Subject : Date ....

Fonk

Bölüm 1

01.10.24
Pzt 1. ders

Klasik Eşitsizlikler

Tanım: $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ açık aralık da olabilir farketmez.

Her $x,y \in (a,b)$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

ise f fonk. konveks bir fonksiyondur.

(*) $x \neq y$, $\lambda \in [0,1]$ için

$f((1-\lambda)x+\lambda y) < (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$ ise f fonk. kesin konveks fonk. denir.

(*) f konveks fonk. olsun $g:(a,b) \to \mathbb{R}$

$$g(x) = -f(x)$$

fonk konkav fonk. denir.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = |x|$

fonk. $\mathbb{R}$ üzerinde konvekstir.

Çözüm:
$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x+\lambda y) &= |(1-\lambda)x+\lambda y| \\ &\leq (1-\lambda)|x| + \lambda|y| \\ &= (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \ \# \end{aligned}$$

Teorem: iki kez türevlenebilir olan $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ fonk. konvekstir.

$\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ dır. ((a,b) aralığında pozitif olacak)

Örnek: $f(x) = e^x$ konvekstir.

$f''(x) = e^x \geq 0$ "

Jensen Eşitsizliği

Teorem: $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ konveks bir fonk olsun.

$x_1 \dots x_n \in (a,b)$, $\lambda_1 \dots \lambda_n \in$ non negatif (ya 0 ya pozitif)

reel sayılar öyle ki:

$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ olsun.

$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$

Bu eşitsizlikte eşitlik durumu,

$x_1 = \cdots = x_n$ için sağlanır.

Tanım: $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$A_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

ifadesine $x_1, \ldots, x_n$ sayılarının aritmetik ortalaması denir.

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

ifadesine $x_1 \ldots x_n$ sayılarının geometrik ortalaması denir.

Tanım: $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}^+$, $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}^+$

$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ olsun.

$A_n\lambda = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ sayısına $x_1 \ldots x_n$ sayılarının ağırlıklı aritmetik ortalaması denir.

$G_n\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ sayısına " " ağırlıklı geometrik ortalaması denir.

★ $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ ise $A_n\lambda = A_n$

$G_n\lambda = G_n$ dır. ?

Teorem: $x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R}^+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ için $\lambda_j \in [0,1]$ ve $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ olsun.

$$G_n\lambda \leq A_n\lambda$$

yani,

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \text{ dır.}$$

İspat:

$x_j^{\lambda_j} = e^{\lambda_j \ln x_j}$ olarak yazabiliriz. ve $f(x) = e^x$ fonk. konvekstir.

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 \ln x_1} \cdots e^{\lambda_n \ln x_n}$$
$$= e^{(\lambda_1 \ln x_1 + \cdots + \lambda_n \ln x_n)}$$
$$= f(\lambda_1 \ln x_1 + \cdots + \lambda_n \ln x_n)$$
$$\leq \lambda_1 f(\ln x_1) + \cdots + \lambda_n f(\ln x_n)$$
$$= \lambda_1 e^{\ln x_1} + \cdots + \lambda_n e^{\ln x_n}$$
$$= \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \quad \#$$

Örnek: Her $x \in \mathbb{R}$ için $\cosh x \geq 1$ olduğunu gösterin.

$$\cosh x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{aritmetik ortalama büyüktür geo. ort.}} \geq \sqrt[2]{e^x e^{-x}} = 1$$

Young Eşitsizliği

$\lambda \in (0,1)$, $a, b \in (0, \infty)$

$a^{\lambda} \cdot b^{(1-\lambda)} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$ dir. $a=b$ için eşitlik sağlanır.

$$\underbrace{x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} = a^{\lambda} b^{(1-\lambda)}}_{\text{ağırlıklı geo ort.}} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \underbrace{a\lambda + (1-\lambda) b}_{\text{ağırlıklı aritmetik ort}}$$

her zaman küçük eşittir.

Not: $p, q > 0$ reel sayılar $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}^+$ ol.

$a \cdot b \leq \frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} b^q$ eşitsizliği de young eşitsizliği olarak verilir.

Yani, $x_1 = a^p$
$x_2 = b^q$
$\lambda_1 = 1/p$
$\lambda_2 = 1/q$

$$(a^p)^{1/p}(b^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

Örnek! a, b, c pozitif reel sayı

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a+b+c$$

Çözüm!
$$\frac{\frac{a^2}{b} + b}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b} = a$$

$$\frac{a^2}{b} + b \geqslant 2a \Rightarrow \frac{a^2}{b} \geqslant 2a - b$$

$$\frac{b^2}{c} + c \geqslant 2b \Rightarrow \frac{b^2}{c} \geqslant 2b - c$$

$$\frac{c^2}{a} + a \geqslant 2c \Rightarrow \frac{c^2}{a} \geqslant 2c - a$$

+

$\geqslant a+b+c$ bulunur.

$p>1$

NOT! $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ eşitsizliğini sağlayan p, q sayılarına eşlenik sayılar denir.

Diziler için Hölder eşitsizliği

Teorem! Diziler için Hölder eşitsizliği

p, q eşlenik sayılar,

$(a_j)_1^{\infty}$, $(b_j)_j^{\infty}$, $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty$ ve $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q < \infty$

yakınsak ise

Subject :

yakınsaklık şartını sağlayan kompleks diziler ise,

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q\right)^{1/q}$$

dir. Bu eşitsizliğe diziler için Hölder eşitsizliği denir. Eşitsizlik sadece her j için $a_j = 0$ veya $b_j = 0$ veya $|b_j|^q = |a_j|^q$ ise sağlanır. ~~Dışa ders ispat~~

* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$ $\sum |a_n|^2 < \infty$?

$p=1$ ise $\sum |a_n| < \infty$ mutlak yakınsak

derste bir şeyle karşılaşma.

03.10.2024

perşembe

2. ders

Diziler için Hölder

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q\right)^{1/q}$$

İspat : Üçgen eşitsizliği, tümevarım prensibi ve limit monotonluğundan

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j|$$

olduğu görülür.

$\left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum |b_j|^q\right)^{1/q} = 0$ ise,

$\left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p} = 0$ veya $\left(\sum |b_j|^q\right)^{1/q} = 0$ olur. Bu ise

$\sum |a_j b_j| = 0$ olduğunu gösterir. Eşitlik sağlanır.

veya

Subject :   Date : ....../....../......

$$\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{1/p}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q\right)^{1/q}}_{>0} > 0 \text{ olsun.}$$

Yang eşitsizliğinin $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ formunu göz önüne alalım.

$$a = \frac{|a_j|}{\left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p}} \qquad b = \frac{|b_j|}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q\right)^{1/q}} \text{ olsun.} \qquad \underline{\underline{j \in \mathbb{N}}}$$

$$\frac{|a_j b_j|}{\left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum |b_j|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|a_j|^p}{\sum |a_j|^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_j|^q}{\sum |b_j|^q}$$

(j üzerinden toplam alınırsa, hep $\sum_{j=1}^{\infty}$ kısaltıyorum)

$$\frac{\sum |a_j b_j|}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum |b_j|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \cancel{\frac{\sum |a_j|^p}{\sum |a_j|^p}} + \frac{1}{q} \cancel{\frac{\sum |b_j|^q}{\sum |b_j|^q}}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\frac{\sum |a_j b_j|}{\left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum |b_j|^q\right)^{1/q}} \leq 1$$

$p = q = 2$ alınırsa, Hölder eşitsizliğine Cauchy-Schwartz

$\frac{1}{2} + \frac{1}{q} = 1$, $q = 2$

eşitsizliği olarak adlandırılır.

Subject : Date : ...../...../......

Aynısı sonlu terimli ifadeler için de geçerlidir. Örn: $\sum_{j=1}^{n}$

Örnek: $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,\infty)$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) \geq n^2$$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $$n^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} 1\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{x_j}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_j}}\right)^2$$

$$\leq \left[\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{x_j}\right)\right)^{1/2}\right]^2$$ → hölderi ikeriye uyguladık.

$\sqrt{x_j}^{\,2} = x_j$

Teorem: Diziler için Minkowski Eşitsizliği

p, q eşlenik sayılar $(a_j), (b_j)$ dizileri

$\sum |a_j|^p < \infty$, $\sum |b_j|^q < \infty$ yakınsak eşitlen sağlayan $\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ dizisi olsun.

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j+b_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |b_j|^p\right)^{1/p}$$

$\forall j$ için $a_j = 0$ (veya $b_j = 0$) veya $\lambda > 0$ için $b_j = \lambda a_j$ eşitlik görülür.

İspat:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j+b_j|^p = \sum \overbrace{|a_j+b_j|}^{\text{üçgen eşitsizliği ile } \leq |a_j|+|b_j|}\cdot|a_j+b_j|^{p-1}$$

$$\leq \sum |a_j|\,|a_j+b_j|^{p-1} + \sum |b_j|\,|a_j+b_j|^{p-1}$$

bu iki toplama tek tek Hölder uygulayalım.

Subject :

$$\leq \left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum |a_j+b_j|^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q}$$

$$+ \left(\sum |b_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum |a_j+b_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$= \left(\sum |a_j+b_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left[\left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |b_j|^p\right)^{1/p}\right]$$

p olarak buldük

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \rightarrow \underbrace{\frac{1}{q} = 1-\frac{1}{p}}_{} = \frac{p-1}{p}$$

$p = q(p-1)$ buldük

$$\left(\sum |a_j+b_j|^p\right) \leq \left(\sum |a_j+b_j|^p\right)^{1/q} \left(\left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |b_j|^p\right)^{1/p}\right)$$

$$\left(\sum |a_j+b_j|^p\right)^{\left(1-\frac{1}{q}\right)\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |b_j|^p\right)^{1/p}$$

#

Örnek: $\mathbb{F} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ ve $p \geq 1$ olsun.

$$\ell_p \text{ ya da } \ell^p = \left\{ x = (x_j) \subset \mathbb{F} : \underbrace{\left(\sum |x_j|^p\right)^{1/p} < \infty}_{\text{yakınsaklık}} \right\}$$

şartını sağlıyor yani.

kümesi $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaylara ℓ_p uzayları, $\boxed{\text{p-mutlak yakınsak diziler uzayı}}$ denir.

$\star$ $\frac{1}{n} \notin \ell_1$, $\frac{(-1)^n}{n} \notin \ell_1$ mutlak yakınsak eleman!

şartlı yakınsak Değil

$\frac{1}{n} \in \ell_2$, $\frac{(-1)^n}{n} \in \ell_2$

$\ell_1 \subset \ell_2 \subset \ell_3 \ldots c_0 \ldots \subset \ell_\infty$ (sınırlı diziler uzayı)

Subject : Date : ....../....../......

Çözüm:

$x=(x_i)$, $y=(y_i) \in l_p$ olsun. $\alpha \in F$ olsun.

$x+y \overset{?}{\in} l_p$, $\left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} < \infty$ $\left(\sum |y_i|^p\right)^{1/p} < \infty$

$$\underbrace{\left(\sum |x_i+y_i|^p\right)^{1/p}}_{<\infty} \xrightarrow{} \underset{\text{minkowski}}{\leq} \underbrace{\left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}}_{<\infty} + \underbrace{\left(\sum |y_i|^p\right)^{1/p}}_{<\infty}$$

$\alpha x \overset{?}{\in} l_p$

$$\left(\sum |\alpha x_i|^p\right)^{1/p} = |\alpha| \underbrace{\left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}}_{<\infty} < \infty$$

$\therefore$ l_p uzayı, bir vektör uzayıdır.

(*) $p=1$ l_1: mutlak yakınsak diziler uzayı

$p=2$ l_2: Bir Hilbert uzayı (iç çarpım uzayı) örneğidir.

<u>Teorem</u>: Fonksiyonlar için Hölder ve Minkowski eşitsizliği

p, q eşlenik sayılar, $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) Hölder Eşitsizliği

$\int |f|^p = \int |f(x)|^p dx < \infty$

$\int |g|^q = \int |g(x)|^q dx < \infty$ olsun.

$$\left|\int fg\right| \leq \int |fg| \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int |g|^q\right)^{1/q} \text{ dir.}$$

ii) Minkowski Eşitsizliği

$\int |f|^p < \infty$ ve $\int |g|^p < \infty$ için

$$\left(\int |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}$$

ispat :

i) $\left(\int |f|^p\right)^{1/p}\left(\int |g|^q\right)^{1/q} > 0$ olsun

Öyle ise $\left(\int |f|^p\right)^{1/p} > 0$ $\left(\int |g|^q\right)^{1/q} > 0$

$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ young eşitsizliği ile

$a = \frac{|f|}{\left(\int |f|^p\right)^{1/p}}$ $b = \frac{|g|}{\left(\int |g|^q\right)^{1/q}}$

ab oluştur $\Rightarrow \int \frac{|fg|}{\left(\int |f|^p\right)^{1/p}\left(\int |g|^q\right)^{1/q}}$

$\leq \int \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\int |f|^p} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\int |g|^q}$

integral al

$$\frac{\int |fg|}{\left(\int |f|^p\right)^{1/p}\left(\int |g|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{\cancel{\int |f|^p}}{\cancel{\int |f|^p}} + \frac{1}{q}\frac{\cancel{\int |g|^q}}{\cancel{\int |g|^q}}$$

$= 1$

ii) Minkowski sonra uygulamada

Subject : Date :....../....../......

Örnek: $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli, $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha + \beta = 1$

$$\int_0^1 |f(x)|^\alpha \, |g(x)|^\beta dx \leq \left(\int_0^1 |f(x)| dx\right)^\alpha \left(\int_0^1 |g(x)| dx\right)^\beta$$

Çözüm: Çarpım var. Hölder uygulanacak.

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşlenik olr.

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{\alpha} \\ q &= \frac{1}{\beta} \end{aligned}\right\} \text{ olalım. Eşlenik mi? } \quad \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\frac{1}{\beta}} = \alpha + \beta = 1 \; \#$$

alabiliriz.

$$\int_0^1 |f(x)|^\alpha |g(x)|^\beta dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^1 (|f(x)|^\alpha)^{p} dx\right)^{1/p} \left(\int_0^1 (|g(x)|^\beta)^{q} dx\right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_0^1 |f(x)| dx\right)^\alpha \left(\int_0^1 |g(x)|^1 dx\right)^\beta$$

Örnek:

$$\int_0^1 \sqrt{e^x \ln(1+x)} \, dx \leq \sqrt{(e-1)(2\ln 2 - 1)}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $p = q = 2$ için Hölder

$$\int_0^1 (e^x)^{1/2} (\ln(1+x))^{1/2} dx$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^1 e^x dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \ln(1+x) dx\right)^{1/2}$$

Subject : integral çalıştırma alınmalı

Date : ...../...../......

$\boxed{\text{kısmi integrasyon çalış.}}$

Metrik Uzaylar

d = distance

Tanım: $X \neq \emptyset$ bir küme $d: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ bir fonk. olsun.

i) $x, y \in X$ için $d(x,x) = 0$ ve $x \neq y$ için $d(x,y) > 0$

ii) $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $x, y, z \in X$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ üçgen eşitsizliği ifadeleri sağlanıyorsa, d fonk. X kümesi üzerinde bir metriktir denir ve (X,d) ikilisine de metrik uzay (m.u.) denir.

i) şıkkı x, y için $d(x,y) > 0$
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ olarak da ifade edilebilir.

Not: (X,d) bir m.u. ve $E \neq \emptyset$ kümesi X in bir alt kümesi olsun. d fonk. E kümesinde de metrik şartlarını sağladığından (E,d) bir m.u. dur ve (X,d) m uzayının bir alt uzayıdır.

Örnek: $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x, y \to d(x,y) = |x-y|$ bir metrik mi?

$x, y, z \in \mathbb{R}$,

i) $d(x,x) = |x-x| = 0$ ✓

$x \neq y \Rightarrow |x-y| \neq 0$, $d(x,y) = |x-y| > 0$

ii) $d(x,y) = |x-y| = |(-1)(y-x)|$
$= |y-x| = d(y,x)$

iii) $d(x,y) = |x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ → üe
$= d(x,z) + d(z,y)$

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ m.u. mutlak değer metriği denir.

Subject: Date:

Örnek: $d: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to [0,\infty)$ $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$

$(z,w) \to d(z,w) = |z-w|$ $z = x+iy \in \mathbb{F}$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

• $L^p([a,b]) = \left\{ f: [a,b] \to \mathbb{F} : \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$

uzayına L^p- uzayı, p-mutlak integrallenebilen fonk. uzayı denir.

★ $d_p: L^p([a,b]) \times L^p([a,b]) \to \mathbb{R}$

$f,g \to d_p(f,g)$

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

'li fonk. $L^p([a,b])$ üzerinde bir metriktir.

i) $f,g \in L^p$ $d_p(f,g)$ (integral monoton, $f \geq 0$ ise $\int f(x) \geq 0$ olur.)

integralin monotonluğundan,

$d_p(f,g) \geq 0$ olur.

$d_p(f,g) = 0 \iff \int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx = 0$

$\iff |f(x)-g(x)|^p = 0$

$\iff |f(x)-g(x)| = 0$

$\iff f(x) = g(x)$

ii) $d_p(f,g) = \left(\int |f-g|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int |g-f|^p dx\right)^{1/p} = d_p(g,f)$

iii) $f,g,h \in L^p$

$d_p(f,g) = \left(\int |f(x)-g(x)|^p dx \right)^{1/p}$

$= \left(\int |\underbrace{(f(x)-h(x))}_{f_1} + \underbrace{(h(x)-g(x))}_{f_2}|^p dx \right)^{1/p}$

Subject : Date : ..../..../....

minkowski eşitsizliğinden,

$$\leq \left(\int |f(x)-h(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int |h(x)-g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$= d_p(f,h) + d_p(h,g)$$

Önerme! Ters üçgen eşitsizliği

(X,d) mu, $x,y,z \in X$ olsun.

$$|\underbrace{d(x,z)}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{d(z,y)}_{\in \mathbb{R}}| \leq d(x,y)$$

İspat! $x,y,z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ dir.

$d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$ (1)

$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$

$d(y,z) - d(x,z) \leq d(y,x)$

$d(x,z) - d(y,z) \geq -d(y,x)$ (2)

(1) ve (2) den,

$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ ulaşılır.

Örnek: Ayrık mu

$X \neq \emptyset$ bir küme. $d: X \times X \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to d(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

genel keyfi bir kümede

- aksi örnek vermek için ayrık mu örneği verebiliriz.

i) $x,y \in X$, $d(x,y) = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} x=y \quad d(x,y)=0 \\ d(x,y)=0 \Rightarrow x=y \end{array}\right\} \Rightarrow x=y \Leftrightarrow d(x,y)=0$$

Subject : Date :....../....../......

ii) $x, y \in X$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x\neq y \end{cases} = \begin{cases} 0, & y=x \\ 1, & y\neq x \end{cases} = d(y,x)$$

iii) $d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z)+d(z,y)}_{\in \mathbb{R}}$ old. gösterelim. $x,y,z \in X$

1. yol, tek tek ihtimalleri düşün.

2. yol, $d(x,z)+d(z,y) < 1$ veya $d(x,z)+d(z,y) \geq 1$ dir. (reel sayı çünkü)

$\Rightarrow \underbrace{d(x,z)}_{<1}+\underbrace{d(z,y)}_{<1} < 1$ ise,

$d(x,z) < 1 \Rightarrow d(x,z)=0$
$d(z,y) < 1 \Rightarrow d(z,y)=0$
$\Rightarrow x=z$
$y=z$
$\Rightarrow x=y=z$ demek.

Demek ki $d(x,y)=0$

$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ ✓ sağlanır $0 \leq 0$ ✓

$\Rightarrow d(x,z)+d(z,y) \geq 1$ ise

$d(x,z)+d(z,y) \geq 1 \geq d(x,y)$ (0 ya da 1)

olduğundan her iki durumda da üçgen eşi. sağlanır.

d fonk. X üzerinde bir metriktir.

Örnek! (X,d) bir mu $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ fonk. X üz. de m. olduğunu gösterin.

i) $x,y \in X$ olsun.

$d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq 0$ d bir metrik olduğundan, bu ifade sıfır ya da pozitiftir.

$d_1(x,y) = 0 \iff \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$

$\iff d(x,y)=0$

$\iff$ d m. old. $x=y$

artan monotonluk gerekir

Subject :   d nin simetrikliğinden,   Date : ...../...../......

ii) $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d_1(y,x)$ ✓

iii) $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$ fonk. tanımlayalım. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0$ olduğundan f artandır. (artan sürekli fonk)

d metrik olduğundan,

$\underbrace{d(x,y)}_{t_1} \leq \underbrace{d(x,z) + d(z,y)}_{t_2} \Rightarrow f(t_1) \leq f(t_2)$

(f artan çünkü)

f fonk. monoton artanlığından,

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+\underbrace{d(z,y)}_{\geq 0}} + \frac{d(z,y)}{1+\underbrace{d(x,z)}_{\geq 0}+d(z,y)}$$

paydayı küçültelim

$$\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

$$= d_1(x,z) + d_1(z,y)$$

yani, $d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(y,z)$ sağlanır.

• monotonluk
• sürekli fonk.
• kapalı açık
• oteroozeler
• sup, inf
yakınsaklık

Subject : Date : ..../..../....

<u>Örnek:</u> Sürekli Fonksiyonlar Uzayı :

$$C([a,b]) = \{ f : f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ sürekli fonk} \}$$

kümesi bir vektör uzayıdır.

hocanın kitabı

• $f, g \in C([a,b])$, $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha (f(x))$$

$$d_\infty : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$$
$$f, g \longrightarrow d_\infty(f,g)$$
$$= \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

fonk. $C([a,b])$ üzerinde bir metriktir.

• Kapalı aralıksa, max, açıksa sup yaz.

<u>Not:</u> Kapalı aralıkta tanımlı sürekli fonk. max ve min değerini aldığından $f, g \in C([a,b])$

$$d_\infty(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$ olarak yazılabilir.

i) $f, g \in C([a,b])$ $f = g$ olsun. $\Leftrightarrow$ $d_\infty(f,g) = 0$ old. göster.

$d_\infty(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = 0$ gösterelim.

$f = g$ ise,

Her $x \in [a,b]$ için $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0$

$\Rightarrow |f(x) - g(x)| = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|}_{d_\infty(f,g)} = 0$

$\Leftarrow$

$d_\infty(f,g) = 0 \Rightarrow \max |f(x) - g(x)| = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow f(x) - g(x) = 0 \quad (\forall x)$

$\Rightarrow f = g$

Subject : Date : ...../...../.....

$f \neq g$ olsun

O halde en az bir $x_0 \in [a,b]$ var ki

$$f(x_0) \neq g(x_0) \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) \neq 0$$
$$\Rightarrow |f(x_0) - g(x_0)| > 0$$
$$\Rightarrow \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \geq |f(x_0) - g(x_0)| > 0$$

✓

ii) $d_\infty(f,g) = \max |f(x) - g(x)| = \max |g(x) - f(x)| = d_\infty(g,f)$

iii) $f,g,h \in C([a,b])$

$$d_\infty(f,g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$
$$= \max |(f(x) - h(x)) + (h(x) - g(x))|$$

mutlak değerin üçgen eşitsizliği

$$\leq \max_{a \leq x \leq b} \{ |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \}$$
$$\leq \max |f(x) - h(x)| + \max |h(x) - g(x)|$$
$$= d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$$

Bu metriğe göre yakınsama düzgün yakınsama olduğundan bu metriğe düzgün yakınsaklık metriği denir.

Subject: (L_p'nin 1'li versiyonu) Date 10.10.24 Perşembe

Örnek: $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ fonk. $C([a,b])$ üzde. metrik olduğunu gösterin.

$C([a,b])$: Sürekli fonk uzayı

$L_p \Rightarrow \quad d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx \right)^{1/p}$

* bir yerde $C([a,b])$ diyorsa max metriği yap + kullan. (max)

i) $d_1(f,f)=0$ ve $f\neq g$ için $d_1(f,g)>0$ old. gösterelim

$$d_1(f,f) = \int_a^b |f(x)-f(x)|\,dx = \int_a^b |0|\,dx = 0 \checkmark$$

$f\neq g$ olsun. O halde en az bir $x_0 \in [a,b]$ var ki,

$$f(x_0)-g(x_0) \neq 0 \Rightarrow |f(x_0)-g(x_0)|>0$$

f,g sürekli, mutlak değer sürekli olduğundan $h=|f-g|$ bileşke fonk. süreklidir. Sürekli fonkların işaret koruma özelliğinden öyle bir $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ komşuluğu vardır ki her $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ için $h(x)=|f(x)-g(x)|>0$

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

$A\subset B$, $f>0$

$$\int_A f \leq \int_B f \quad \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)-g(x)|\,dx > 0$$

ii) çok kolayca gösterilir.

Subject : Date : ..../......./.......

iii) $d_1(f,g) = \int |f(x) - g(x)|\, dx$

$= \int |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$

lineerlik $\Rightarrow \int f+g = \int f + \int g$

mutlak değer üçgen eşitsizliği

int lineerliği $= \int |f-h| + \int |h-g| = d_1(f,h) + d_1(h,g)$

<u>Örnek:</u> (X, d) bir m.u. ln log fonk.

$d_e(x,y) = \ln(1 + d(x,y))$ fonksiyonunun X üzerinde metrik olduğunu gösteriniz.

i) $d_e(x,x) = \ln(1 + \overbrace{d(x,x)}^{0}) = \ln(1) = 0$

d metrik olduğundan, $\underline{d(x,x) = 0}$ $\quad \underline{\ln 1 = 0}$

$x \neq y$ $\quad d_e(x,y) = \ln(1 + \underbrace{d(x,y)}_{>0})$

d metrik olduğundan pozitif,

$\ln(\underbrace{1 + d(x,y)}_{>1}) > 0$ pozitiftir.

ln fonk. monoton artan olduğundan $1 + \overbrace{d(x,y)}^{>0} > 0$

$\ln(1 + d(x,y)) > \ln 1 = 0$

ii) $d_e(x,y) = \ln(1 + d(x,y))$

$= \ln(1 + d(y,x))$ d simetrik olduğundan

$= d_e(y,x)$

iii) $d_e(x,y) = \ln(1 + d(x,y))$

burada, $\leq \underbrace{d_e(x,z)}_{\ln(1+d(x,z))} + \underbrace{d_e(z,y)}_{\ln(1+d(z,y))}$ olduğunu göstereceğiz

Subject : Date : ...../...../.....

d metrik olduğundan

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$$\leq d(x,z) + d(z,y) + \overbrace{d(x,z) \cdot d(z,y)}^{\geq 0}$$

$$1 + d(x,y) \leq 1 + d(x,z) + d(z,y) + d(x,z) \cdot d(z,y)$$

$$= (1 + d(x,z))(1 + d(y,z))$$

her iki taraftan ln alınırsa

$$\ln(1 + d(x,y)) \leq \ln(1 + d(x,z))(1 + d(y,z))$$

$$= \ln(1 + d(x,z)) + \ln(1 + d(y,z))$$

$$d_e(x,y) \leq d_e(x,z) + d_e(y,z)$$

☆ **Önerme:** (X,d) bir m.u. $x,y,z,w \in X$

$$|d(w,x) - d(y,z)| \leq d(w,y) + d(x,z)$$

eşitsizliği sağlanır.

(X,d) m.u.

$$d_e(x,y) = \ln(1 + d(x,y))$$

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$d_e(x,y) = \ln(1 + |x-y|)$$

$$d = d_A$$

$$d_e(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \ln 2, & x \neq y \end{cases}$$

$$-d(w,y) - d(x,z) \leq d(w,x) - d(y,z) \leq d(w,y) + d(x,z)$$

iki ayrı incele.

$$d(w,x) \leq d(w,y) + d(y,x)$$

$$\leq d(w,y) + d(y,z) + d(z,x) \quad \text{--- (1)}$$

$$-d(y,z) \leq d(y,w) + d(w,z) \leq d(y,w) + d(w,x) + d(x,z)$$

Subject : Date : ....../....../......

$-d(y,z) \geq -d(y,w) - d(w,x) - d(x,z)$

$d(y,w) - d(x,t) \leq d(w,x) - d(y,t)$ (2)

(1) ve (2) den eşitsizlik sağlanır.

Örnek: (X, d_X) ve (Y, d_Y) iki m.u olsun. $X \times Y$ üzerinde d fonk. her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ için $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$ olarak tanımlanıyor.

d fonk $X \times Y$ üzerinde m olduğunu gösterin.

i) $d((x,y),(x,y)) = \underbrace{d_X(x,x)}_{=0} + \underbrace{d_Y(y,y)}_{=0}$ d_X ve d_Y metrik olduğundan,

$= 0$ olur.

d_X ve d_Y metrik olduğundan, pozitif!

$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ olsun. O halde $x_1 \neq x_2$ veya $y_1 \neq y_2$

$d_X(x_1, x_2) > 0$ veya $d_Y(y_1, y_2) > 0$

$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \underbrace{d_X(x_1,x_2)}_{>0} + \underbrace{d_Y(y_1,y_2)}_{>0} > 0$

ii) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$

$= d_X(x_2,x_1) + d_Y(y_2,y_1)$ d_X, d_Y metrik, simetriktir.

$= d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$ #

iii) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$

$x_3 \in X$, $y_3 \in Y$ d_X, d_Y üçgen eşitsizliğinden,

$\leq d_X(x_1,x_3) + d(x_3,x_2) + d_Y(y_1,y_3) + d_Y(y_3,y_2)$

$= d((x_1,y_1),(x_3,y_3)) + d((x_3,y_3),(x_2,y_2))$

olduğunu gösterdik.

Subject: Çarpım metrikleri

- $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(d_X(x_1,x_2))^2 + (d_Y(y_1,y_2))^2}$
- $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\}$

bu ikisi $X \times Y$ uzayında metrik, deme, göster.

Örnek! $p \in (1,\infty)$

$$d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$

$y = (y_1, \ldots, y_n)$

fonk. $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir. → uygulamada çözülecek

* $p=2$ için d_2, $\mathbb{R}^n$ de öklid metriğidir. $(\mathbb{R}^n, d_2)$

+ $n=1$ için $d_p(x,y) = |x-y|$, $(\mathbb{R}, d_p) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ mutlak değer metriği

* $p=1$ için $d_1(x,y) = |x_1-y_1| + \ldots + |x_n-y_n|$

$\mathbb{R}^n$ üzerinde toplam metriği,

$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, \ldots, |x_n-y_n|\}$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde maksimum metriği denir.

Metrik Uzayların topolojik yapısı

Tanım! (X,d) bir m.u. $a \in X$, $r>0$ olsun.

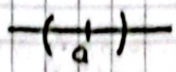
- $B(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\}$ kümesine a merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir.

- $B[a,r]$ ya da $\overline{B}(a,r) = \{x \in X : d(a,x) \le r\}$ kümesine a merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar denir.

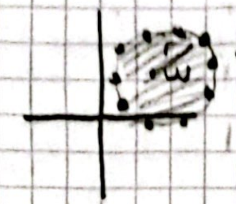
- $S(a,r) = \partial B(a,r) = \partial B[a,r] = \{x \in X : d(a,x) = r\}$ kümesine küre denir.

Subject : Date : ....../....../......

- $|x-a| < r$ => açık yuvar, $(a-r, a+r)$ aralığı a merkezli r yarıçaplı açık yuvar.



- $|\overline{w}-z| < r$ $\qquad d_2(x,a) < r$



disk bu, yuvar, açık daire vs.

$x=(x_1,x_2) \quad a=(a_1,a_2)$

$\underbrace{\sqrt{|x_1-a_1|^2+|x_2-a_2|^2}}_{|\overline{w}-z| \text{ bu}} < r$

- Her metrik kendi topolojisini üretir.
- Öklidyen standart topolojiyi üretir.
- m.u topolojik uzay, her topolojik uzay m.u değil!

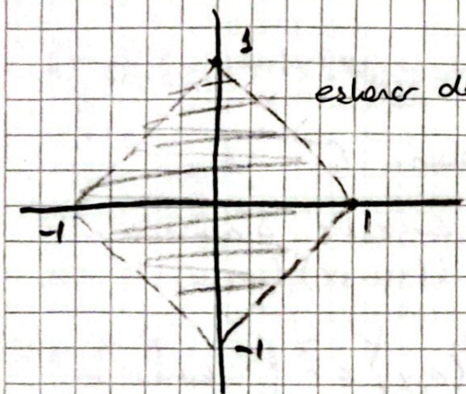
* $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$, $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$

$d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$ $\qquad d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$

- Birim yuvar = $B(0,1)$ alırsak,

$B_{d_1}(0,1) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : d_1(0,(x_1,x_2)) < 1 \}$

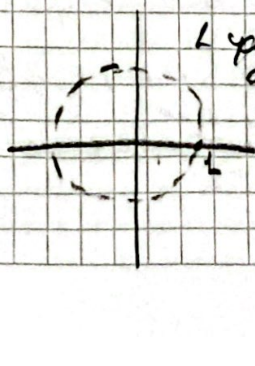
$d_1(0,(x_1,x_2)) = |x_1| + |x_2| < 1$



eşkenar dörtgen $B_{d_1}(0,1)$

$B_{d_2}(0,1) = \{ x=(x_1,x_2), d_2(0,(x_1,x_2)) < 1 \}$

$d_2(0,x) = \sqrt{x_1^2+x_2^2} < 1$

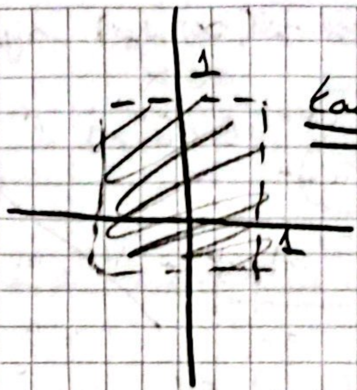


1 yarıçaplı açık daire

Subject : Date :....../....../......

$B_{d_\infty}(0,1) = \{x : d_\infty(0,x) < 1\}$

$d_\infty(0,x) = \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1$



kare

- aynı uzay üzerine 3 farklı metrik koyduk, topolojilere baktık.

15.10.24

Foto çekti̇m + yaz.

Çok önemli değil telde var

Subject : Date : ..../..../....

Örnek: (X, d_A) ayrık m. ile metriklenmiş bir MU olsun. $a \in X$

Açık Yuvar:

$$B(a,r) = \begin{cases} \{a\} & r \leq 1 \\ X & r > 1 \end{cases}$$

tek nokta küresi

↳ uzayın tamamına eşit

$d_A(a,y) < 1$

$\underbrace{\hphantom{d_A(a,y)}}$

$0, \cancel{1}$ 1 eledik.

$$d_A(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Örnek: (X, d_A) Ayrık m. " " "

Kapalı Yuvar

$$\overline{B}(a,r) = \begin{cases} \{a\} & r < 1 \\ X & r \geq 1 \end{cases}$$

$y = d_A(a,y) \leq r$

= Anlamadı diye tekrar anlatıyor. = ↓

$(\mathbb{Z}, d_A)$, $B_{d_A}(\underbrace{-2}_{\text{nokta}}, \underbrace{1/2}_{\text{komşuluk}}) = \{z \in \mathbb{Z} : \underbrace{d_A(-2,z)}_{0, 1} < 1/2\} = \{-2\}$

Kalamaz. 0 olması için kendi olmalı yani -2 nok.

- $B_{d_A}(-2, r) = \{-2\}$ $r < 1$

- $B_{d_A}(z_0, \underset{<1}{r}) = \{z_0\}$

- $B_{d_A}(-2, 3/2) = \{z : \underbrace{d_A(-2,z)}_{0, 1} < 3/2\} = \mathbb{Z}$

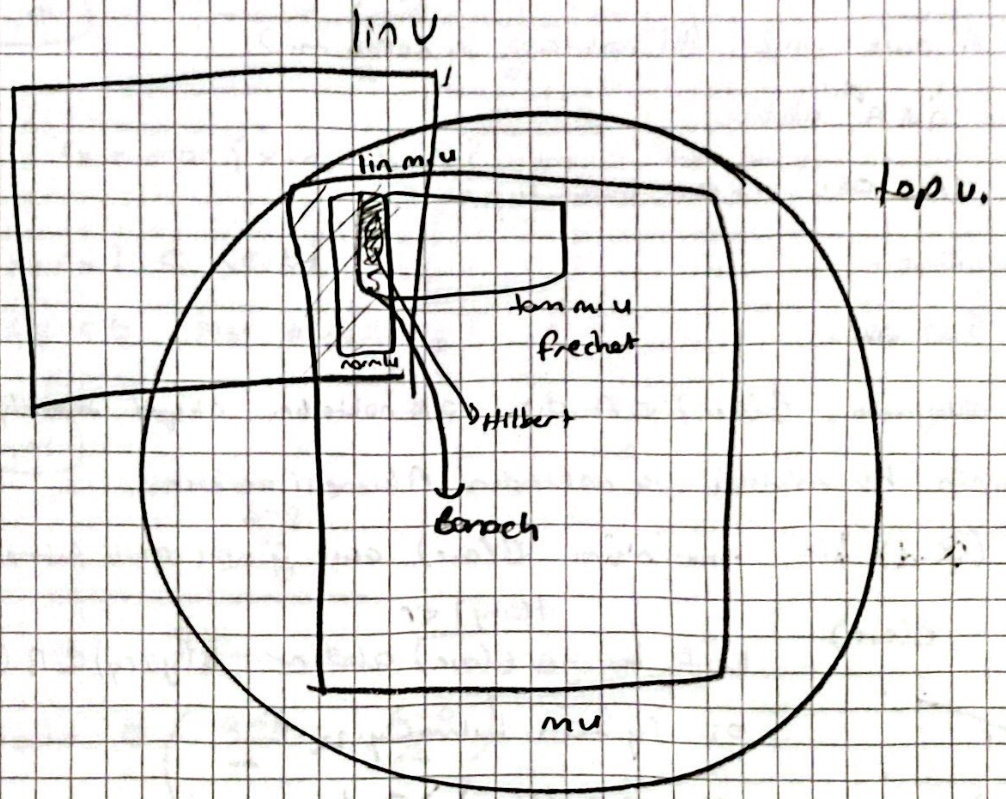
Subject : Date : ....../....../......

Örnek: $(\mathbb{R}^2, d_A)$

$a = (-\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$B_{d_A}\left(\underbrace{(-\sqrt{2}, \sqrt{3})}_{0}, \frac{1}{3}\right) = \{(-\sqrt{2}, \sqrt{3})\}$

$B_{d_A}\left(\underbrace{(-\sqrt{2}, \sqrt{3})}_{0,1}, \underbrace{4/3}_{>1}\right) = \mathbb{R}^2$ hem 0 hem 1 [illegible]



Tanım: (X,d) bir m.u. $A \subset X$ ve $a \in A$ olsun. $B(a,r) \subset A$ o.ş. $r>0$ varsa a nok. A kümesinin bir iç noktası, Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme denir.

Örnek: Ayrık m.u. her alt kümesi açık kümedir.

(X, d_A) ayrık mu olsun. $A \subset X$ alalım.

i) A açık mı? Her noktası iç nokta mı?

Keyfi bir $a \in A$ alalım.

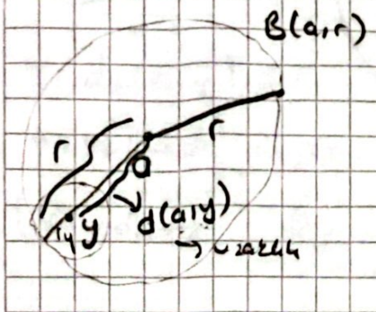
$B(a,r) \subset A$ o.ş. $r>0$ bulmalıyız.

$r \leq 1$ seçilirse,

$B(a,r) = \{a\}$ olur.

$\{a\} \subset A$ olduğundan, $B(a,r) \subset A$ dır. a iç noktadır. a keyfi seçildiğinden A kümesinin her noktası iç noktadır. A kümesi açıktır.

Önerme: (X,d) bir m.u. olsun. $B(a,r)$ açık yuvar açık kümedir.



$d(a,y) < r$

keyfi bir $y \in B(a,r)$ alalım. $B(y,r_y) \subset B(a,r)$ o.ş. $r_y > 0$ bulmalıyız.

$r_y = r - d(a,y) > 0$ dır.

$B(y,r_y)$ yuvarını elde ettik. şimdi $B(y,r_y) \subset B(a,r)$ old. göstermeliyiz.

$z \in B(y,r_y)$ olsun. $z \in B(a,r)$ mi?
$d(a,z) < r$?

$$d(a,z) \underset{\text{ÜE}}{\leq} d(a,y) + \underbrace{d(y,z)}_{<r_y} < d(a,y) + r_y = \cancel{d(a,y)} + r - \cancel{d(a,y)} = r$$

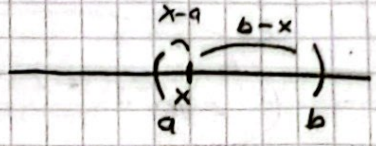
$d(a,z) < r \Rightarrow z \in B(a,r)$

Yani $B(y, r_y) \subset B(a,r)$

y bir iç noktadır. y keyfi seçildiğinden $B(a,r)$ nin her noktası iç noktadır. $B(a,r)$ açık kümedir.

Örnek! $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ mu da (a,b) aralığı açık kümedir.

1. yol

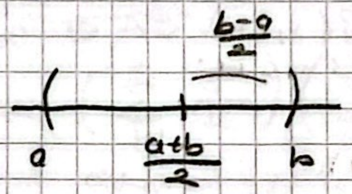


$r_x = \min\{x-a, b-x\}$ r_x'i buluyoruz.

$B(x, r_x) \subset (a,b)$

$a<y<b$ test etmeliyiz!

2. yol



$$(a,b) = \underbrace{B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)}_{\text{açık yuvar} \Rightarrow \text{açık küme}}$$

$\Rightarrow$ (a,b) açık kümedir.

Teorem! (X,d) bir mu olsun.

i) $\emptyset$ ve X açık kümelerdir.

ii) $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ açık küme ailesi ise $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ açıktır.

iii) keyfi sayıda açık kümenin birleşimi açıktır.

Subject : Date : ....../....../......

Soru: Her mu bir topolojik uzaydır.

Örnek: $(a,\infty) \subset \mathbb{R}$ ve $(\mathbb{R}, |\,|)$ olsun. (a,∞) kümesi açıktır.

$$(a,\infty) = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a, a+n)}_{\text{açık küme}}}_{\text{açık küme keyfi birleşimi}}$$

(a,∞) açık kümedir.

$(-\infty,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n,n)$
$= \mathbb{R}$

Teorem: (X,d) bir m.u. $A \subset X$ açık olması için gyk A kümesinin açık yuvarların birleşimi olarak yazılmasıdır.

İspat: $\Leftarrow$ A, açık yuvarların birleşimi olarak yazılabilsin. Her açık yuvar açık küme ve açık kümelerin keyfi birleşimi açık olduğundan A açıktır.

$\Rightarrow$ A açık küme olsun. O halde $x \in A$ için $B(x, r_x) \subset A$ olacak $r_x > 0$ vardır.

$$\bigcup_{x \in A} \underbrace{B(x, r_x)}_{\subset A} \subset A \quad \text{———} \quad (1)$$

Tersine $x \in A$ olsun, $x \in B(x, r_x)$, dolayısıyla,

$$x \in \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$$

$$A \subset \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \quad \text{———} \quad (2)$$

(1) ve (2) den $A = \bigcup B(x, r_x)$

Subject :   Date : ...../...../.....

Kapalı küme: Tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme denir.

Örnek: $[0,1]$ kapalıdır.

Örnek: (X, d_A) $A \subset X$ olsun. A kapalıdır.

$\underbrace{X \setminus A}_{\text{açık}} \subset X \Rightarrow X \setminus A$ açık olduğundan A kümesi kapalıdır.

* Ayrık m. her alt kümesi hem açık hem kapalıdır.

$\{a\} \subset A, d_A$
hem açık
hem kapalı

$\{a\} \subset (\mathbb{R}, |\,|)$
kapalı

Uygulama dersi   17.10.24

Örnek: $\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{11} \frac{3^j}{11}\right)}^{A} \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{11} \frac{1}{11 \cdot 2^j}\right)}^{B} \geqslant 1$

olduğunu gösteriniz.

Not: $\underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}_{G.O} \leqslant \underbrace{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}}_{A.O}$

Anın AO: $\frac{1}{11} \sum_{n=1}^{11} \frac{3^j}{11} \geqslant \sqrt[11]{\prod_{j=1}^{11} \frac{3^j}{11}}$

Bnin AO: $\frac{1}{11} \sum_{n=1}^{11} \frac{1}{11 \cdot 2^j} \geqslant \sqrt[11]{\prod_{j=1}^{11} \frac{1}{11 \cdot 2^j}}$

A ile B çarp!

$\frac{1}{11} \cdot A \cdot \frac{1}{11} \cdot B \geqslant \sqrt[11]{\prod_{j=1}^{11} \frac{3^j}{2^j} \cdot \frac{1}{121}} \geqslant \sqrt[11]{\prod_{j=1}^{11} \frac{1}{121}} = \frac{1}{121}$

$\frac{3^j}{2^j} \geqslant \frac{3^j}{3^j}$ diyebiliriz.

Subject : Date : ....../....../......

~~$\frac{1}{|z|} AB \geq \frac{1}{|z|} \Rightarrow AB \geq 1$ bulunur. yani~~

$$\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{11} \frac{3^j}{11}}_{A}\right)\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{11} \frac{1}{11 \cdot 2^j}}_{B}\right) \geq 1 \text{ dir.}$$

≥ 1 dir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mutlak yakınsak bir sayı serisi olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|a_n|}}{n} \cdot \cos(nx)$ mutlak yakınsak olduğunu göster.

* ilk ifadeyi incele

Çözüm: $(*) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = M_1 < \infty$ mutlak yakınsak olduğu için bir sayıya eşit oluyordu. Maldır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{|a_n|}}{n} \cdot \cos nx \right| \leq$$

$\forall x$ için $|\cos x| \leq 1$ bunu kullan

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{|a_n|}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sqrt{|a_n|} \cdot \frac{1}{n} \right|$$

Hölder kullanıyoruz

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{|a_n|}\right)^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^q \right)^{1/q}$$

$p=2$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = 2$ olur.

$$= \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right)^{1/2}}_{M_1} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}}_{\text{için } p\text{-testten yakınsaktır}} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = M_2 < \infty$$

Subject : Date : ....../....../......

p test neydi? $\Rightarrow$ ÇALIŞ $\rightarrow$ Yakınsaklık testleri çalış

$= \sqrt{m_1} \cdot \sqrt{m_2} < \infty$

<u>Teorem:</u> Fonksiyonlar için Minkowski Eşitsizliği

$$\int_E |f(x)|^p dx < \infty \quad \text{ve} \quad \int_E |g(x)|^p dx < \infty$$

ise,

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_E |g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

<u>İspat:</u>

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx = \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1} |f(x)+g(x)| \, dx$$

$$\leq \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1} \big(|f(x)| + |g(x)| \big) dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1} \cdot |f(x)| dx}_{\text{1. integral}} + \underbrace{\int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1} |g(x)| \cdot dx}_{\text{2. integral}}$$

1 Hölder $\leq \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$

* $f(x)$ sonlu olduğunu biliyoruz. p'yi ona koy.

Subject : Date : ....../....../......

2 için Hölder $\leq \left(\int_a^b |g(x)|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} \right)^{1/q}$

bu ortak, parantezi al!

(*) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad p+q = pq \Rightarrow p = q(p-1)$

bunu yaz.

1. ve 2 yi yerine yaz.

$$= \underbrace{\left(\int |f(x)+g(x)|^p \right)^{\frac{1}{q}}}_{(*)} \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \right)^{1/p} \right]$$

Not! eşitsizliğin her iki tarafını (*)'a bölüyoruz.

$$\frac{\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \right)^1}{\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \right)^{1/q}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^p \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^p \right)^{1/p}$$

$1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$

$$= \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^p \right)^{1/p}$$

#

* dx leri unutmamalıdır

Örnek: $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonk. ve $1<p \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\left(\int_a^b e^x |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b e^x |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b e^x |g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

old. gösteriniz.

Çözüm: (*) Her $x \in [a,b]$ için $e^x > 0$ ve $(e^{x/p})^p = e^x$ olduğunu biliyoruz.

mutlağa atarken $e^{x/p}$ olarak attık!

$$\left(\int_a^b e^x |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_a^b |e^{x/p}(f(x)+g(x))|^p dx\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_a^b |e^{x/p} \cdot f(x) + e^{x/p} g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_a^b |e^{x/p} f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |e^{x/p} g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Minkowski uygulayalım.

$$= \left(\int_a^b e^x |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b e^x |g(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad \#$$

$\boxed{\text{* mutlağa atarken yaptık } e^x \text{ ile. Eşitlik bozulmasın diye } e^{x/p} \text{ yaptık attık çünkü } (e^{x/p})^p = e^x \ \#}$

Subject : Date : ....../....../......

Örnek: $p \in (1, \infty)$ olsun.

$$d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}$$

fonk. $\mathbb{R}^n$ de metrik old. gösteriniz.

Çözüm: i) kesin pozitif özelliği

$d(x,x) = 0$ ve $x \neq y$, $d(x,y) > 0$ old. göster.

Çözüm

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ öü $|x - x| = 0$

$$d_p(x,x) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - x_j|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{n} 0^p \right)^{1/p} = 0$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}$

ve $x \neq y$ alalım. Vektör eşitliği tanımından

$\exists j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ için $x_{j_0} \neq y_{j_0}$ dan farklı olur.

Mutlak değerin kesin pozitifliğinden $|x - y| > 0$ dur.

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}$$

p ler gittikçe ≥ 0 kabul ettik olamayacaktır

$$= \left(\overset{>0}{|x_1 - y_1|} + \cdots + \overset{>0}{|x_{j_0} - y_{j_0}|} + \cdots + \overset{>0}{|x_n - y_n|} \right)^{1/p}$$

$$\geq \left(|x_{j_0} - y_{j_0}|^p \right)^{1/p} = |x_{j_0} - y_{j_0}| > 0$$

ii)
$$d_p(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}$$

mutlak değer metriğinin simetrik olduğunu biliyoruz.

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j|^p \right)^{1/p} = d_p(y,x)$$

iii) $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$, $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n$ olsun.

$$d_p(x,z)=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j-z_j|^p\right)^{1/p} \quad y_j \text{ ekle çıkar}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}|\underbrace{x_j-y_j}_{1}+\underbrace{y_j-z_j}_{2}|^p\right)^{1/p}$$

minkowski eşitsizliği uygulayalım.

$$\leq\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{n}|y_j-z_j|^p\right)^{1/p}$$

$$d_p(x,z)\leq d_p(x,y)+d_p(y,z) \quad \#$$

metriktir.

$(\mathbb{R}^n, d_p)$ metrik uzaydır. $\mathbb{R}^n$ uzayı, d_p metriği ile metriklenebilir.

Örnek: $z=(z_n)$, $w=(w_n)$ için

$$d(z,w)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\frac{|z_k-w_k|}{1+|z_k-w_k|} \quad \text{ile tanımlanan}$$

d fonksiyonu S üzerinde metriktir.

$S=$ sınırlı veya sınırlı olmayan bütün kompleks sayı dizilerinin kümesi

Çözüm: i) $d(z,w)\geq 0$ ve $z=w \Rightarrow d(z,w)=0$

$|z-w|$ mutlak değer metriğinin pozitifliğinden

$$|z_k-w_k|\geq 0 \qquad \frac{|z_k-w_k|}{1+|z_k-w_k|}\geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\cdot\frac{|z_k-w_k|}{1+|z_k-w_k|}>0 \Rightarrow d(z,w)>0$$

Subject : Date : ....../....../......

$z = w \Leftrightarrow (|z_k| = |w_k|,\ \forall k$

$|z_k - w_k| = 0 \Leftrightarrow \dfrac{|z_k - w_k|}{1+|z_k-w_k|} = 0$ olur..

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cdot 0 = 0$ olduğundan

$z = w$ için $d(z,w) = 0$ olur. //

ii) $d(z,w) = \sum \frac{1}{3^k} \dfrac{|z_k - w_k|}{1+|z_k-w_k|}$

$= \sum \frac{1}{3^k} \dfrac{|w_k - z_k|}{1+|w_k-z_k|}$ mutlak değer simetrikliğinden

$= d(w,z)$ //

iii) Derste yapılan $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ metrik olduğunu gösterirken

$f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ fonk. artanlığı kullanılarak üçgen eşitsizliği ispatlanır.

$x = z_k - t_k$ $y = t_k - w_k$ alınırsa,

$\dfrac{|z_k - w_k|}{1+|z_k-w_k|} \le \dfrac{|z_k - t_k|}{1+|z_k-t_k|} + \dfrac{|t_k - w_k|}{1+|t_k-w_k|}$

f artan ise, $a<b$ ise $f(a) < f(b)$ olur.

$|z_k - w_k| < |z_k - t_k| + |t_k - w_k|$

Buradan $d(z,w) \le d(z,t) + d(t,w)$

$\Rightarrow$ oz

Subject : Date 22.10.24

<u>Tanım:</u> $A \subset X$ olsun. $x \in X$ ve her $r>0$ için

$$B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

$$B(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

ise, x noktasına A kümesinin bir sınır noktası, tüm sınır nok. kümesine de A kümesinin sınırı denir. ∂A ile gösterilir.

<u>Örnek:</u> $[0,1]$ aralığı kapalı kümedir çünkü, $\mathbb{R} \setminus [0,1] = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$

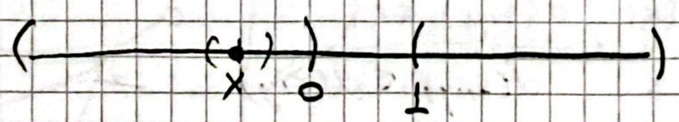
$(\mathbb{R}, |.|)$

kümesi açıktır.

1. yol: $(-\infty,0)$, $(1,\infty)$ açık aralıklar açık kümedir. birleşimi açıktır. $(-\infty,0) \cup (1,\infty)$ açıktır.

Bu açıksa tümleyeni kapalıdır $\Rightarrow [0,1]$ kapalıdır.

<u>2. yol</u>



$(x \in (-\infty,0))$ $r \leq |x|$ seçilirse,

$$(x-r, x+r) \subset (-\infty,0) \subset (-\infty,0) \cup (1,\infty)$$

olur.

$(x \in (1,\infty))$

$r \leq |1-x|$

$(x-r, x+r) \subset (1,\infty) \subset (-\infty,0) \cup (1,\infty)$

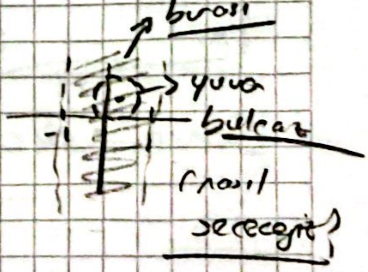
$\forall n \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$ bir iç nokta, bu küme açık.

<u>Örnek:</u> $(\mathbb{R}^2, d_2)$ $\{(x,y) : -1 < x < 1\}$ açık?

$r = \min\{|1-x|, |x+1|\}$ seçmeliyiz.

$(x,y) \in B((x,y), r)$? göstermeliyiz.

Aldığımız herhangi kümede kalıyor mu?

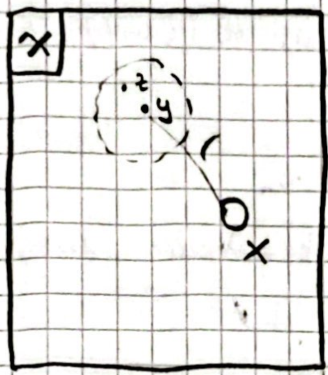


Subject: Date: ....../....../......

• ayrık m. tek nokta kümesi her küme gibi hem açık hem kapalı.

Önerme: (X,d) bir m.u. $x\in X$ olsun. $\{x\}$ tek nokta kümesi kapalıdır.
(Tüm topolojik uzaylarda geçerli değil)

İspat: $\{x\}$ teknokta kümesinin kapalı old. göstermek için $X\setminus\{x\}$ kümesinin açık old. gösterelim.



$y\in X\setminus\{x\}$ keyfi seçilsin.
$x\neq y$ dir. $d(x,y)>0$ olur.
$r=d(x,y)$ olsun.
$B(y,r)\subset X\setminus\{x\}$ old. göstermeliyiz.

$d(x,y)=r$ old. x nok. $\notin B(y,r)$ dir.

$B(y,r)=\{z\in X\setminus\{x\} : \underline{d(z,y)<r}\}$

$d(z,y)<d(x,y)$

$x\notin B(y,r)$ dır. $\Rightarrow B(y,r)\subset X\setminus\{x\}$ dir.

$\subset \{x\}^c$ aynı şey

Sonuç olarak, (X,d) m.u $\Rightarrow$ $\{x\}$ kapalı, ama açık olmayabilir.
(hem kapalı hem açık olma durumu).

$d=$ ayrık metrik ise $\{x\}$ hem kapalı hem açık $\}$ Bence soru gelir.

* **Örnek:** (X,d) bir m.u, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sonlu küme ise
$\underbrace{\{x_1, \ldots, x_n\}}_{A}$ kapalıdır.

Sonra çözcez   * Sorusu çözüm yazar

Subject : Date : ....../....../.......

Teorem: (X,d) bir m.u. olsun aşağıdakiler sağlanır.

i) X, $\emptyset$ kapalıdır.

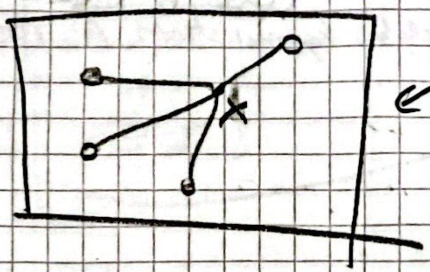
ii) $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ kapalı ise (sonlu tane) $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ kapalıdır. (X üzerinde)

iii) $\{E_i\}_{i\in I}$ keyfi sayıda kapalı küme olmak üzere,

$\bigcap_{i\in I} E_i$ kapalıdır.

*** sorusunun çözümü:**

$$A = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\{x_i\}}_{\text{kapalı}}}_{\text{kapalı}}$$ olduğu kapalıdır.



$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$r = \min d(x, x_i)$

$1 \leq i \leq n$

r böyle seçilir.

* $$\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)}_{\text{açık}} = \underbrace{\{0\}}_{\text{kapalı}}$$

* $\{E_i\}_{i=1}^{n}$, kapalı $\rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ kapalı

$\rightarrow$ ~~$\bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{E_i}_{\text{kapalı}}$ kapalı?~~ X

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]}_{\text{kapalı}} = \underbrace{(-1,1)}_{\text{açık}}$$

Subject :

→ limit nokta kümeye ait olmak zorunda değil!

Tanım: (X,d) bir mu, $A\subset X$, $x\in X$ olsun. Her $r>0$ için

$$B(x,r)\cap A\setminus\{x\}\neq\emptyset$$

oluyorsa x nok. A kümesinin bir limit yığılma nok. denir.

Lim nok kümesi A' ile gösterilir. $x\in A$ fakat, $x\notin A'$ ise, kümeye ait bir nokta yığılma nok. değilse bu noktaya ayrık (izole) nokta denir.

x ayrık nokta $\iff \exists r>0$ için

$$B(x,r)\cap A=\{x\}$$
$$\{B(x,r)\setminus A\}\setminus\{x\}=\emptyset$$

* $(\mathbb{R},|.|)$, $A=(1,3)\cup\{4\}$

$A'=[1,3]$ kapalı aralığı $(1,3)$ ün yığılma noktasıdır,
$\{4\}$ ayrık nokta.

★ $A\cup A'$ kümesine, A kümesinin X kümesindeki kapanışı denir. $\overline{A}$ ile gösterilir

$\overline{A}=[1,3]\cup\{4\}$

★ $\mathbb{N}'=?$ yığılma noktası yok $\emptyset$

★ $\overline{\mathbb{N}}=?=\mathbb{N}$ kapanışı kendisidir.

Teorem: (X,d) bir mu, ve $E\subset X$ olsun.

i) $\overline{E}$, E kümesini kapsayan en küçük kümedir.

ii) $\overline{E}=\cap\{F: F \text{ kapalı ve } E\subset F\}$

iii) E kapalı $\iff \overline{E}=E$ yani $E'\subset E$

★ $E_1\subset E_2 \Rightarrow \overline{E_1}\subset\overline{E_2}$

$(E_1'\subset E_2')$

Subject :

Date : ...../...../.....

Örnek: (X,d) bir mu. $X' \neq \emptyset$ ise her $U \subset X$ kümesi X te açıktır.

Çözüm:

$U \subset X$ ve $x \in X$ keyfi olsun, $X' = \emptyset$ old. x bir limit nok. değildir.

Limit nok. tanımından, öyle bir $r > 0$ sayısı var ki,

$$\big(\underbrace{B(x,r)}_{x \in B(x,r)} \cap \underbrace{X}_{x \in X}\big) \setminus \{x\} = \emptyset$$

$$B(x,r) \cap X = \{x\}$$

$$\underset{\text{küme}}{\text{açık}} \cap \underset{\text{küme}}{\text{açık}} = \{x\}$$ tek nok. kümesi açık bir kümedir.

* X metrik uzayında yığılma noktası yoksa $\{x\}$ tek nok. kümesi açıktır.

(X,d) mu $\Rightarrow \{x\}$ kapalı

(X,d) mu $\Rightarrow \{x\}$ açık
+
$X' = \emptyset$

* $U = \underbrace{\bigcup_{x \in U} \underbrace{\{x\}}_{\text{açık}}}_{\text{açık}} \Rightarrow U$ açık kümedir.

*** Önemli * Örnek:**

(X, d_A), d_A = ayrık metrik

$U \subset X$ açık. $X' = ?$

$x \in X$ alalım.

$\forall r > 0$ için $\underbrace{B(x,r)}$ $\cap X \neq \{x\}$ oluyorsa x limit noktası

ya $\{x\}$
ya da X $\Big\}$ oluyordu. Buradan,

$X' = \emptyset$ bulunur.

Subject: Date: ..../..../....

Soru: $\overline{B(x,r)} \overset{?}{=} \bar{B}(x,r)$ $\left(B[x,r]\right)$?

$\Rightarrow$ (X, d_A), $B(x,1) = \{x\}$ hem açık hem kapalı,

$\overline{B(x,1)} = \{x\}$ kapalıdan kapanış

$\bar{B}(x,1) = X$

$\Rightarrow$ $\overline{B(x,r)} \neq \bar{B}(x,r)$

Hoca tekrar anlatıyor, $B(x,1) = \{y : d_A(x,y) < 1\} = \{x\}$

$\overline{B(x,1)} = \overline{\{x\}} = \{x\}$ (kapalı)

$\bar{B}(x,1) = \{y : d_A(x,y) \leq 1\} = X$

$\overline{B(x,1)} = \{x\} \neq \bar{B}(x,1) = X$

* Genel olarak mudaki kapalı yuvar, açık yuvarın kapanışı değildir.

Tanım: (X,d) mu $x_0 \in X$, $\underset{\neq \emptyset}{A} \subset X$

$$d(x_0, A) = \inf\{d(x_0,x) : x \in A\}$$

değerine x_0 noktası ile A kümesi arasındaki uzaklık denir.

- $x_0 \in A$ ise $d(x_0, A) = 0$ olur.
- $d(x_0, A) \geq 0$, Her $x \in A$ için $d(x_0,A) \leq d(x_0,x)$ dir.

Örnek: (X,d) mu, $E\subset X$, $x\in X$ $\quad d(x,E)=0 \Leftrightarrow x\in \overline{E}$

$\left(d(x,E)=\inf\limits_{e\in E} d(x,e)\right)$

İspat:

$d(x,E)=0$ olsun. $\inf\limits_{e\in E} d(x,e)=0$

inf tanımından her $\varepsilon>0$ için öyle bir $e_\varepsilon\in E$ var ki $d(x,e_\varepsilon)<\varepsilon$.

$\varepsilon=\frac{1}{n}$ olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için

$d(x,e_n)<\frac{1}{n}$ o.ş. $e_n\in E$ vardır.

$\{e_n\}$ dizisi bulunur. $\{e_n\}\to x$ olur. $x\in\overline{E}$ dır.

$\Leftarrow$ $x\in\overline{E}$ olsun. O halde $\{x_n\}\to x$ o.ş. $\{x_n\}\subset E$ dizisi vardır.

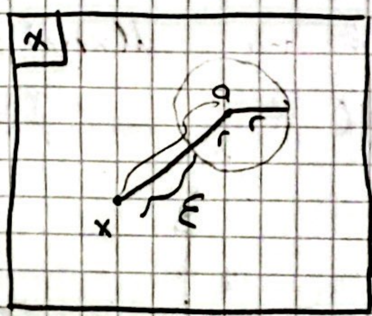
Yani $d(x_n,x)\longrightarrow 0$ dır. O halde $d(x,E)=\inf\limits_{e\in E} d(x,e)=0$.

Önr: (X,d) bir m.u. $\overline{B}(a,r)$ kapalı yuvarı kapalı bir kümedir.

İspat: $\overline{B}(a,r)$ nın kapalı old. göstermek için $X\setminus\overline{B}(a,r)$ kümesinin açık old. gösterelim.

keyfi $x\in X\setminus\overline{B}(a,r)$ alalım.

$\left(B(x,\varepsilon)\subset X\setminus\overline{B}(a,r)\right.$ old. göstereceğiz$\left.\right)$



$\Downarrow$

uzaklık r den büyük veya eşit olanların kümesi aslında

$d(x,a)>r$ dır.

$d(x,a)>r$ dir.

$\varepsilon=d(x,a)-r$ alırsak, $\varepsilon>0$ olur.

$B(x,\varepsilon)\subset X\setminus\overline{B}(a,r)$ kapsamasını gösterelim.

keyfi $y\in B(x,\varepsilon)$ alalım. ($d(y,a)>r$ old. göstereceğiz)

$d(x,a)\leq d(a,y)+d(y,x)$ old. (üçgen eşitsizliği)

$d(a,y)\geq d(a,x)-d(y,x)$

Subject : Date : ...../...../.....

$d(a,y) \geq d(a,x) - d(y,x) \rightarrow d(y,x) < \varepsilon$

$> d(a,x) - \varepsilon \qquad -d(y,x) > -\varepsilon$

$= d(a,x) - d(a,x) + r$

$= r$

$\Rightarrow d(a,y) > r$

$y \notin \overline{B}(a,r)$ dur. $y \in (\overline{B}(a,r))^c$. y keyfi seçildiğinden

$B(x,\varepsilon) \subset (\overline{B}(a,r))^c$, $\underline{(\overline{B}(a,r))^c \text{ açıktır.}}$

<u>Örnek</u> $(4,2)$ noktasının $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$ kümesine olan uzaklığını aşağıdaki metriklere göre belirleyiniz.

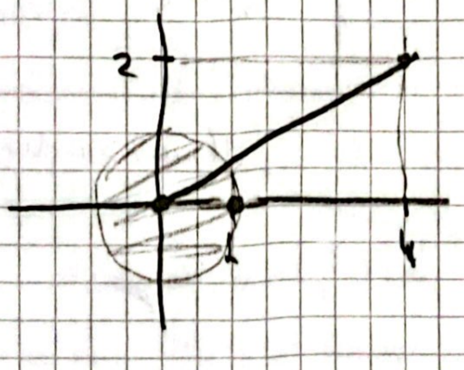
i) $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

ii) $d_1(($ " $),($ " $)) = |x_2-x_1| + |y_2-y_1|$

iii) $d_\infty(($ " $),($ " $)) = \max\{|x_2-x_1|, |y_2-y_1|\}$

* d' bir mu $d(x,y) = \min\{1, d'(x,y)\}$ minimum metriği

iv) $d($ " " $) = \min\{1, d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2))\}$



$x^2+y^2=1$ çemberi ile $(0,0)$ ve $(4,2)$ nok. birleştiren doğrunun kesişim noktasını bulalım.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

yerine yaz

$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$

$y = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cancel{\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)}$, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

bir çeviz

Subject :   Date : ....../....../......

i) $d((4,2),A) = \inf\limits_{(x,y)\in A} d_2((4,2),(x,y))$

$d((4,2),A) = d_2\left((4,2),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

$= \sqrt{\left(4-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(2-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 2\sqrt{5} - 1$

ii) $d((4,2),A) = d_1\left((4,2),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

$= \left|4-\frac{2}{\sqrt{5}}\right| + \left|2-\frac{1}{\sqrt{5}}\right| = 6 - \frac{3}{\sqrt{5}}$

iii) $d_\infty((4,2),A) = d_\infty = \max \left|\left(4-\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(2-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right|$

$= 4 - \frac{2}{\sqrt{5}}$

iv) $d((4,2),A) = \min\{1, \underbrace{(2\sqrt{5}-1)}_{d_2 \text{ hesapladyduk.}}\} = 1$

Örnek: $f(x) = 2$ sbt fonk $B(0,1)$ yuvar
$C([0,1])$

* $C([a,b]) = \{f \mid [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ sürekli}\}$

$[a,b] \to \mathbb{R}$
f sürekli

$f,g \in C([a,b])$ için

$d_\infty(f,g) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$

$2 \overset{?}{\in} B(0,1)$

$= \{f : d_\infty(f,0) < 1\}$

$d_\infty(2,0) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |2-0| = 2 > 1$, 2 sbt fonk. $\notin B(0,1)$

d_H
Housedorf?
Housdorf?

Subject :

Örnek: $\cos x \overset{?}{\in} B\,(0,1)$
$\qquad\qquad\quad\, C[0,1]$

$d_\infty(\cos x, 0) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |\cos x - 0| = \sup |\cos x| = 1$

Tanım: (X, d) mu $A, B \neq \emptyset$, $A, B \subset X$

$d(A,B) = \inf\limits_{\substack{a\in A \\ b\in B}} d(a,b)$

değerine A, B kümeleri arasındaki uzaklık denir.

inf tanımından, her $a \in A$, $b \in B$ için

$$d(A,B) \leq d(a,b)$$

$A = \{a\}$ ise

$d(A,B) = d(\{a\}, B) = d(a,B)$

$d(A,B) = \inf d(a,b) = \inf d(b,a) = d(B,A)$

$A = \{a\}$, $B = \{b\} \Rightarrow d(A,B) = d(a,b)$

$d(X, \emptyset) = \infty$, $d(A, \emptyset) = \infty$

Örnek: $A = (-\infty, 0)$, $B = (0, \infty)$ ise $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ için $d(A,B) = 0$

$A \cap B = \emptyset$ olsa da $d(A,B) = 0$ olabilir.

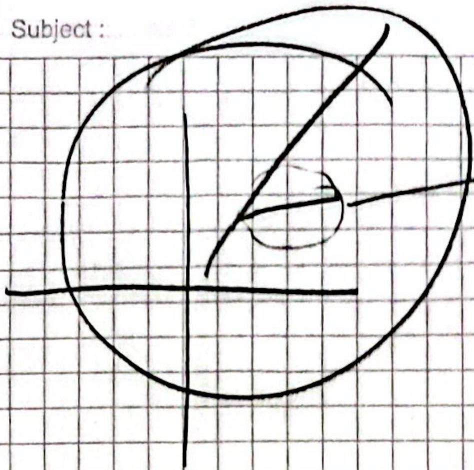
Tanım: $d(A) = \sup\{d(x,y),\ x, y \in A\}$ değerine A kümesinin çapı denir.

(*) $d(A) < \infty$ ise A kümesine sınırlı küme,
$d(A) = \infty$ ise A kümesine sınırsız denir.

Tanım: $r > 0$ ve $x_0 \in X$ için

$A \subset B(x_0, r)$ ise A kümesine X içinde sınırlı küme denir.

Subject : Date : ....../....../......



yuvarı kapsamayı
veya r nin sınırlı olması yeterli

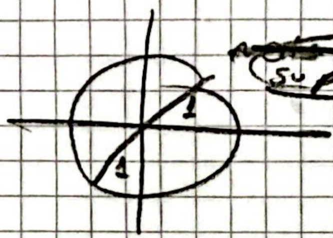
★ (X, d_A) X in çapını arıyoruz.

$d(X) = \sup d(x,y) = 1$

max 1 çünkü

★ $(\mathbb{R}^2, d_2)$ $B(0,1)$ 0 merkezli 1 yarıçaplı

$d(B(0,1)) = \sup_{x,y \in B(0,1)} d(x,y) = 2$ çünkü



~~max~~ sup 2

★ A,B iki küme

$Çap(A \cup B) \leq Ç(A) + Ç(B) + d(A,B)$

$\emptyset$

∞

$A = \emptyset$

$0 \leq \underline{Ç(\emptyset)} + \infty$

$-\infty$

belirsiz olur.