ise

$$\int_{\gamma} P(z) dz = 0$$

2) E herhangi bir bölge ve $\gamma \subset E$ içinde basit kapalı bir eğri ise

$$\int_{\gamma} P(z) dz = 0$$

Sonuç: $E \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonk. ve $g: E \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} & , \quad z \neq a \\ f'(a) & , \quad z = a \end{cases} \text{ olsun.}$$

γ , a noktasını saran ve $\gamma \subset E$ basit kapalı bir eğri ise

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 0 \text{ 'dır.}$$

Teorem (Cauchy Integral Formülü) (CIF)

$E \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonk. ve $\gamma \subset E$, basit

kapalı pozitif yönlendirilmiş parçalı düzgün bir eğri ise her $a \in \gamma$ için

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

İspat: $g: E \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} & , \quad z \neq a \\ f'(a) & , \quad z = a \end{cases}$$

Yukarıdaki sonuca göre,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{\gamma} \frac{f(a)}{z-a} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - 2\pi i f(a) \quad \text{ve dolayısıyla} \end{aligned}$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad \text{bulunur.}$$

Lemma: γ_1, γ_2 Jordan Eğrileri, $\gamma_1 \cup \gamma_1^\circ \subset \gamma_1$ ve $\Omega = \gamma_2^\circ \setminus \gamma_1 \cup \gamma_1^\circ$

olsun. $f, \bar{\Omega}$ kapsayan bir bölge üzerinde analitik ve $z \in \Omega$ ise

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{biçimindedir}$$

Örnek: $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ ise $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = ?$

$f(z) = e^z$ bir tam fonk. ve $0 \in \gamma^\circ$ olduğundan Cauchy integral formülünden

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz$$

$$2\pi i = \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \quad \text{'dir.'}$$

25 Aralık Pazartesi

Örnek: γ köşeleri $-i, -i+3, 3+i$ ve i noktalarında olan pozitif yönlendirilmiş dikdörtgen olsun.

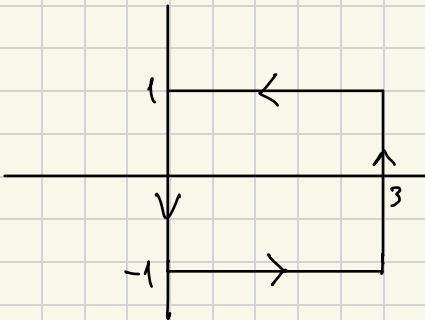
$$\int_{\gamma} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)} dz = ?$$

Çözüm: $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \quad \text{'dir Dolayısıyla}$$

$$\int_{\gamma} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)} dz = \int_{\gamma} \frac{\overbrace{z^2+1}^{f(z)}}{z-2} dz - \int_{\gamma} \frac{\overbrace{z^2+1}^{f(z)}}{z-1} dz \quad \text{'dir} \quad 1, 2 \in \gamma^{\circ}$$

olduğundan



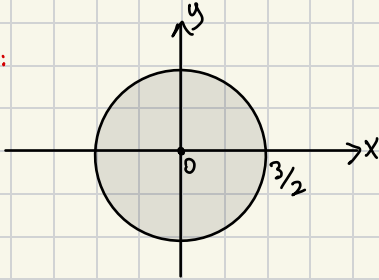
$$= 2\pi i f(2) - 2\pi i f(1)$$

$$= 10\pi i - 4\pi i$$

$$= 6\pi i //$$

Örnek: $\int_{\gamma} \frac{\sec z}{z-1} dz$, $\gamma(t) = \frac{3}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Çözüm:



$f(z) = \sec z = \frac{1}{\cos z}$ Fonksiyonu.

$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ bölgesi

üzerinde analitiktir.

$|(2k+1)\frac{\pi}{2} - 0| \gg \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2}$ olduğundan

$(2k+1)\frac{\pi}{2} \notin \gamma$ 'dir.

Dolayısıyla $\gamma \cup \gamma^* \subset \Omega$ 'dir.

$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$ olduğundan CİF'e göre

$\int_{\gamma} \frac{\sec z}{z(z-1)} dz = \int_{\gamma} \frac{\sec z}{z-1} dz - \int_{\gamma} \frac{\sec z}{z} dz$ ($1, 0 \in \gamma$)

$= 2\pi i f(1) + 2\pi i f(0)$

$= 2\pi i (\sec 1 - \underbrace{\sec 0}_1)$

NOT: Analitik Fonksiyonların ortalama değer özelliği f , $\overline{D}(a, r)$ kapalı diski kapsayan bir bölge üzerinde analitik bir Fank. ise

$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$ 'dir.

NOT: Harmonik fonksiyonların ortalama değeri özelliği, u $D(a,r)$ kapalı diski kapsayan bir bölge üzerinde harmonik bir fonk. ise

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) dt \text{ 'dir.}$$

Teorem: (Analitik Fonksiyonların Türevi)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonk. ve $\gamma, \gamma \cup \gamma' \subset \Omega$ özelliğine sahip basit kapalı parçalı düzgün pozitif yönlendirilmiş bir eğri olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}$, Ω üzerinde analitik ve her $a \in \gamma$ için

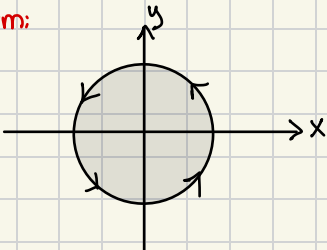
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

NOT: Yukarıdaki teoreme göre

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ 'dır.}$$

Örnek: $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ öv. $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz = ?$

Çözüm:



$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz = 2\pi i \frac{f'(0)}{1!}$$

$$= 2\pi i \cos 0$$

$$= 2\pi i$$

$a \in \gamma$ olduğundan
 $a=0$

Örnek: Aynı γ eğrisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^n} dz = ?$$

Çözüm:

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^n} dz = 2\pi i \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ 'dir.}$$

Örnek: $\gamma(t) = 2 + \frac{1}{3}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ $\int_{\gamma} \frac{3\sin z}{(z^2-4)^2} dz = ?$

Çözüm: γ : merkezi 2, yarıçapı $\frac{1}{3}$ olan pozitif yönlendirilmiş bir çemberdir.

$$\frac{\sin z}{(z-2)^2(z+2)^2} = \frac{\sin z}{\frac{(z+2)^2}{(z-2)^2}} \text{ dir.} \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{\sin z}{(z+2)^2} \text{ dir.}$$

$f(z)$ Fonksiyonu $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-2\}$ bölgesinde analitik, aynı zamanda

$$|-2-2| = 4 > \frac{3}{2} \text{ olduğundan } -2 \notin \gamma \cup \bar{\gamma} \subset \Omega \text{ 'dir.}$$

$$\int_{\gamma} \frac{3\sin z}{(z^2-4)^2} dz = \int_{\gamma} \frac{3\sin z}{(z+2)^2} dz = 2\pi i \frac{f'(2)}{1!}$$

$$= 2\pi i \frac{3\cos z (z+2)^2 - 2(z+2)3\sin z}{(z+2)^4}$$

$$= \frac{2\pi i}{256} (48 \cos 2 - 24 \sin 2) = \frac{3\pi i}{16} (2 \cos 2 - \sin 2)$$

Teorem (Morera Teoremi): $\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonk. olsun. $\gamma \subset \Omega$ olacak biçimde pozitif yönlendirilmiş her

$\gamma \subset \Omega$ Jordan eğrisi için

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \Rightarrow f, \Omega \text{ üzerinde analitik bir fonksiyondur.}$$

Örnek: $f(z) = \int_0^z e^{-t^2} dt$ Fonk.'nu bir tam Fonk. 'dur ve türevi

$$f'(z) = \int_0^z (-t^2) e^{-t^2} dt \text{ 'dir.}$$

Teorem: f , Ω bölgesi üzerinde sürekli, $L \subset \Omega$ doğru parçasının dışında analitik ise f , Ω üzerinde analiktir.

Teorem (Schwarz Simetri Prensipli)

Ω üst yarı yada alt yarı düzlem tarafından kapsanan ve $\partial\Omega$ reel ekseninde bir L doğru parçasını kapsayan bölge olsun. f , Ω bölgesi üzerinde analitik, $\bar{\Omega}$ üzerinde sürekli ve L üzerinde reel değerler alan bir Fonk. ise

$$\Omega^* = \{z: \bar{z} \in \Omega\} \text{ olmak üzere } g: \Omega \cup L \cup \Omega^* \mapsto \mathbb{C},$$

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in \Omega \cup L \\ \overline{f(z)} & , \quad z \in \Omega^* \end{cases}$$

Fonk.siyonu analiktir.

Teorem: (Cauchy Eşitsizliği)

f , $\bar{D}(a, r)$ diskini kapsayan bir bölge üzerinde analitik ve

$$M = \max \{ |f(z)| : z \in \bar{D}(a, r) \} \text{ ise}$$

$$\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} \text{ 'dir}$$

İspat:

$$\begin{aligned} |p^{(n)}(a)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{p(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|p(z)|}{|z-a|^{n+1}} |dz| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{M}{r^{n+1}} |dz| \\ &= \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \int_{\gamma} |dz| \\ &= \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{Mn!}{r^n} \end{aligned}$$

Teorem (Liouville): P tam ve sınırlı bir fonk. ise sabit bir fonk.'dur.

Örnek: P tam fonk. ve her $z \in \mathbb{C}$ için $|P(z)| \leq |e^z|$ ise bir C sabiti ve her $z \in \mathbb{C}$ için $P(z) = C \cdot e^z$ 'dir. Gösteriniz.

Çözüm: $g(z) = \frac{P(z)}{e^z}$ fonksiyonu bir tam fonk. 'dur. Her $z \in \mathbb{C}$ için

$$|g(z)| = \left| \frac{P(z)}{e^z} \right| = \frac{|P(z)|}{|e^z|} \leq \frac{|e^z|}{|e^z|} = 1$$

olduğundan g , $\mathbb{C}$ üzerinde sınırlıdır. Liouville teoremine göre $\mathbb{C}$ üzerinde bir sabit fonksiyondur. Yani bir $c \in \mathbb{C}$ için ve $z \in \mathbb{C}$ için

$$g(z) = \frac{P(z)}{e^z} = c \text{ 'dir.}$$

Teorem (Cebirin Esas Teoremi): Sabit olmayan bir $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ polinom fonksiyonunun $\mathbb{C}$ içinde en az bir kökü vardır.

9. MAKSİMUM MODÜLÜS PRENSİBİ VE UYGULAMALARI

9.1 Maksimum Modülüs Prensibi

Tanım (Maksimum - Minimum Değer): $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ bir küme

$\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $z \in \Omega$ için $\varphi(z) \geq \varphi(z_0)$ olacak
 $\leq \varphi(z_1)$

bir $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ noktası varsa $\varphi(z_0)$ değerine φ fonksiyonunun
 $z_1 = x_1 + iy_1$ $\varphi(z_1)$

(mutlak veya global) maksimum değeri ve z_0 noktasına φ
 z_1
minimum

Fonksiyonunun bir maksimum noktası denir ve maksimum değer
minimum

$$\max = \{ \varphi(z) : z \in \Omega \} = \varphi(z_0)$$

$$\min = \{ \varphi(z) : z \in \Omega \} = \varphi(z_1)$$

ile gösterilir.

Örnek: $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(z) = \frac{z^2+1}{|z|^2+1}$ Fonksiyonunun varsa maksimum

değerini bulun.

Çözüm: Her $w \in \mathbb{C}$ için $\max\{|Re w|, |Im w|\} \leq |w|$ olduğundan

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ için $x^2 + 1 \leq |z|^2 + 1$ 'dir. Böylece

$$\varphi(z) = \frac{x^2+1}{|z|^2+1} \leq 1 = \varphi(0) \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla maksimum değer tanımına göre

$$\max \{ \varphi(z) : z \in \mathbb{C} \} = \varphi(0) = 1 \text{ 'dir.}$$

Örnek: $\mathcal{C}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}(z) = \ln(|z|^2 + 1)$ Fonksiyonunun minimum değerini bulunuz.

Çözüm: Her $z \in \mathbb{C}$ için $|z|^2 \geq 0$

$$|z|^2 + 1 \geq 1$$

$$\ln(|z|^2 + 1) \geq \ln 1 = 0 = \mathcal{C}(0) \text{ 'dır.}$$

Dolayısıyla min. değer tanımından,

$$\min \{ \mathcal{C}(z) : z \in \mathbb{C} \} = \mathcal{C}(0) = 0 \text{ 'dır.}$$

-28 Aralık Perşembe-

Teorem (Maksimum (Minimum) Modülüs Prensibi)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir Fank. olsun. Her $z \in \Omega$ için $|f(z)| \leq |f(a)|$ ($|f(z)| \gg |f(a)|$) olacak biçimde bir $a \in \Omega$ varsa f , Ω üzerinde sabit bir Fanksiyondur.

NOT: Klasik ekstremum değer teoreminde kompakt bir küme üzerinde sürekli reel değerli bir Fank. maksimum ve minimum değerlerini alır. Dolayısıyla, f sınırlı bir Ω bölgesini kapsayan bir bölge üzerinde analitik bir Fank. ise maks. modülüs prensibinden,

$$\max = \{ |f(z)| : z \in \bar{\Omega} \} = \max \{ |f(z)| : z \in \partial\Omega \}$$

$f \neq 0$ ise minimum modülüs prensibinden,

$$\min = \{ |f(z)| : z \in \bar{\Omega} \} = \min \{ |f(z)| : z \in \partial\Omega \}$$

Dolayısıyla f sabit olmayan analitik bir Fank. ve $|f|$ bir $a \in \Omega$

noktasında min. değerini alıyorsa $f(a) = 0$ 'dır.

NOT: $z = x+iy \in \Omega$ ve $f(z) = u(z) + i v(z)$ için

$$|f(z)| = \sqrt{(u(z))^2 + (v(z))^2} = \sqrt{u(x,y)^2 + (v(x,y))^2}$$

iki reel değişkenli reel değerli bir Fanksiyon (tek ve çok değişkenli) olduğundan analizin maks. ve min. değer bulma yöntemleri analitik Fanksiyonların mutlak değerlerinin maks. ve min. değerlerini bulmak veya hesaplamak için uygulanabilir.

Örnek: $f, \bar{D}$ kapalı bir diski kapsayan bir bölge üzerinde analitik bir fonk. olsun. Her $z \in \partial D$ için $|f(z)| \leq 5$ ve $f(0) = 5e^{i\pi/4}$ ise $f'(\frac{3i}{5}) = ?$

Çözüm: D açık disk bir bölgedir ve $|f(0)| = |5e^{i\pi/4}| = 5$ 'dir.

$$\text{Her } z \in \partial D \text{ için } |f(z)| \leq 5 = |f(0)| \quad (0 \in \bar{D})$$

olduğundan maks. modülüs prensibine göre f, D üzerinde sabit bir fonk. 'dur. Her $z \in D$ için $f(z) = c \in \mathbb{C}$ 'dir.

$$\frac{3i}{5} \in D \text{ olduğundan } f'(\frac{3i}{5}) = 0 \text{ 'dır.}$$

Örnek: $f(z) = e^z$ olsun. $|f|$ fonksiyonunun $\bar{D}$ kapalı birim disk üzerinde max ve min değerini hesaplayınız.

Çözüm: $|f| = |e^z| = |e^{x+iy}| = e^x$ 'dır $z \in \bar{D}$ olduğundan her

$$x \in [-1, 1] \text{ için } e^{-1} \leq e^x \leq e \text{ 'dır.}$$

Yani her $z \in \bar{D}$ için

$$|f(-1)| = \frac{1}{e} \leq |f(z)| \leq e = |f(1)|$$

$-1, 1 \in \bar{D}$ olduğundan

$$\max = \{ |e^z| : z \in \bar{D} \} = e \text{ ve } \min = \{ |e^z| : z \in \bar{D} \} = \frac{1}{e} \text{ 'dır.}$$

Örnek: $m(z) = |z^3 + z^2 + z + 1|$ Fonksiyonunun $\bar{D}(0,2)$ kümesi üzerinde maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm: Her $z \in \bar{D}(0,2)$ için mutlak değer üçgen eşitsizliği özelliğinden

$$m(z) = |z^3 + z^2 + z + 1| \leq |z^3| + |z^2| + |z| + 1 = |z|^3 + |z|^2 + |z| + 1 \\ \leq 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 15$$

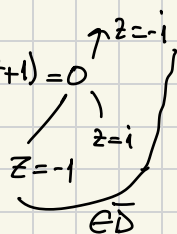
ve $z \in \bar{D}(0,2)$ için $m(z) = 15$ olduğundan maksimum değer tanımından m Fonksiyonunun $\bar{D}(0,2)$ kümesi üzerinde maksimum değeri,

$$\max\{m(z) : z \in \bar{D}(0,2)\} = 15 \text{ 'tir.}$$

Her $z \in \bar{D}$ için,

$$|m(z)| \geq 0 \\ \underset{m(-1)}{=}$$

$$z^3 + z^2 + z + 1 = z^2(z+1) + (z+1) = (z+1)(z^2+1) = 0$$



olduğundan max ve min modülüs prensibine göre

$$\max\{|m(z)| : z \in \bar{D}(0,2)\} = 15$$

'dır.

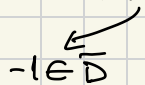
$$\min\{|m(z)| : z \in \bar{D}(0,2)\} = 0$$

Örnek: $m(z) = |(z+2)e^z|$ Fonksiyonunun $\bar{D}$ kapalı birim disk üzerindeki max ve min değerini bulunuz.

Çözüm: $|m(z)| = |(z+2)e^z| \leq (|z|+2)e^x \leq (1+2)e^1 = 3e = m(1)$

$$|m(z)| = |(z+2)e^z| \geq \underbrace{|z-2|}_{\in \mathbb{R}} e^x = (2-|z|)e^x \geq (2-1)e^{-1} = \frac{1}{e} \\ = m(-1)$$

olduğundan max ve min prensibine göre



$$\max \{ |f(z)| : z \in \bar{D} \} = 3e \quad \text{ve} \quad \min \{ |f(z)| : z \in \bar{D} \} = \frac{1}{e}$$

Örnek: $\bar{D}$ kapalı birim diski kapsayan bir bölge üzerinde analitik olan bir f fonksiyonu için

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{ve her } z \in \partial D \text{ için } |f(z)| = 1 \text{ ise}$$

en az bir $a \in D$ için $f(a) = 0$ 'dır. Gösteriniz.

Çözüm: $0, \frac{4}{5} \in \bar{D}$ ve $f(0) \neq f\left(\frac{4}{5}\right)$ olduğundan f, D üzerinde sabit olmayan analitik bir fonk. 'dur. $f(z) \neq 0$ ($\forall z \in D$ için) olsun.

f, D üzerinde sabit olmayan analitik bir fonk. olduğundan max ve min modülüs prensibine göre max ve min değerini ∂D kümesi üzerinde alır.

Her $z \in \partial D$ için $|f(z)| = 1$ olduğundan

$$M = \max \{ |f(z)| : z \in \bar{D} \} = \max \{ |f(z)| : z \in \partial D \} = 1 \quad \text{'dir.}$$

$$m = \min \{ |f(z)| : z \in \bar{D} \} = \min \{ |f(z)| : z \in \partial D \} = 1$$

Buna göre her $z \in D$ için

$$1 = m \leq |f(z)| \leq M = 1$$

Yani her $z \in D$ için $|f(z)| = 1$ 'dir. Yani f, D üzerinde sabit fonksiyondur.

Dolayısıyla en az bir $a \in D$ için $f(a) = 0$ 'dır.

Teorem (Harmonik Fonksiyonlar için Max(Min) Prensibi)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ boşit bağlantılı bir bölge ve $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik

Fonksiyon olsun. u Fonksiyonu Ω üzerinde bir a noktasında $\max(\min)$ değerini alıyorsa u Fonksiyonu Ω bölgesi üzerinde sabit bir fonksiyondur.

Teorem: (SCHWARZ LEMMASI)

$f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analitik bir fonksiyon ve $f(0)=0$ ise her $z \in \mathbb{D}$ için

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{ve} \quad |f'(0)| \leq 1 \text{ 'dir.}$$

Bir $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için $|f(a)| = |a|$ veya $|f'(0)| = 1$ ise bir $\theta \in [0, 2\pi]$

sabiti ve her $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = ze^{i\theta}$ dir.

Örnek: $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analitik bir fonk. ve her $2 \leq n \in \mathbb{N}$ için

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i}{n} \quad \text{olsun.} \quad f'\left(\frac{3i}{4}\right) = ?$$

Çözüm: $f, \mathbb{D}$ üzerinde analitik bir fonksiyon olduğundan kompleks türev- süreklilik ilişkisi önermesinden f $\mathbb{D}$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n} = 0 \in \mathbb{D}$ olduğundan sürekli fonksiyonlar için dizi kriterinden

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n} = 0 \text{ 'dir.}$$

$a = \frac{i}{2} \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ve $|f(\frac{i}{2})| = |\frac{i}{2}|$ olduğundan Schwarz lemmasından

bir $\theta \in [0, 2\pi]$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = e^{i\theta} z$ 'dir

$\frac{i}{2} = f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{i}{2}$ eşitliğinden $e^{i\theta} = 1$ ve dolayısıyla $f(z) = z$ 'dir.

O halde her $z \in \mathbb{D}$ için $f'(z) = 1$ 'dir. $\frac{3i}{4} \in \mathbb{D}$ olduğundan $f'\left(\frac{3i}{4}\right) = 1$ 'dir.

Teorem (Açık Fonksiyon Teoremi): $\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sabit olmayan bir analitik fonksiyon ise f açık bir fonksiyondur. Yani

$G \subset \Omega$ açık bir küme ise $f(G) \subset \mathbb{C}$ 'de açıktır.

10. SIFIRLAR VE SİNGÜLER NOKTALAR

10.1 Analitik Fonksiyonların Sıfırları

Tanım: $\Omega \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonk. olsun.

$$Z(f) = \{ z \in \Omega : f(z) = 0 \}$$

kümesine f fonksiyonunun sıfırlarının kümesi denir.

Tanım: $a \in Z(f)$ olsun. a noktasının bir komşuluğunda sıfır değeri almayan bir g analitik fonksiyonu için

$$f(z) = (z-a)^n g(z)$$

ise a noktasına f fonksiyonunun mertebesi n olan bir sıfırı denir.

Önerme: $\Omega \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. $a \in \Omega$ noktasının f fonksiyonunun mertebesi n olan bir sıfırı olması için gçk.

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

ve

$$f^{(n)}(a) \neq 0$$

olmasıdır.

Örnek: $p(z) = z^2 + 1$ 'nin sıfırlarını ve mertebelerini bulunuz.

Çözüm: $p(z) = z^2 + 1 = 0$

↙ ↘

$z=i$ $z=-i$

$$\begin{array}{lll} p(z) = z^2 + 1 & p(i) = 0 & , \quad p(-i) = 0 \\ p'(z) = 2z & p'(i) = 2i \neq 0 & , \quad p'(-i) = -2i \neq 0 \end{array}$$

olduğundan $p(z)$ 'nin sıfırları birinci mertebeden (basit) sıfır noktalarıdır.

ÖDEV: $f(z) = \sin z$ sıfırları ve mertebeleri ?

Ödev Çözümü: $f(z) = \sin z$ kompleks sinüs trigonometrik fonksiyonu bir tam fonksiyondur. Sıfırlarının kümesi $Z(f) = \{ n\pi : n \in \mathbb{Z} \}$ kümesidir. Her bir $n \in \mathbb{Z}$ için $f'(n\pi) = \frac{d}{dz} (\sin z) \Big|_{z=n\pi} = \cos z \Big|_{z=n\pi} = \cos n\pi = (-1)^n \neq 0$ olduğundan

her $n\pi \in Z(f)$ noktası f fonksiyonunun birinci mertebeden (basit) bir sıfır noktasıdır.

ÖDEV 2: $f(z) = z \cdot \sin(z^2)$ için $a=0$ noktası 3. mertebeden bir sıfır noktasıdır. Gösteriniz.

Teorem: (Analitik Fonksiyonlar için Özdeşlik Prensipli)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ise

1) $f \equiv 0$ 'dır. (Her $z \in \Omega$ için $f(z)=0$) dir.

2) Her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}(a) = 0$ olacak biçimde bir $a \in \Omega$ vardır.

3) $Z(f)$ kümesinin Ω içinde bir limit noktası vardır.

İfadeleri denktir.

NOT: Analitik fonksiyonların özdeşlik prensibinden f bir Ω bölgesi üzerinde özdeş olarak 0 olmayan bir analitik fonksiyon ise $Z(f)$ kümesi ayrık bir kümedir. Yani,

$$\forall a \in Z(f) \text{ için } D(a, r) \cap \Omega = \{a\}$$

olacak biçimde bir $r > 0$ vardır.

Örnek: $\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonlar olsun. Bir $a \in \Omega$ ve $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a) \text{ ise } f \equiv g \text{ 'dir. Gösteriniz.}$$

Çözüm: $h(z) = f(z) - g(z)$ fonksiyonu $\Omega \subset \mathbb{C}$ üzerinde analitik bir fonksiyondur. $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için

$$h^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - g^{(n)}(a)$$

olduğundan analitik fonksiyonların özdeşlik prensibine göre

$$h = 0 \Leftrightarrow f \equiv g \text{ 'dir.}$$

-4 Ocak Perşembe -

Teorem (Argüment Prensibinin Özel Formu)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonk. ve γ

$\gamma \cup \bar{\gamma} \subset \Omega$ özelliğine sahip pozitif yörlendirilmiş bir Jordan Eğrisi olsun.

$\forall z \in \gamma$ için $f(z) \neq 0$ ve n , f fonksiyonunun γ eğrisi içinde katlılıklarıyla

birlikte sıfırlarının sayısı ise

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n \text{ 'dir.}$$

NOT: $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonk ise argüment prensibinin hipotezleri koşulu altında Cauchy integral formülü uygulanır.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z) \cdot f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n g(z_k) \text{ 'dir.}$$

Örnek: $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \frac{3}{2}e^{it}$ olsun. $\int_{\gamma} \frac{3z^2}{z^3-1} dz = ?$

Çözüm: $f(z) = z^3-1$ ve $f'(z) = 3z^2$ öü birer tam fonk.'dur.

$$Z(f) = \{ z \in \mathbb{C} : z^3-1=0 \}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} : z^3=1 = e^{i(0+2k\pi)} , k=0,1,2 \}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} : z_0=e^{i0}, z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2=e^{i\frac{4\pi}{3}} \}$$

$$= \{ z_0=1, z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \}$$

olduğundan bu sıfır noktaları f 'nin basit sıfırlarıdır. $\gamma = D(0, \frac{3}{2})$

$$Z(f) \cap D\left(0, \frac{3}{2}\right) = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \text{ 'dir. Yani } f \text{ 'nin } \gamma \text{ içinde üç adet}$$

sıfırı vardır. Ve $\forall z \in \gamma$ için $f(z) \neq 0$ old'ndan

$$\text{AP (Argüment Prensipleri) 'den} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{3z^2}{z^3-1} dz = 3$$

Örnek: 1) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 4e^{it}$ olsun. (Alıştırma)

Cevap = $6\pi i$

$$\int_{\gamma} \coth h(z) dz = ?$$

2) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 3e^{it}$ olsun. $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{\cos z - \frac{1}{2}} dz$ (Alıştırma)

Sonuç: (Rouche Teoremi)

Ω bir bölge, $\gamma \subset \Omega$ bir Jordan eğrisi ve f, Ω üzerinde analitik

ve $\forall z \in \gamma$ için $f(z) \neq 0$ olsun. h, Ω üzerinde analitik ve her $z \in \gamma$

için $|h(z)| < |f(z)|$ ise $f(z)$ ve $\varphi(z) = f(z) + h(z)$ fonksiyonlarının

γ 'deki sıfırlarının sayısı aynıdır.

Örnek: $\varphi(z) = z^4 + z^3 + 1$ Fonksiyonunun bütün sıfırları $D\left(0, \frac{3}{2}\right)$ diskinde dir. Gösteriniz.

Çözüm: $\varphi(z) = \underbrace{z^4}_{f(z)} + \underbrace{z^3+1}_{h(z)}$

$$\partial\left(D\left(0, \frac{3}{2}\right)\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{3}{2}\right\} \text{ 'dir. } \partial D \text{ üzerinde}$$

$$|f(z)| = |z^4| = |z|^4 = \frac{81}{16} \text{ ve}$$

$$|h(z)| = |z^3+1| \leq |z|^3 + 1 = \frac{27}{8} + 1 = \frac{35}{8}$$

$$\frac{35}{8} < \frac{81}{16} = |f(z)|$$

Oldı'dan Rouché Teoremine göre $P(z)$ ile $\mathcal{C}(z)$ 'nin $D(0, \frac{3}{2})$ içinde

sıfırlarının sayısı aynıdır. $P(z) = z^4$ ün $D(0, \frac{3}{2})$ içinde sıfırlarının sayısı

4'tür. ($z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = 0$)

0 halde $\mathcal{C}$ 'nin tüm kökleri D 'nin içindedir.

Teorem (Hurwitz Teoremi): (f_n) , Ω bölgesi üzerinde sıfır değerini almayan analitik fonksiyonların bir dizisi olsun. (f_n) dizisi Ω kümesinin kompakt alt kümeleri üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise ya $f = 0$ (veya)

$\forall z \in \Omega$ için $f(z) \neq 0$ 'dır.

10.2: ANALİTİK FONKSİYONLARIN SİNGÜLER NOKTALARI VE SINIFLANDIRILMASI

Tanım: f fonksiyonu bir a noktasının bir $D(a, r) \setminus \{a\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat $D(a, r)$ üzerinde analitik değil ise a noktasına f fonksiyonunun bir ayrık (izole) singüler noktası denir.

Tanım: $a \in \mathbb{C}$, f analitik fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası ve $w_0 \in \mathbb{C}$ için $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w_0$ ise a noktasına f 'nin kaldırılabilir singüler noktası denir.

Tanım: $a \in \mathbb{C}$, f analitik fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası ve $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

ise a noktasına f fonksiyonunun kutup noktası (kutbu, polu) denir.

a noktasının bir $D(a, r) \setminus \{a\}$ komşuluğunda sıfırdan farklı bir φ analitik

fonksiyonu ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$$

ise a noktasına f fonksiyonunun mertebesi n olan bir kutup noktası denir.

Tanım: $a \in \mathbb{C}$ noktası f analitik fonksiyonunun ne kaldırılabilir ne de kutup

noktası ise a noktasına f 'nin esas singüler noktası denir.

Örnek: 1) $f(z) = \frac{1}{z}$ $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a=0$ $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty$, kutup noktası.

2) $g(z) = \frac{\sin z}{z}$ $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $a=0$
ve $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq \infty$ Kaldırılabilir.

3) $\varphi(z) = \begin{cases} \cos z, & z \neq \pi \\ 0, & z = \pi \end{cases}$ $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\pi\}$ $\lim_{z \rightarrow \pi} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow \pi} \cos z = -1$ Kaldırılabilir.

4) $h(z) = e^{1/z}$ $a=0$ ayrık singüler nokta $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z}$ yoktur.
↙
esas singüler nokta

10.3: ANALİTİK FONKSİYONLARIN NOKTALARDA DAVRANIŞLARI

10.3.1: Kaldırılabilir Singüler Noktalarda Davranışlar

Önerme: $f, a \in \mathbb{C}$ noktasının bir $D(a, r) \setminus \{a\}$ komşuluğu üzerinde analitik

ve a, f fonksiyonunun kaldırılabilir singüler noktası ise $g: D(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq a \\ \lim_{z \rightarrow a} f(z), & z = a \end{cases} \quad \text{fonksiyonu } D(a, r) \text{ üzerinde analittir.}$$

Tanım: $a \in \mathbb{C}$, f analitik fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olsun.

a 'nın bir $D(a, r)$ komşuluğunda analitik ve $D(a, r) \setminus \{a\}$ üzerinde f fonksiyonuna eşit bir g fonksiyonu varsa a 'ya f 'nin bir kaldırılabilir singüler noktası denir.

Teorem: (Riemann Kaldırılabilir Singüler Nokta Prensibi)

$a \in \mathbb{C}$ noktası f analitik fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olsun.

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = 0$$

ise a , f 'nin kaldırılabilir bir singüler noktasıdır.

SONUÇ: $a \in \mathbb{C}$, f analitik fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olsun.

f , $D(a, r) \setminus \{a\}$ üzerinde sınırlı ise a noktası f 'nin kaldırılabilir singüler noktasıdır.

Teorem: (Riemann Kaldırılabilir Singüler Nokta Teoremi)

f , $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ bölgesi üzerinde analitik ve $D(a, r) \setminus \{a\}$ üzerinde sınırlı olsun.

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w_0 \quad \text{var ve} \quad f(a) = w_0 \quad \text{tanımlanırsa}$$

f , $\mathbb{C}$ üzerinde analiktir.

10.3.2 : KUTUP NOKTALARINDA DAVRANIŞLAR

Lemma: $a \in \mathbb{C}$ noktası f analitik fonksiyonunun bir kutup noktası ise a noktası

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \text{fonksiyonunun kaldırılabilir singüler noktası}$$

$$g(a) = \lim_{z \rightarrow a} g(z)$$

biçiminde tanımlanırsa g fonksiyonu, $D(a, r)$ üzerinde analitik ve a , g 'nin bir sıfır noktasıdır. Tersine a , g 'nin bir sıfır noktası ise f 'nin bir kutup noktasıdır.

Teorem: $f, D(a, r) \setminus \{a\}$ üzerinde analitik ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^n f(z) \neq 0 \quad \text{fakat} \quad \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^{n+1} f(z) = 0$$

ise a noktası f 'nin mertebesi n olan bir kutup noktasıdır. $n=1$ ise bu kutup noktasına basit kutup noktası denir.

10.3.3: ESAS SİNGÜLER NOKTALARDA DAVRANIŞLAR

Teorem: (Casorati - Weierstrass)

$f, a \in \mathbb{C}$ nin bir $D(a, r) \setminus \{a\} = \mathcal{R}$ üzerinde analitik ve a , f 'nin esas singüler noktası ise her $s \in (0, r)$ için

$$\left\{ f(z) : 0 < |z-a| < s \right\} = f(D(a, s) \setminus \{a\})$$

kümesi kompleks düzlemin yoğun alt kümesidir.

Teorem: 1) (Picard'ın Küçük Teoremi): f sabit olmayan bir tam fonk. ise

f , en çok bir nokta haricinde bütün değerleri alır. En az iki değeri olmayan bir tam fonksiyon sabit fonksiyondur.

2) (Picard'ın Büyük Teoremi): f , $a \in \mathbb{C}$ 'nin bir $D(a, r) \setminus \{a\}$ komşuluğu

üzerinde analitik ve a f 'nin esas singüler noktası ise her $s \in (0, r)$

$$\text{icin } \{f(z) : 0 < |z-a| < s\} = f(D(a, s) \setminus \{a\})$$

kümesi en çok bir nokta haricinde düzlemin tüm noktalarını içerir.

10.3.4: ∞ NOKTASINDA DAVRANIŞLAR

Tanım: f , ∞ noktasının bir komşuluğu $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ bölgesi

üzerinde analitik ve $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ olsun. g , $z=0$ 'da analitik ise

f , ∞ 'da analiktir. $z=0$ noktası, g 'nin kaldırılabilir (kutup, esas singüler) noktası

ise $z=\infty$ noktasına f Fonksiyonunun bir kaldırılabilir singüler noktası

(kutup noktası veya esas singüler noktası) denir.

Örnek: 1) $f(z) = \frac{1}{z}$ olsun. $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = z$ tam fonksiyon. f ∞ 'da analiktir.

$$2) f(z) = \frac{1}{z^2+1} \text{ olsun. } g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2}{z^2+1}$$

$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z^2+1 = (z+i)(z-i) = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ bölgesi üzerinde analiktir.

$0 \in \Omega$ olduğundan g fonksiyonu $z=0$ noktasında analiktir. ∞ noktasında

analitik fonksiyonun tanımından f fonksiyonu ∞ noktasında analiktir.

$$3) f(z) = z \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right) \text{ olsun. } g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\sin z}{z} \text{ 'dir. } z=0 \text{ noktası } g(z) = \frac{\sin z}{z}$$

Fonksiyonunun kaldırılabilir bir singüler noktası olduğundan ∞ noktası

$f(z) = z \sin \frac{1}{z}$ Fonksiyonunun kaldırılabilir singüler noktasıdır.

8 Ocak Pozertesi

10.4 Rezidüler

Tanım: $a \in \mathbb{C}$, f fonksiyonunun ayrık singüler noktası, γ pozitif yönlendirilmiş bir Jordan eğrisi ve $a \in \gamma$ olsun. f fonksiyonu $\gamma \cup \gamma' \setminus \{a\}$ kümesini kapsayan bir bölge üzerinde analitik ise

$$\text{Res}\{f, a\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

sayısına, f 'nin a noktasındaki rezidüsü (kalıntısı, tortusu) denir.

Eğer a noktası kaldırılabilir bir singüler nokta ise $\text{Res}\{f, a\} = 0$ 'dir.

Örnek: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $a=0$, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, $a=0$ kaldırılabilir singüler nokta.

$$\text{Res}\left\{\frac{\sin z}{z}, 0\right\} = 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z} dz$$

Önerme: (Kutup Noktalarında Rezidü Hesaplama)

$a \in \mathbb{C}$, f analitik fonksiyonunun n . mertebeden kutup noktası ise

$$\text{Res}\{f, a\} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n \cdot f(z) \right] \text{ 'dir.}$$

Örnek: $f(z) = \frac{(z-i)(z+1)}{z \cdot (z-2)^2}$ rezidüleri?

Çözüm: f fonksiyonu $\mathcal{L} = \mathbb{C} \setminus \{z \cdot (z-2)^2 = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$ bölgesi

üzerinde analitik ve $z_1=0$, f' 'nin basit, $z_2=2$ f 'nin 2. mertebeden

kutup noktalarıdır. Buna göre

$$\operatorname{Re}\{f, z_1\} = \operatorname{Res}\{f, 0\} = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z-i)(z+1)}{(z-2)^2} = -\frac{i}{4}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{f, z_2\} &= \operatorname{Res}\{f, 2\} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left[(z-2)^2 \cdot f(z) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-i)(z+1)}{z} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z+1+z-i)z - (z-i)(z+1)}{z^2} \\ &= \frac{10-2i - 6+3i}{4} = \frac{4+i}{4} // \end{aligned}$$

ÖDEV: $g(z) = \frac{e^z}{(z-1-i)^3}$ rezidüsü? $\left\{ \frac{e}{2} (\cos 1 + i \sin 1) \right\}$

Örnek: $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ rezidüsü?

Çözüm: $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{L} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bölgesi üzerinde analitik ve $a=0$ f 'nin ayrık singüler noktasıdır.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{f, 0\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin w}{w^2} dw \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{w}, \quad dz = -\frac{1}{w^2} dw$$

γ^{-1} , γ 'nin geometrik tersidir.

$$= \frac{-1}{2\pi i} \left(- \int_{\gamma} \frac{\sin w}{w^2} dw \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin w}{w^2} dw \stackrel{\text{CiF}}{=} \frac{d}{dw} (\sin w) \Big|_{w=0} = 1 //$$

10.4.1 SONSUZ NOKTASINDA REZİDÜ HESABI

Tanım: P , sonlu tane ayrık singüler ve ∞ noktasının dışında $\mathbb{C}$ 'de analitik bir fonk. ve γ , ∞ noktasının dışında tüm singüler noktaları saran pozitif yönlendirilmiş bir Jordan eğrisi ise

$$\text{Res}\{P, \infty\} = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} P(z) dz$$

sayısına P 'nin ∞ 'daki rezidü denir.

Önerme: P , $z_1, z_2, \dots, z_n$ sonlu tane ayrık singüler noktaları dışında $\mathbb{C}$ üzerinde analitik bir fonk. ise

$$\text{Res}\{P, \infty\} + \sum_{k=1}^n \text{Res}\{P, z_k\} = 0 \text{ 'dır.}$$

Örnek: $f(z) = z$ 'nin ∞ 'daki rezidüsü?

Çözüm: $f(z) = z$ $\mathbb{C}$ üzerinde bir tam fonk.'dur. Dolayısıyla pozitif yönlendirilmiş herhangi bir γ Jordan eğrisi için

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z dz \stackrel{\text{CiF}}{=} 0 \quad 0 \text{ halde } \text{Res}\{f, \infty\} = 0 \text{ 'dır.}$$

Örnek: $f(z) = \frac{1}{z}$, $\text{Res}\{f, \infty\} = ?$

Çözüm: $\text{Res}\{f, 0\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = 1$

0 halde $\text{Res}\{f, \infty\} = -\text{Res}\{f, 0\} = -1$

Örnek: $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $\text{Res}\{f, \infty\} = ?$

Çözüm: f , $\mathbb{C} \setminus \{-i, +i\}$ bölgesinde analitik ve $z_1 = -i$ ile $z_2 = i$

noktaları , f 'nin basit kutup noktalarıdır.

$\text{Res}\{f, -i\} = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{-2i}$

$\text{Res}\{f, i\} = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$

$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = -\frac{1}{2i} + \frac{1}{2i} = 0$ 'dır. $\text{Res}\{f, \infty\} = 0$ 'dır.

10.4.2 Sonsuz NOKTASINDA REZİDÜ HESAPLAMA FORMÜLÜ

1) f , ∞ da analitik veya ∞ kaldırılabilir singüler nokta ve

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ ise

$\text{Res}\{f, \infty\} = -\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z)$ 'dır.

2) $\varphi(z) = \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ öü. $\text{Res}\{f, \infty\} = -\text{Res}\{\varphi, 0\}$

3) $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ olsun. Eğer $\deg q(z) - \deg p(z) \geq 2$ ise $\text{Res}\{f, \infty\} = 0$ 'dır.

11. REZİDÜ TEOREMİ VE UYGULAMALARI

11.1 REZİDÜ TEOREMİ

Teorem (Rezidü Teorem): f , bir Ω bölgesi üzerinde $z_1, z_2, \dots, z_n \in \Omega$ ayrık singüler noktaları hariç analitik bir fonk. ve γ , Ω içinde pozitif yönlendirilmiş basit kapalı parçalı düzgün bir eğri ve $\{z_1, \dots, z_n\} \subset \text{int}(\gamma)$ ise

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}\{f, z_k\} \quad \text{'dır.}$$

Örnek: $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \frac{1}{2} e^{it}$ ise

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\cos z}}{z^2(z^2+4)} dz = ?$$

Çözüm: $f(z) = \frac{e^{\cos z}}{z^2(z^2+4)}$ fonk.'nu $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-2i, 0, 2i\}$ bölgesi üzerinde

analitik ve $z = \pm 2i$ basit, $z = 0$ 2. mertebeden ^{kutup} noktalarıdır.

$\gamma = \mathcal{C}(0, \frac{1}{2})$ a.ü. $0 \in \gamma$ 'dır. Bu durumda,

$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}\{f, 0\}$ Bölgenin içinde sadece 0 var diye onu aldık.

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} [z^2 f(z)]$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{e^{\cos z}}{z^2+4} \right]$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin z e^{\cos z} (z^2+4) - 2z e^{\cos z}}{(z^2+4)^2} = \frac{0}{16}$$

11.1.1 Argüment Prensipli

Tanım: $\log P(z)$ fonksiyonunun

$$\frac{d}{dz} (\log P(z)) = \frac{P'(z)}{P(z)}$$

kompleks türev fonksiyonuna P' 'nin logaritmik türevi denir.

Tanım: P , pozitif yönlendirilmiş bir γ Jordan eğrisi ve γ' 'i kapsayan bir bölge üzerinde, γ' de sonlu sayıda kutupları hariç analitik bir fonk. olsun. Bu durumda

$N_P(0) = N_0(\gamma, P)$ değerine P 'nin γ' 'deki katlılıklarıyla beraber sıfırlarının sayısı ve $N_P(\infty) = N_\infty(\gamma, P)$ değerine de P 'nin γ' 'deki katlılıklarıyla beraber kutuplarının sayısı denir.

Örnek: $P(z) = \frac{z^4 (z - \frac{1}{4})^2}{(z - \frac{1}{3})^3 \cdot (z - 2)}$, $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ ise

$N_P(0)$ ve $N_P(\infty) = ?$

Çözüm: $Z(P) = \{0, \frac{1}{4}\}$ ve $P(P) = \{\frac{1}{3}, 2\}$ 'dir.

$$\gamma = D(0, 1)$$

$0 \in \gamma$, $\frac{1}{4} \in \gamma$ old'dan $N_P(0) = N_0(\gamma, P) = 4 + 2 = 6$

$\frac{1}{3} \in \gamma$, $2 \notin \gamma$ old'dan $N_P(\infty) = N_\infty(\gamma, P) = 3$ 'tür.

Teorem (Argüment Prensibi): P , pozitif yarıplanlı bir γ Jordan eğrisini ve içini kapsayan bir bölge üzerinde γ içinde kalan sonlu kutup noktaları haricinde analitik ve γ üzerinde sıfır değerini almayan bir fonk. ise

$$N_P(0) - N_P(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz \quad \text{'dir.}$$

Örnek: $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \pi \cdot e^{it}$ ise $\int_{\gamma} \cot(\pi z) dz = ?$

Çözüm: $\gamma = D(0, \pi)$ öü. $\cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{P'(z)}{\pi P(z)}$

$$P(z) = \sin \pi z \quad \text{icin} \quad Z(P) = \{n: n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}, \quad \gamma \cap Z(P) = \emptyset$$

$z=n$ noktaları P 'nin basit sıfırlarıdır. Gerçekten

$$P(n) = \sin \pi n = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$P'(n) = \pi \cdot \cos \pi n = (-1)^n \cdot \pi \neq 0 \quad \text{'dir.}$$

$$\{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3\} \in \gamma$$

$$N_P(0) = 7, \quad N_P(\infty) = 0$$

$$N_P(0) - N_P(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} dz$$

$$I_1 = \int_{\gamma} \cot(\pi z) dz$$

Örnek: $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 3\pi e^{it}$ olsun. $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{\cos z - \frac{1}{2}} dz = ?$

Çözüm: $P(z) = \cos z - \frac{1}{2}$, $\gamma = D(0, 3\pi)$ öü.

$$Z(P) = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2n\pi, -\frac{\pi}{3} + 2n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad Z(P) \cap \gamma = \emptyset$$

$P'(z) = -\sin z \neq 0$ dir. Yani her biri basit sıfır
 $z \in Z(P)$

$$\left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3} \right\} \in \gamma$$

$$N_P(0) = 6, \quad N_P(\infty) = 0$$

$$\underbrace{N_P(0) - N_P(\infty)}_6 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-\sin z}{\cos z - \frac{1}{2}} dz$$

$$-12\pi i = \int_{\gamma} \frac{\sin z}{\cos z - \frac{1}{2}} dz //$$

11.2 Reel İntegrallerin Kompleks Yöntemle Hesaplanması

Lemma (Birinci İnt. Hesap Formülü): P , n tane kutup noktaları dışında $\{z = x+iy \in \mathbb{C} : y \geq 0\}$ kapalı üst yarı düzlemini kapsayan bir bölge üzerinde analitik bir fonksiyon olsun. Kapalı üst yarı düzlemde düzgün olarak;

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot P(z) = 0$$

ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}\{P, z_j\} \quad \text{'dir.}$$

düzgün olarak

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot P(z) = 0$$

ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}\{P, z_j\} \quad \text{'dir.}$$

Örnek:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = ?$$

$$f(x) = \frac{1}{x^4+1} \quad \text{Fonksiyonu Çift Fonk.}$$

oldı'dan

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx \quad \text{'dir.}$$

$$P(z) = \frac{1}{z^4+1} \quad \text{olsun. Bu Fonk.}$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z^4+1=0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}, z^4=1 \cdot e^{i\pi+2n\pi i}\} \\ &\quad n=0,1,2,3 \end{aligned}$$

Not: Bu lemma genelde $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (\forall x \in \mathbb{R} \text{ için } q(x) \neq 0)$

ve $\deg p + 2 \leq \deg q$

formundaki fonk. için kullanılır.

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4} \}$$

bölgesinde analitik bir fonk. ve $e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4}$ noktaları

f nin basit kutuplarıdır. Bu noktalardan sadece $e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}$ noktaları

üst yarı düzlemde dir. $(0-\pi)$ arasında

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} 2\pi i \left[\text{Res}\{f, e^{i\pi/4}\} + \text{Res}\{f, e^{i3\pi/4}\} \right]$$

$$\text{Res}\{f, e^{i\pi/4}\} = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} (z - e^{i\pi/4}) \cdot \frac{1}{z^4+1} = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} \frac{1}{4z^3}$$

$$= \frac{1}{4 \cdot e^{3i\pi/4}} = \frac{1}{4} \cdot e^{-3i\pi/4} = \frac{1}{4} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = -\frac{\sqrt{2}}{8} - i \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\text{Res}\{f, e^{i3\pi/4}\} = \lim_{z \rightarrow e^{i3\pi/4}} (z - e^{i3\pi/4}) \cdot \frac{1}{z^4+1} = \lim_{z \rightarrow e^{i3\pi/4}} \frac{1}{4z^3}$$

$$= \frac{1}{4 \cdot e^{i9\pi/4}} = \frac{1}{4} \cdot e^{-i9\pi/4} = \frac{1}{4} \left[\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{\sqrt{2}}{8} - i \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \pi i \left[-\frac{\sqrt{2}}{8} - i \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} - i \frac{\sqrt{2}}{8} \right] = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

Ödev: 1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$

2) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1} dx = ?$

Lemma: (Jordan Lemması)

g , açık üst yarı düzlemde $z_1, \dots, z_n$ sonlu tane kutup noktaları dışında $\{z = x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ kapalı üst yarı düzlemi kapsayan bir bölge üzerinde analitik bir fonksiyon olsun. Kapalı üst yarı düzlemde düzgün olarak,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$$

ise, $k > 0$

$$\varphi(z) = g(z) \cdot e^{ikz}$$

ve

$$\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = r \cdot e^{it} \quad \text{çemberi için}$$

1) $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} \varphi(z) dz = 0$ ve

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}\{\varphi, z_j\}$ 'dir.

NOT: Bu lemma $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $q(x) \neq 0$ ve

$\deg p + 1 \leq \deg q$ formundaki integraller için geçerlidir.

Örnek: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh kx}{x^2+a^2} dx = ?$

Çözüm: $g(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ fonk. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-ia, ia\}$ bölgesinde

analitik ve $-ia, ia$ noktalarında basit kutuplara sahip bir fonk.'dur. Bu kutup noktalarından sadece $z=ia$ noktası üst yarı düzlemde dir.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2+a^2} = 0$$

olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}, ia \right\}$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} (z-ia) \frac{e^{ikz}}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{e^{-ka}}{2ia} \cdot 2\pi i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh kx}{x^2+a^2} dx = \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2} dx \right\} = \frac{\pi}{a} e^{-ka}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh kx}{x^2+a^2} dx = \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2} dx \right\} = 0$$

Örnek: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b \cos t}$ $a > |b| > 0$

Çözüm: $z = e^{it}$ için $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$ ve

$dz = ie^{it} dt$ $dt = \frac{1}{iz} dz$ 'dir.

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad \gamma(t) = e^{it} \text{ ö.}$$

$$\int_{\gamma} \frac{\frac{1}{iz} dz}{a + \frac{b}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{bz^2 + 2az + b}$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{bz^2 + 2az + b} \quad \text{Fonksiyonu}$$

$$\begin{aligned} z &= \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-2a - \sqrt{4a^2 - 4b^2}}{2b}, \frac{-2a + \sqrt{4a^2 - 4b^2}}{2b} \right\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \left\{ \underbrace{\frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}}_{z_1}, \underbrace{\frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}}_{z_2} \right\} \end{aligned}$$

bölgesi üzerinde analitik ve $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ noktalarından basit kutba sahiptir.

$$|z_1| = \left| \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right| = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{|b|} > \frac{a}{|b|} > 1$$

oldu'ndan $z_1 \notin \gamma^\circ$ ve

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \left(\frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \\ &= \frac{a^2 - (a^2 - b^2)}{b^2} = 1 \end{aligned}$$

oldu'ndan $z_2 \in \gamma^\circ$ 'dir. O halde

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b\cos t} &= \frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{bz^2+2az+b} = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{bz^2+2az+b}, z_2 \right\} \\
 &= 4\pi \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{z-z_2}{b(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{4\pi}{b} \frac{1}{z_2-z_1} = \frac{4\pi}{b} \cdot \frac{1}{z_2-z_1} \\
 &= \frac{4\pi}{b} \cdot \frac{b}{2\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} //
 \end{aligned}$$

11.3 Seri Toplamlarının Rezidi ile Hesaplanması

Lemma: (Seri Toplam Formülleri):

$\mathcal{P}$, tam sayılar kümesi üzerinde hiçbir singüler noktası olmayan meromorfik bir fonksiyon olsun. $2 \leq k \in \mathbb{N}$ ve $A > 0$ sabitler ö.ü. $z \in \mathbb{C}$ için $|P(z)| \leq \frac{A}{2^k}$ ise

$j = 1, 2, \dots, n$ için z_j 'ler $\mathcal{P}$ 'nin kutup noktaları ö.ü.

$$1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n) = \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} \left\{ \pi \cdot \cot(\pi z) P(z), z_j \right\}$$

$$2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n P(n) = - \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} \left\{ \pi \cdot \csc(\pi z) P(z), z_j \right\}$$

$$3) \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} \left\{ \pi \cdot \tan(\pi z) \cdot P(z), z_j \right\}$$

$$4) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \sum_{j=1}^n \text{Res} \{ \pi \cdot \sec(\pi z) f(z), z_j \}$$

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} \quad (a>0)$

$n=1, 2, \dots$ için $\frac{1}{n^2+a^2} \leq \frac{1}{n^2}$ $p=2>1$ oldu'ndan

p testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsaktır. Karşılaştırma testine göre $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ serisi yak.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2} \left(\overset{n=0 \text{ durumu 1 tane}}{\frac{1}{a^2}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} \right)$$

$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ Fonksiyonu $\mathbb{C} \setminus \{-ia, +ia\}$ bölgesinde analitik ve $\pm ia$ noktalarında basit kutbu vardır. Bu durumda

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \text{Res} \left\{ \pi \cdot \cot(\pi z) \cdot \frac{1}{z^2+a^2}, -ia \right\} + \text{Res} \left\{ \pi \cdot \cot(\pi z) \cdot \frac{1}{z^2+a^2}, +ia \right\}$$

$$\text{Res} \left\{ \pi \cdot \cot(\pi z) \cdot \frac{1}{z^2+a^2}, -ia \right\} = \lim_{z \rightarrow -ia} (z+ia) \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{\pi}{2ia} \cot(\pi ia)$$

$$\text{Res} \left\{ \pi \cdot \cot(\pi z) \cdot \frac{1}{z^2+a^2}, ia \right\} = \lim_{z \rightarrow ia} (z-ia) \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{\pi}{2ia} \cot(\pi ia)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\pi}{ia} \coth(\pi ia) \right) = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a)$$